Métodos de escala en la física y biología

Sergio Terrazas[1], Luis Leobardo Alfaro[1], Juan Ernesto Chávez Pierce[1]

ESCALANDO LAS ALTURAS

¿Cúanto costaría construir una casa de tamaño doble de otra ya construida?

¿Qué tanto más rápido viajará un carro si la capacidad de su motor se triplica, y qué tanto más combustible quemará?

Si un reactor químico se reduce en tamaño a la mitad, ¿qué tanto más rápido tendrá lugar la reacción química?

Si una gacela adulta tiene cuatro veces el tamaño de su cría, ¿qué tanto más alto puede saltar y qué tanto más rápido puede correr?

Preguntas como éstas, acerca de la relación entre tamaño y una propiedad de interés (usualmente física), son cuestiones de escala. Estas cuestiones son frecuentemente difíciles de resolver, ya que involucran las interacciones de muchos mecanismos complejos, algunos de los cuales son entendidos de una manera imperfecta.

Cuando son importantes, como en economía e ingeniería, podría ser de vital importancia darles respuestas, aunque sean aproximadas.

El poder de la utilidad de los métodos de escala en que éstos pueden proveer los resultados aproximados deseados (aún si los mecanismos detallados son desconocidos) con un minimo de esfuerzo analítico y numérico.

En casos simples, las relaciones físicas pueden ser conocidas, y entonces los métodos de escala pueden producir respuestas que son, en principio, exactas.

En otros casos, puede ser que se hayan hecho observaciones de algún fenómeno sobre un rango de escalas, y el objetivo es encontrar el mecanismo físico que ésta detrás de dichas observaciones.

Los métodos de escala pueden ser usados con frecuencia para rechazar inmediatamente varias hipótesis que no estén de acuerdo con las observaciones, pero que no pueden ser usados para escoger entre diferentes hipótesis que comparten el mismo comportamiento de escala. En resumen, los métodos de escala pueden, usualmente, proveer una poderosa penetración dentro de problemas difíciles, pero raramente dan una solución completa al problema.

En esta plática se pretende mostrar, al referirze a un número de diferentes sistemas físicos y biológicos, el poder, y también las limitaciones de algunas de las aplicaciones del método de escalas, incluyendo algo del trabajo que incluye a los fractales.

[1] Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Empezaremos, sin embargo, con un breve repaso de las ideas básicas.

SIMILITUD GEOMÉTRICA Y ESCALAMIENTO

La cantidad de piel en un par de zapatos es evidentemente el dobl que en un solo zapato.

Una relación entre dos cantidades como estas, donde duplicar una cantidad (el número de zapatos) duplica la otra cantidad (la cantidad de piel), es llamada relación lineal, porque una gráfica de una cantidad contra la otra es una línea recta, y es el comportamiento de escala más simple, y probablemente el más común.

La pregunta de exactamente cuanta piel se requiere para cada zapato es mucho más difícil, y no puede ser contestada con ideas de escala solamente.

El escalamiento lineal se encuentra dentro del corazón de la trigonometría.

Si dos figuras geométricas son similares (tienen los mismos ángulos), entonces las longitudes de los lados de las dos figuras están relacionados linealmente.

Entonces, si un par de lados correspondientes tienen longitudes L y $3L$ respectivamente, entonces todos los pares de lados correspondientes estan en la misma razón $(1:3)$.

Una aplicación de este principio es que la longitud que la sombra que produce un poste es proporcional a la sombra que produce un edificio (figura 1).

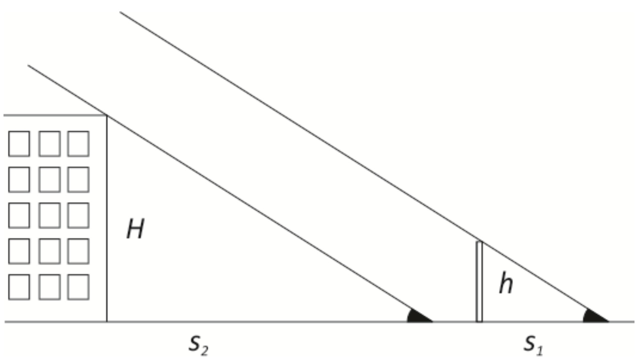

Figura 1. *La longitud de la sombra un edificio (s_2) es propocional a la longitud de la sombra de un poste (s_1).*

Si se conoce que la altura de un poste es 6 m y se mide su sombra, digamos 10 m, y un edificio da una sombra de 100 m, 10 veces más larga que la del poste, entonces su altura sera 10 veces más, es decir, 60 m.

