Un estudio de las funciones y su variación a través del lenguaje gráfico

Heidy Cecilia Chavira, Juan de Dios Viramontes, Natividad Nieto, Francisco López Hernández

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

RESUMEN

La matemática educativa como disciplina científica ha recorrido un largo camino y ha librado numerosas batallas tratando de legitimizar su actividad en torno a la problemática que surge al observar con ojos científicos los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez se ha gestado desde hace aproximadamente 15 años un grupo de Matemática Educativa el cual ha contribuido a describir y caracterizar algunos aspectos en torno a dicha problemática, particularmente respecto al cálculo En nuestra actividad como docentes nos hemos preocupado por identificar qué es lo que los alumnos conocen o conceptualizan como derivada. Con este objetivo en mente se ha desarrollado un proyecto que trata de fortalecer el concepto de la primera derivada de una función valiéndonos de actividades diseñadas en Derive 6. El presente artículo da cuenta del desarrollo y evolución que siguió este proyecto y algunos de los resultados que se obtuvieron, así como nuevas interrogantes que surgieron.

Palabras clave: Gráficas, Derivada, Variación, Derive 6, Lenguaje Grafico.

INTRODUCCIÓN

En los planes de estudio de las Ingenierías se puede observar que uno de los principales conceptos, en especial para Cálculo I, es el de Derivada. Este concepto se introduce desde la preparatoria en la mayoría de los casos y es tratado casi exclusivamente de manera procedimental, es decir, los alumnos trabajan con algoritmos y se quedan con la idea de que el concepto de derivada es sólo aplicar una serie de formulas, las cuales carecen de sentido o significado fuera de este uso procedimental, y más aun no indican nada de la relación entre f y f'.

Preguntas de investigación.

De manera más puntual este proyecto trataba de responder de manera inicial las siguientes cuestiones:

- ¿Qué interpretaciones pueden hacer los alumnos cuando son cuestionados acerca de la gráfica de un tipo específico de función y si la pueden relacionar con la gráfica de su derivada?
- ¿De qué manera conocer la naturaleza de la función derivada incide en la comprensión de la misma en un contexto grafico?
- ¿La naturaleza de la función derivada determina el modo en que se debería presentar ante el alumno?
- ¿Podrían diferentes medios tecnológicos facilitar a los alumnos hacer interpretaciones en la gráfica de la función acerca de su derivada?

- ¿Pueden identificar en la gráfica de la derivada cómo varía la función dependiendo del tipo de función que sea? ¿Que significa esta variación?

El proyecto se realizo a lo largo de 5 semestres durante los cuales fue sufriendo modificaciones de acuerdo a los resultados que se fueron observando, las prácticas y observaciones fueron con alumnos de la carrera de Ingeniería Mecatrónica del primer semestre, los cuales llevaron la materia de Cálculo en preparatoria, esto para asegurar que ya habían sido expuestos de alguna manera al concepto de función, al concepto de derivada y a tareas que requerían graficar. Otro aspecto a considerar es que los alumnos estuvieron trabajando con el software Derive 6 por lo menos dos meses antes de empezar a aplicar las actividades, esto para no agregar un obstáculo tecnológico al presentarles las actividades y además mostrarles al software como una herramienta más de apoyo para desarrollar lo que se les pedía (Castañeda, 2007) .

Trace una gráfica de las funciones en los problemas 18 y 19 en una calculadora o computadora. Explique lo que vea.

18. $y = \log(10^x)$ 19. $y = 10^{\log x}$

27. **Encuentre una pantalla en la calculadora en la que la gráfica de $f(x) = 10x^2 + 1000x$ se vea exactamente igual a la de $g(x) = x^2$ en la ventana $-10 < x < 10$, $-10 < y < 100$. [Sugerencia: complete el cuadrado.]**
28. **Grafique $f(x) = 3^x$ en la pantalla en la calculadora $0 < x < 3$, $0 < y < 27$. A continuación grafique $g(x) = 2(3^{x/2})$ en la pantalla $0 < x < 6$, $0 < y < 54$. Explique por qué las dos gráficas se ven exactamente igual.**

33. a) **Use una calculadora, puesta en radianes, para hacer una tabla de valores con exactitud de dos dec males, de $f(x) = \arcsen x$, para $x = -1, -0.8, -0.6, \ldots 0, \ldots, 0.8, 1$. (En casi todas las calculadoras, a sen aparece como $\boxed{\text{sen}^{-1}}$).**
 b) **Trace $f(x) = \arcsen x$. En la gráfica, marque el dominio y el contradominio de f.**

35. **Con una calculadora o computadora estime todos los puntos de intersección de las gráficas de $f(x) = x +$ sen x y $g(x) = x^3$. ¿Cómo sabe que ya los determinó todos?**

36. a) **Use una calculadora graficadora o una computadora para estimar el periodo de $2 \text{ sen } \theta + 3 \cos(2\theta)$.**
 b) **Explique su respuesta, dado que el periodo de sen θ es 2π, y el de $\cos(2\theta)$ es π.**

En los problemas 3 a 6, trace a mano las gráficas de los polinomios. Compruebe su respuesta usando una calculadora o computadora.

3. $f(x) = (x-3)(x-4)(x-5)$ 4. $f(x) = (x+3)(x+4)(x+1)(x+2)$
5. $f(x) = 5(x^2-4)(x^2-25)$ 6. $f(x) = -5(x^2-4)(25-x^2)$

Fig. 1. Selección de problemas (Hughes-Hallet, 2005).

En las actividades que se desarrollaron en todo momento se tomo como base o guía problemas del libro de texto de el curso, incluso en algunos de los problemas el autor hacia la sugerencia de utilizar algún tipo de herramienta como una calculadora graficadora o un programa de computo para hacer visualizaciones e interpretaciones acerca de algún tipo de función en particular. Fueron estos problemas los que se utilizaron para introducir el uso del software Derive 6 en clase, esto para prevenir que el uso del software fuera un obstáculo al momento en que los alumnos trabajaran en las actividades por sí mismos. A continuación en la figura 1 se presentan algunos de los problemas tomados del libro de texto (Hughes-Hallet, 2005), los cuales se utilizaron para familiarizar a los alumnos con el uso del software.

DESARROLLO Y OBSERVACIONES

Consideremos la definición de derivada del libro de texto de cálculo diferencial de los cursos de Cálculo I en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez que a la letra dice: *" Para cualquier función f, la función derivada f' se define como sigue: $f'(x) =$ Rapidez de cambio de f en $x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. "*

Consideramos que existe una ambivalencia entre el significado institucionalizado de la derivada y el que manejan los alumnos. Existe un desvanecimiento entre lo que se enseña y lo que interpretan los alumnos cuando se enfrentan a situaciones donde requieren hacer interpretaciones de la primera derivada de una función en un contexto diferente al matemático (Sánchez, 2006 y Sánchez-Matamoros, 2007).

La actividad inicial de este proyecto fue la aplicación de un cuestionario preliminar (Anexo 1). El cuestionario empezaba con una serie de preguntas dirigidas a tratar de acceder a lo que los alumnos recordaban de manera teórica sobre derivadas; en estas preguntas se identificaron cuatro tipos de respuestas en lo que se refería a la definición:

- Ninguna respuesta.
- Respuestas muy acertadas acerca de la definición de derivada
- Respuestas que aunque no eran correctas si mostraban que los alumnos tenían muy presente que el concepto de *pendiente* era parte importante de la definición.
- Las respuestas que definían o relacionaban al concepto de derivada con solo una serie de formulas, específicamente la formula de derivación para las funciones del tipo x^n.

Otro aspecto que fue evidente en esta primera parte es que tenían la expectativa de que la derivada debería ser de un grado menor que la función original, y esto lo referían de manera analítica o gráfica.

La segunda parte del cuestionario les pedía calcular la derivada de dos funciones relativamente sencillas, es decir, que se resolvían con la regla de las potencias y una última que requería la regla de derivación para un cociente, en esta última función algunos aplicaban las reglas de derivación de manera aislada en cada parte de la función que se les daba (figura 2). Con estas observaciones preliminares pudimos identificar que aunque la primera intención de los alumnos es tratar de resolver problemas por medio de reglas o “fórmulas”, estas carecen de coherencia y significado para ellos.