La correspondencia de los dos ángulos de la figura es por supuesto crucial. La longitud de de la sombra cambia con la posición del sol, así que las sombras deben medirse a la misma hora del día.

No todos los comportamientos de escala son lineales. El ejemplo no lineal mas sencillo es posiblemente el del área.

Sabemos que el área de un triángulo es $A = (1/2) base\ x\ altura$. Si la base y la altura de un triángulo son 5 veces más grandes que las del otro, su área sera 25 veces más grande (figura 2).

Este es un ejemplo del principio general de que, para las figuras geométricamente similares cuyas longitudes se escaln como n, sus áreas se escalan como n^2.

La misma idea de escala determina las unidades en la cual se mide el área.

Si la unidad de longitud es el metro, la unidad del área sera el metro-cuadrado (m^2).

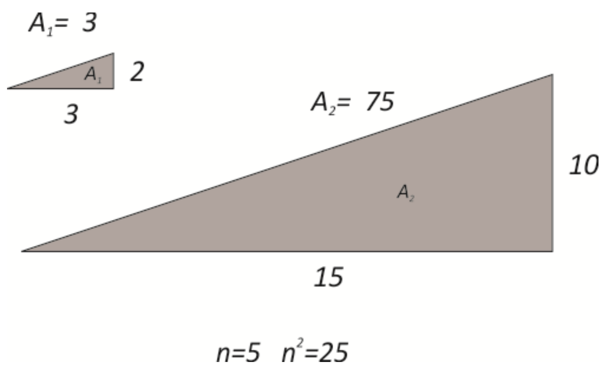

Figura 2. *Las áreas de dos triangulos cuyos lados correspondientes son $\boldsymbol{n}$ veces más grandes el uno del otro, son $\boldsymbol{n^2}$ veces más grandes el uno del otro.*

Si cambiamos la unidad de longitude a centímetro (cien veces más pequeño) entonces la unidad para el área sera el cm^2(10,000 veces más pequeño).

En general, si la unidad de longitud es escrita como $[L]$, entonces para el área sera escrita como $[L^2]$. De la misma manera, el volumen será escrito como $[L^3]$.

Entonces, si el radio y la altura de un tanque cilíndrico son duplicadas, el total del volumen de agua requerido para llenarlo se incrementará por un factor de $2^3 = 8$ (no se necesita saber la fórmula para el volumen del cilindro para saber esta proporción).

Una vieja anécdota que involucra ls ideas de escalamiento geométrico concierne a una fábrica de cerillos, que decidió un día producir cajas de cerillos cuyas dimeniciones eran 50 % más grandes que las de sus compertidores. Después de algunos meses llegaron cientos de reclamos de los clientes. ¿Porqué? (Sugerencia: piense en el nuevo volumen de la caja y la nueva área de la franja de fricción).

ANÁLISIS DIMENSIONAL EN FÍSICA

El esclamiento geométriico simple puede proveer resultados de una gran generalidad y poder cuando es combinado con leyes físicas.

Hemos visto, por ejemplo, que el volume de un sólido (o líquido) de tamaño lineal L, se escala como L^3.

Si el material es de densidad uniforme, entonces, puesto que $masa = densidad \times volumen$, la masa (y por lo tanto el peso) del material se escala como L^3.

De manera general, si el patron de variación de densidad entre piezas geométricamente similares es el mismo, entonces sus masas se escalan como L^3.

Como ejemplo, si un Árbol es 10 veces más alto que un retoño, y son geométricamente similares, el peso que debe soportar su tronco es 1000 veces más grande.

Para un cuerpo de masa m en movimiento, también podemos escalar su energía cinética y su momento. Si está moviendose con una rapidez v, entonces su energía $E = (1/2)mv^2$ y su momento lineal $P = mv$ son proporcionales a su masa m, y por lo tanto se escalan como L^3.