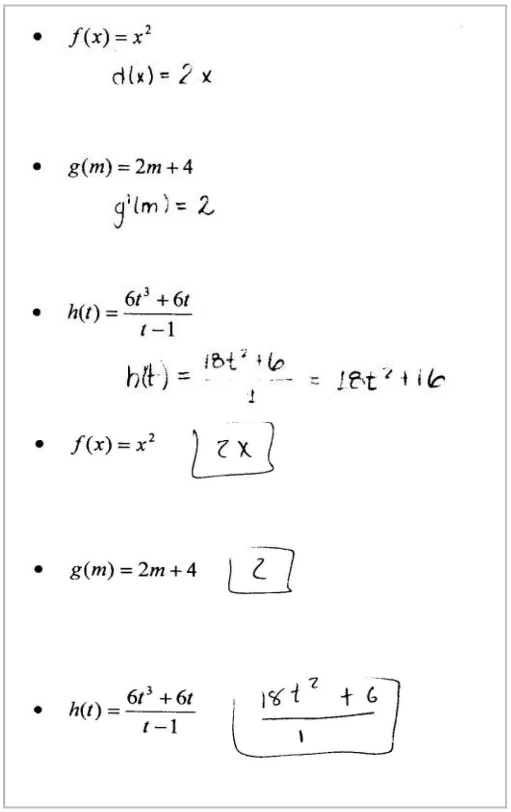

- $f(x)=x^2$
  $d(x)=2x$
- $g(m)=2m+4$
  $g'(m)=2$
- $h(t)=\frac{6t^3+6t}{t-1}$
  $h(t)=\frac{18t^2+6}{1}=18t^2+16$
- $f(x)=x^2$ $\boxed{2x}$
- $g(m)=2m+4$ $\boxed{2}$
- $h(t)=\frac{6t^3+6t}{t-1}$ $\boxed{\frac{18t^2+6}{1}}$

Fig. 2. Algunos resultados.

En la tercera parte del cuestionario se les presentaba la gráfica de una función y se les pedía que a partir de ella construyeran un bosquejo de la gráfica de la primera derivada de la función, lo que se buscaba en este bosquejo era ver que aproximación hacían los alumnos al verse frente a un problema que no presentaba la ecuación de la función, y más aún no podrían basarse en fórmulas de manera directa para resolverlo, aunado a que la respuesta que se pedía no era una ecuación sino una gráfica (Dolores, 2007; Lara y Cordero, 2007); las respuestas que se obtuvieron (algunos alumnos no tenían ningún trabajo desarrollado en esta parte) se dirigieron claramente en dos sentidos:

- Buscaron la expresión algebraica de la función presentada en la grafica y en ella derivaron, basándose en formulas, y una vez que tuvieron esta expresión la graficaron, pero esto no en todos los casos produjo un bosquejo correcto. (figura 3).

- Se basaron en un aspecto que se reflejo en la primera parte de el cuestionario, y es el hecho de que ellos tenían la expectativa de que la derivada debería ser una función de un grado menor que la que tenían, de tal manera que la identificaron como una función cúbica y en consecuencia la derivada debería ser una función cuadrada, así que muchos graficaron una parábola dirigida hacia arriba sin mayor explicación o justificación para su gráfica (figura 4).

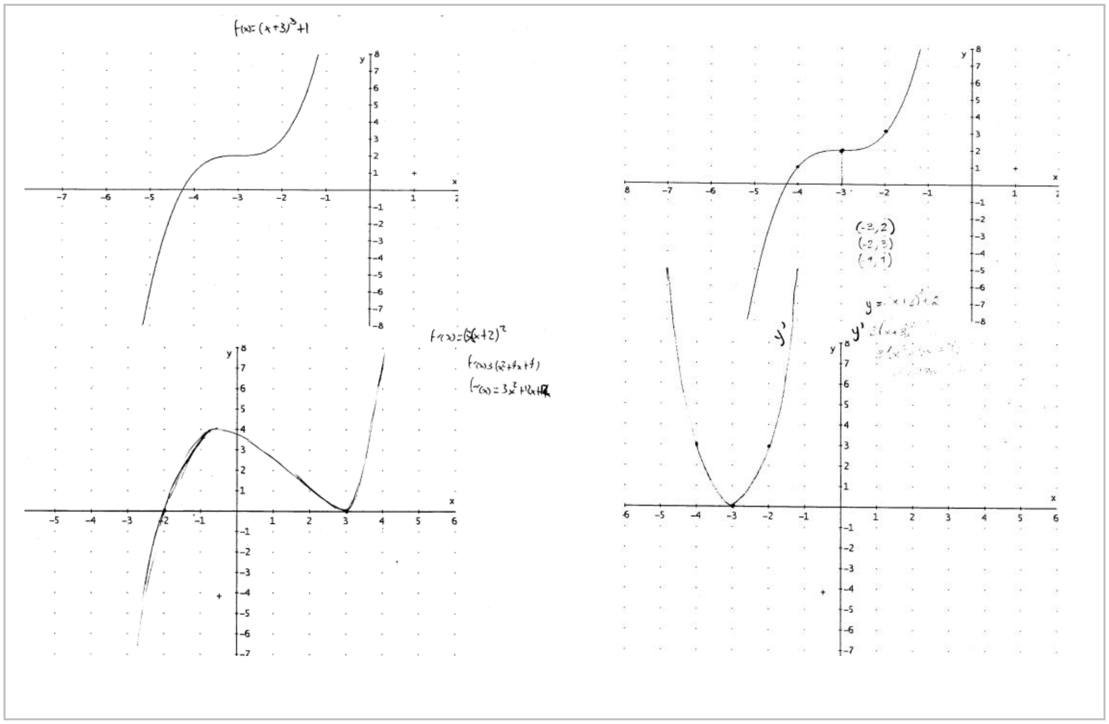


Fig. 3. Gráficas de la primera derivada de una función

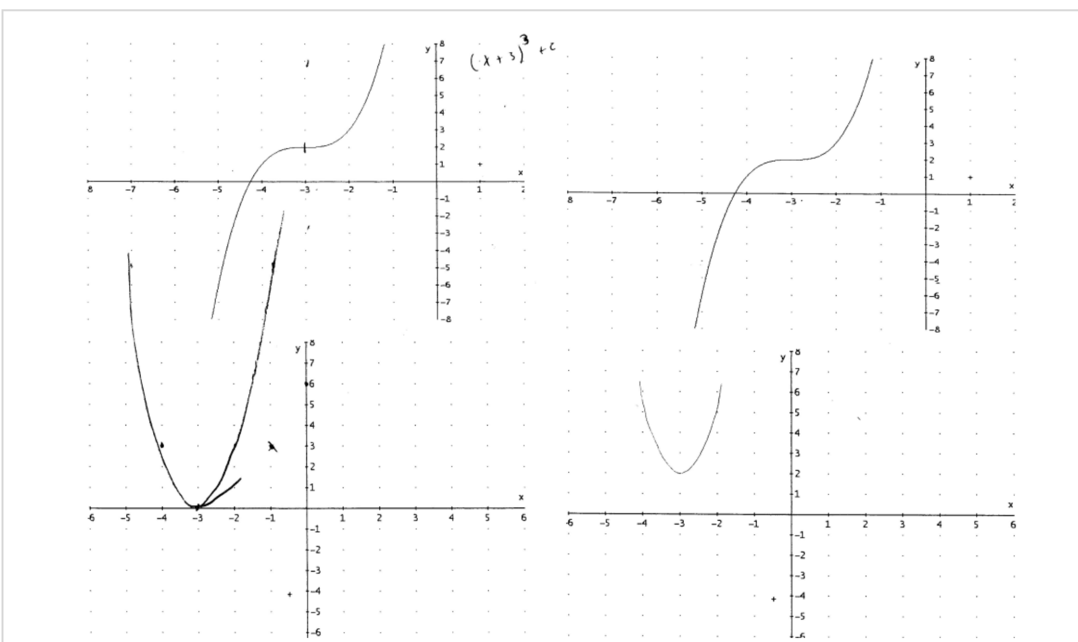


Fig. 4. Gráficas de la primera derivada de una función.