Así que si la relación entre las cantidades físicas es conocida, se puede conocer de inmedato su comportamiento a escala.

Pero aún si las leyes físicas no son conocidas con precisión, las ideas de escalamiento pueden producir atajos dramáticos para identificarlas.

Hay dos principios por debajo de este método de análisis dimensional:

(1) El establecimiento de una relación física no depende del sistema de unidades que se utilicen en particular.

(2) Las unidades de masa [M], longitud [L], y tiempo [T] son fundamentales, en el sentido de que ninguna de ellas puede ser escrito en términos de otras.

El primer principio puede ser ilustrado con la fórmula para la energía cinética

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

en unidades cgs, la masa es medida en gramos, la rapidez en centímetros por segundo y la unidad de energía es el erg donde

$$1\ erg = 1\ g\ cm^2\ s^{-2}$$

En el sistema internacinal (SI), la unidad de energía es el joule donde

$$1\ J = 1\ kg\ m^2\ s^{-2} = 10^7\ erg$$

En general, la unidad de energía es $[M][L^2][T^{-2}]$, o también escribmos la unidad de energía como ML^2T^{-2}.

Cuando un número de cantidades cuyas unidades son conocidas y que se supone que entran en una relación física, pero se desconoce su relación precisa, los principios mencionados pueden muy seguido dar un atajo al escalamiento en la respuesta.

Consideren, por ejemplo, un cuerpo de densidad uniforme ρ y tamaño lineal L, viajando con una rapidez v.

Si saemos que su energía tiene dimensiones ML^2T^{-2}, y hacemos una hipótesis inteligente de que su energía depende únicamente de la densidad ρ (dimensiones ML^{-3}), tamaño lineal (dimensión L), y rapidez v (LT^{-1}), entonces podemos escribir

$$Energía = k\rho^x L^y v^z$$

donde k,x,y, y z son números desconocidos sin dimensión.

En términos de las unidades del problema, tenemos,

$$ML^2T^{-2} = k(ML^{-3})^x(L)^y(LT^{-1})^z$$

y puesto que las unidades M, L, y T son fundamentals, podemos igualar las potencias de M, L, y T en ambos lados, para obtener

$$1 = x$$
$$2 = -3x + y + z$$
$$-2 = -z$$

donde $x = 1$, $y = 3$, y $z = 2$. Finalmente tenemos

$$Energía = k\rho L^3 v^2$$

Por lo anterior, se derivo el resultado de que la energía cinética se escala como L^3, aunque la constante de proporcionalidad k (que es $1/2$) no pudo ser obtenida por este método. En el análisis anterior sabíamos la respuesta por adelantado, pero hay muchos otros casos en los que hay que determinar el valor de k.

Esta técnica es utilizada con frecuencia para analizar, por ejemplo, el flujo de fluidos.

Las propiedades relevantes de un fluido para determiner la fuerza de fricción, o la fuerza de arrastre aerodinámica o hidrodinámica sobre un obstáculo (el viento sobre un edificio o el agua sobre un submarino) son, la densidad del fluido ρ (puesto que cuanto más "pesado" sea el fluido que hay que "empujar" fuera del camino, mayor será el arrastre) y la viscosidad μ. Lla viscosidad es una medida de que tan "pegajoso" es el fluido (alta para la miel y baja para el aire) y determina las fuerzas de fricción entre capas de fluido deslizantes.

Cuando una hoja de papel se desliza sobre una mesa sobre un colchón de aire de grosor d, digamos, la fuerza de fricción experimentada por la hoja de papel, se encuentra experimentalmente, es directamente proporcional a la viscosidad del aire y al área y rapidez del papel, pero inversamente proporcional a la d (entre más delgado sea el colchón de aire, más grande la fuerza de fricción). Puesto que la fuerza tiene dimensiones MLT^{-2}, se obtiene por el método del ejemplo anterior que la viscosidad tiene dimensiones de $ML^{-1}T^{-1}$.

Consideremos entonces el problema de diseño de cómo el arrastre aerodinámico sobre un automóvil de un tamaño dado, moviéndose con rapidez v se escala con su dimensión lineal L.

Si suponemos que a altas velocidades, la viscosidad del aire es irrelevante, entonces la fuerza de arrastre puede depender únicamente de su dimensión lineal L, la rapidez v y la densidad del aire ρ.

Entonces la única ley de fuerza dimensionalmente consistente, de la forma

$$Arrastre = k\rho L^2 v^2$$

El coeficiente de arrastre k no está determinado, y es de hecho mucho muy difícil de calcular para una silueta dada del automóvil, pero el resultado que el arrastre se escala como L^2 es inmediato.

Los fabricantes de automóviles hacen su publicidad de que mediante un diseño especial, el coeficiente de arrastre del auto es muy bajo (alrededor de 0.3).

Enseguida, consideremos el arrastre sobre u pequeño balín de balero lanzado hacia un bote grande lleno de un aceite muy viscoso. Los métodos de escala muestran que la única ley de fuer posible es

$$Arrastre = k\mu vL$$

en este caso, un cálculo detallado, que nvolucra la solución de una ecuación diferencial parcial, arroja k como 6π, un resultado conocido como ley de Stokes.

Debido a que hay tres unidades mecánicas fundamentales, el procedimiento del análisis dimensional descrito será exitoso, en general, únicamente cuando la variable dependiente (digmos, la energía) depende de las tres, omenos, varibles independientes, porque entonces tendremos tres ecuaciones en tres incógnitas (x, y, z).

Sin embargo, comúnmente, no nos encontramos en esta afortunada posición: seguido hay cuatro o más variables que tenemos que tomar en cuenta.

Un ejemplo que comúnmente se ve a la ligera en los libros de texto es el llamado "péndulo simple" (figura 3).

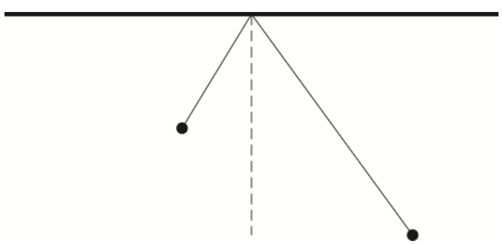

Figura 3. *Péndulo simple.*

Queremos saber cómo se escala el período P del péndulo con la longitud L.

El período podría, presumiblemente, depender únicamente de la longitud L, la masa m de la bola, la amplitud a de la oscilación, y la aceleración g de la gravedad.

así que escribiríamos

$$P = kL^x m^y a^z g^u$$

entonces, igualando potencias de M, L, y T encontramos que

$$\begin{gathered} 0 = y \\ 0 = x + u + z \\ 1 = -2u \end{gathered}$$

obteniendo

$$\begin{gathered} u = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \\ x + z = \frac{1}{2} \end{gathered}$$

entonces vemos que las variables x, z no pueden ser determinadas de manera única.

Nuestra ley de escalamiento es entonces

$$P = k\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}\left(\frac{a}{L}\right)^{z}$$

Puesto que cualquier valor de z cumple con el análisis, podemos escribir este resultado en una forma más general, como

$$P = k\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2} \times función\ de\ \left(\frac{a}{L}\right)$$

en la cual esta función no puede ser determinada por los métodos de escala.

A primera vista, parece que el método ha fallado. No hemos sido capaces de desembrollar completamente la dependencia de P en L porque la amplitud a todavía aparece. Sin embargo, sí podemos concluir, que para un ángulo máximo de oscilación, a/L fijo, P se escala como $L^{1/2}$

Más aún, aunque nuestra solución no es completa, todavía representa un avance mayor, en que ha reducido de tres (L, m, a), a una, a/L, el número de variables independientes que necesitamos considerar (g es efectivamente constante)

Entonces, como en un experimento que quiere medir P, usted no debería variar m, L y a separadamente, sino fijar L y m y variar a. Entonces usted mediría la función de a/L y deducir P para todas las opciones de L y m.

Similarmente, el trabajo comptacional ha sido reducido mucho.

Si el periodo puede ser calculado para todos los valores del ángulo, es decir, todos los valores posibles del grupo adimensional (a/L), entonces la solución completa es ya conocida.

De hecho, para todo el rango disponible de 0 a1 para a/L la función de a/L varía únicamente muy poco por ciento del valor 2π.

FRACTALES

Hemos visto que, mientras que las dimensiones lineales se escalan como L, las superfices se escalan como L^2 y los volúmenes como L^3. También vimos cómo propiedades físicas, como el período del péndulo, se escalan como una potencia fraccional $(1/2)$ de L.