Después de este primer acercamiento en el que se busca identificar sus conocimientos previos, se sigue con la puesta en escena de una metodología de trabajo en clase para abordar este tema la cual contemplo varias etapas las cuales se fueron formulando conforme se fué desarrollando el proyecto:

Primero tratamos de enfrentarlos a la resolución de problemas donde se les pide calcular derivadas por medio de la definición (la definición del libro de texto de la clase), ya sea de manera puntual o en general. Con esto tratamos de que el alumno reconozca el papel que juega cada aspecto de la definición, como, qué es lo que representa o significa que h tienda a 0, cuál es la diferencia entre $f(a+h)$ y $f(a)$ así como entre $f(x+h)$ y $f(x)$ y claro entre ambas, y la parte más importante de este desglose de la definición es resaltar que estamos estimando la variación de la función de f con respecto a h, de nuevo esto lo hicimos basándonos en problemas del libro de texto, ya fuera trabajándolos en la manera que el libro lo presentaba o haciendo ampliaciones en algunos de ellos. La intención de presentar a la derivada de esta manera era reforzar y robustecer el significado que los alumnos tenían de la derivada.

Después en una segunda fase se pide interpretar la variación de una variable con respecto a otra se parte de un problema donde no se tiene una expresión algebraica que modele el comportamiento que se está analizando, sin embargo lo que se presenta para trabajar el problema es sólo la gráfica, esto con la finalidad de reforzar la idea de que la derivada representa una variación y de que esta variación se puede identificar en la grafica al analizar las tendencias de los signos de las pendientes y además tomando como referencia los puntos máximos y mínimos de la curva (figura 5), hasta este momento del curso los alumnos aun no identifican estos puntos como puntos críticos, sino solamente como puntos máximos o mínimos en los cuales la pendiente de una recta tangente a la curva en ellos es cero.

3. Identifique los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* en la gráfica de $y = f(x)$ de la figura 2.19.

a) El punto *A* es un punto de la curva donde la derivada es negativa.
b) El punto *B* es un punto de la curva donde el valor de la función es negativo.
c) El punto *C* es un punto de la curva donde la derivada es máxima.
d) El punto *D* es un punto de la curva donde la derivada es cero.
e) Los puntos *E* y *F* son puntos distintos en la curva donde la derivada es aproximadamente igual.

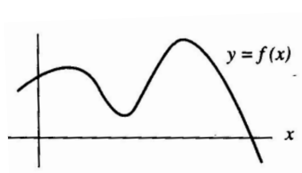


Figura 2.19

Fig. 5. Identificación de los puntos críticos de una función.

Estas dos partes de la metodología tenía la intención de dotar a los alumnos con ejemplos en donde se trabajara el concepto de derivada desde dos perspectivas diferentes una a través de análisis hechos por medio de los elementos de la definición y la otra a través de este mismo análisis pero en una gráfica (Ordoñez, 2007). En una tercera fase se aplica una actividad con el software *Derive 6* en la cual los alumnos construyen la gráfica de una función y programan una variable de movimiento (de nuevo buscamos que se refuerce el hecho de la variabilidad en el concepto de derivada) sobre la gráfica la cual dibuja tangentes a la curva de la función en diferentes puntos. Utilizando estos puntos calculan la pendiente de la tangente las cuales utilizan para graficar la derivada (Anexo 2).

Por último se trabaja en una actividad que retoma la importancia de la interpretación y reconocimiento por parte del alumno de la derivada como una variación, se pide graficar la función derivada de una función que se presenta de manera gráfica exclusivamente y (Anexo 3), se les da libertad de escoger el método que les sea más fácil y significativo para resolver el problema, es decir, pueden utilizar solo procedimientos numéricos, gráficos o herramientas como *Derive 6* para resolver el problema. Los métodos de resolución que produjo esta actividad se pudieron clasificar claramente en tres diferentes tipos, aparte de los que no contestaron nada:

- Los resultados que nuevamente se basaron en buscar una ecuación que representara a la gráfica que se daba, y una vez que identificaban esta expresión se derivaba y la expresión resultante era la que se graficaba; y las justificaciones para esto se basaban en características de la gráfica que les eran familiares a los alumnos (numero de crestas, comportamientos crecientes o decrecientes, formas de la curva y otros).

- Algunos alumnos basaron su bosquejo de la gráfica de la derivada solamente en identificar en que intervalos la curva que se daba era creciente, decreciente o tenía puntos máximos o mínimos.

- Y por último otros alumnos tomaron algunos puntos sobre la curva, dibujaron una pequeña tangente y sobre ella identificaron otro punto para calcular las pendientes, una vez que obtuvieron varias pendientes (algunos de los alumnos que utilizaron este método tomaron solo puntos clave como partes de la curva donde la función era creciente, decreciente o tenia puntos mínimos o máximos) formaron algunos pares ordenados y con ellos construyen a la grafica de la derivada.

CONCLUSIONES

Cuando los alumnos tienen herramientas más significativas para resolver problemas esto les permite obtener información o conclusiones dentro del escenario donde están usando la gráfica de la derivada sin necesariamente recaer en la parte analítica de la función, pero sí en sus propiedades y sobre todo, en su comportamiento.

Consideramos que es importante promover el análisis y la interpretación de las gráficas, en particular la de la derivada, esto con la finalidad de establecer una relación significativa entre la función y su derivada (Ordoñez, 2006). Después de estas observaciones se plantea un proyecto de investigación más especifico el cual tendría como objetivo estudiar cómo se podría reconocer e identificar a la gráfica de la derivada como poseedora de identidad y significado en sí misma, lo cual podría llevar a un entendimiento más significativo del concepto de derivada para reconocerla como la variación de una función. Esto permite ofrecer a los alumnos las herramientas que les permitan utilizar estos conocimientos para interpretar problemas aplicados de manera significativa.

En resumen lo que nos interesaría investigar es: como describir y caracterizar la problemática que se genera al reconocer que la gráfica de la derivada es una función en sí misma, la cual provee información relativa al fenómeno que está representando, enriqueciendo así la significación e interpretación del mismo (Lara, 2007).

REFERENCIAS

Castañeda, P., Quintero, A. y Chávez, P. (2007). *Experiencia en el uso del asistente matemático derive, en la solución de problemas físicos y/o geométricos*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20.

Dolores, C. (2007). *Tipos de representaciones gráficas sobre la rapidez de la variación*. Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Hughes-Hallet, D. y Gleason, A. (2005) *Cálculo*. México: Editorial CECSA

Lara, A. y Cordero, F. (2007). *Categorías de uso de la gráfica en ingeniería*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20.

Lara, G., Parra, T., Palacios, J. y Briceño, E. (2007). *La graficación un medio para construir conocimiento*. Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Ordóñez, A. y Buendía G. (2007). *Aspectos socioepistemológicos de la relación $f - f'$ en un contexto periódico*. Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Ordóñez, A. y Buendía, G. (2006). *Exploraciones de la relación $f - f'$ en contextos*. X Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2006). *Pensamiento y lenguaje variacional: Una aplicación al estudio de la derivada*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19.

Sánchez-Matamoros, G., García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada*. Enseñanza de las Ciencias 24(1).

ANEXO 1

CUESTIONARIO PRELIMINAR

Matricula___________________

Contesta las siguientes preguntas de la manera más extensa posible.

a. ¿Sabes calcular derivadas?

b. ¿Que significa calcular la derivada de una función?

c. ¿Como se puede calcular la derivada de una función?

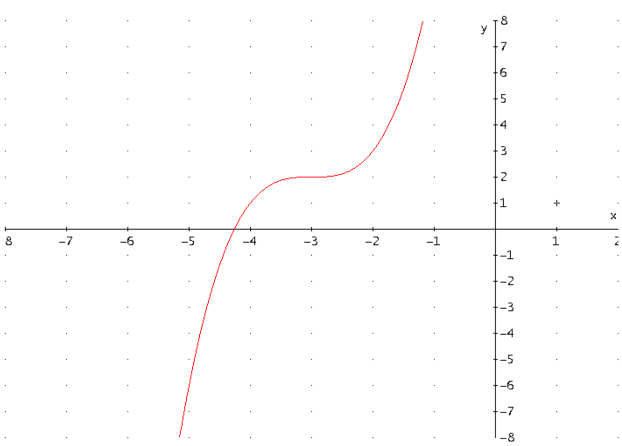
d. ¿Hay alguna restricción para que una función sea derivable?

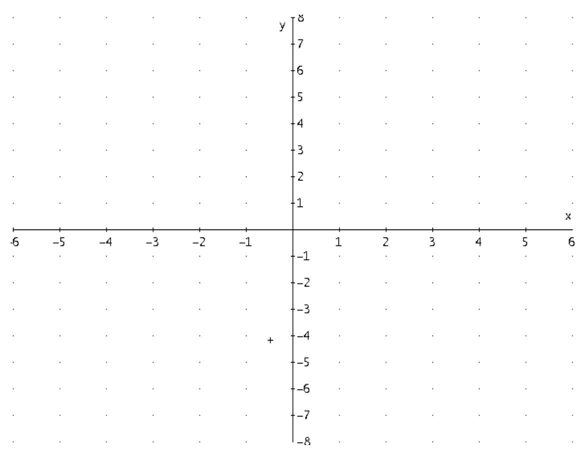
e. ¿Como es la grafica de la función derivada?

f. Deriva las siguientes funciones:

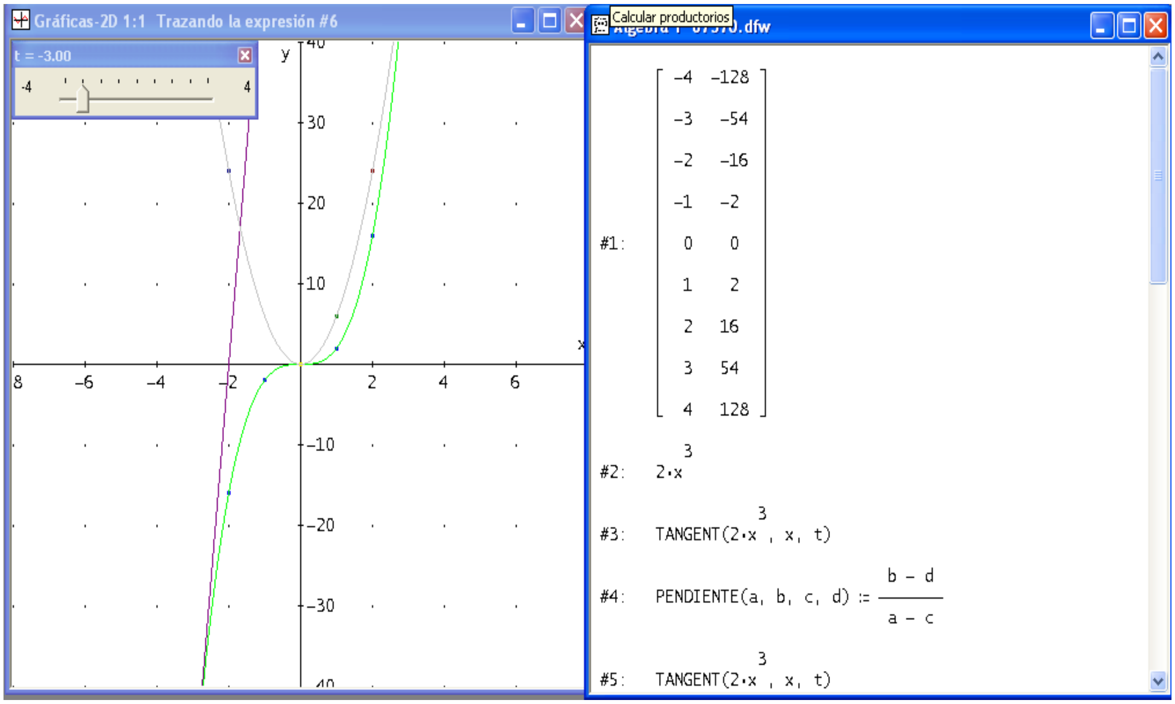
- $f(x) = x^2$
- $g(m) = 2m + 4$
- $h(t) = \dfrac{6t^3 + 6t}{t - 1}$

g. Suponga que el siguiente bosquejo representa la grafica de una función f. Construya con estos datos un bosquejo de la grafica de la primera derivada de f.





ANEXO 2


Gráficas-2D 1:1 Trazando la expresión #6
t = -3.00
Calcular productorios
.dfw
#1: [-4 -128; -3 -54; -2 -16; -1 -2; 0 0; 1 2; 2 16; 3 54; 4 128]
#2: 2·x^3
#3: TANGENT(2·x^3, x, t)
#4: PENDIENTE(a, b, c, d) := (b - d)/(a - c)
#5: TANGENT(2·x^3, x, t)

ANEXO 3

DE LA GRAFICA DE LA FUNCION A LA GRAFICA DE LA DERIVADA.

MATRICULA_____________

INSTRUCCIONES GENERALES: En las siguientes figuras se presentan las graficas de tres funciones diferentes, a partir de estas graficas haga un bosquejo de la grafica de la primera derivada para cada una de las funciones. Justifique todas sus respuestas y muestre todo su trabajo.

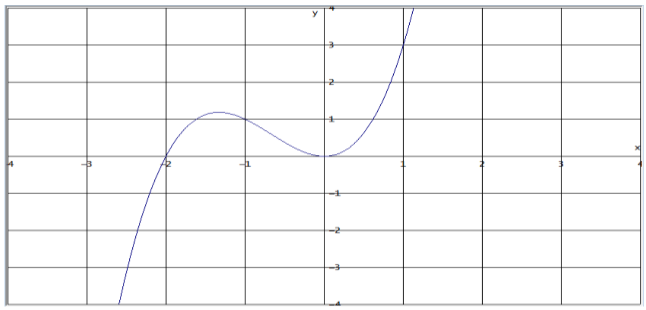


FIGURA 1

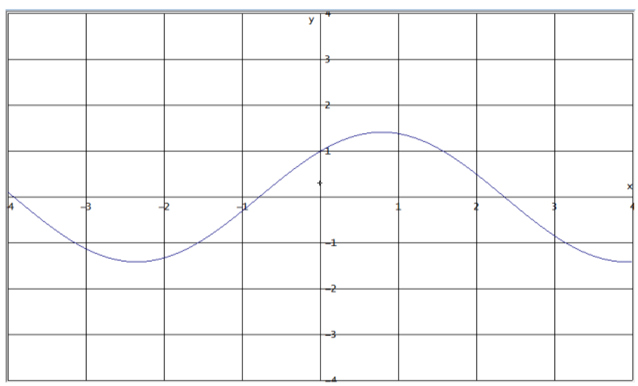


FIGURA 2

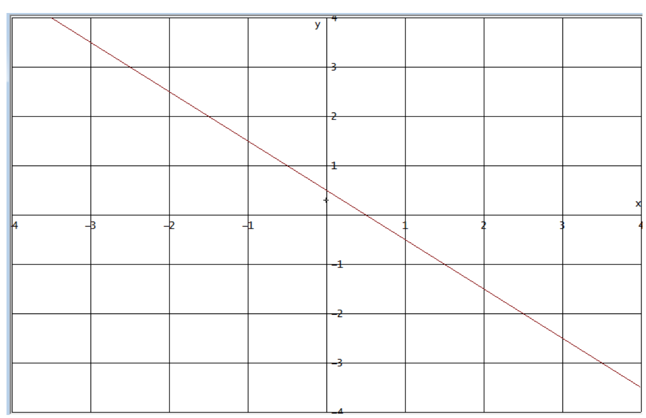


FIGURA 3