Una pregunta natural (puramente matemática) es si pueden existir objetos geométricos cuya dmensión sea entre 1 y 2.

Un objeto más “denso” que una linea, pero “menos denso” que una superficie.

Sorprendentemente, es probable, tales objetos de dimensión fraccionaria (llamados fractales) pueden ser construidos.

Más sorprendentemente, estos objetos son en el presente el foco de mucha atención física.

Un ejemplo matemático simple de un fractal es el llamado “colador de Sierpinski” o también el “empaque de Sierpinski” el cual mostramos enseguida, y que se construye como sigue:

Se bisecan los lados ABC de un triángulo equilátero y se remueve el triángulo central que se forma (figura 4).

Quedan tres triángulos más pequeños, como el AB'C', y a cada uno de estos se les quita el triángulo central para dar 9 triángulos todavía más pequeños (figura 5).

Cuando este proceso es llevado al infinito, queda una estructura muy “hilachienta” llenada con una infinidad de agujeros (figuras 6 y 7).

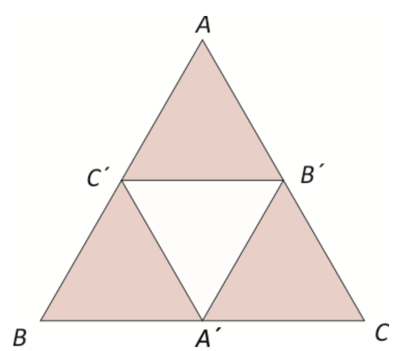

Figura 4.*Colador de Sierpinski, primera iteración.*

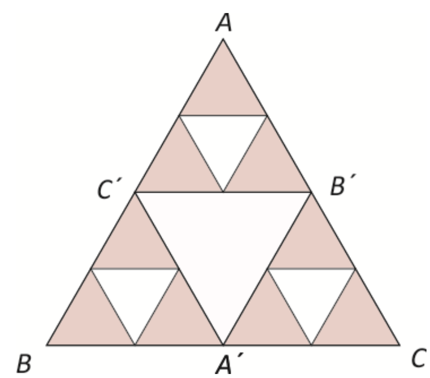

Figura 5.*Colador de Sierpinski, segunda iteración.*

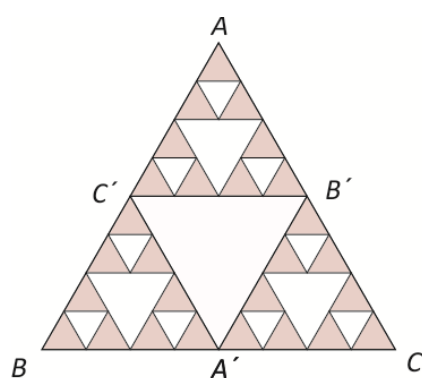

Figura 6.*Colador de Sierpinski, tercera iteración.*

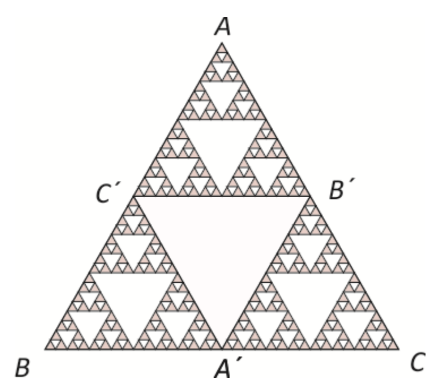

Figura 7.*Colador de Sierpinski, cuarta iteración.*

La estructura que queda es auto similar, en el sentido de que el triángulo AB'C' se ve idéntico con el triángulo original ABC, y esta similaridad estructural se repite a escalas cada vez más pequeñas de longitud.

Suponiendo que fuera posible construir tal empaque, hecho de una hoja de metal de densidad y grosor uniformes, ¿cómo se escalaría su peso con L?

El peso es proporcional al área del empaque, así que si no hubiera agujeros sería proporcional al área del triángulo y se escalaría como L^2.

Con los agujeros, el peso de ABC es sólo tres veces el peso de $AB'C'$. Si asumimos tentativamente que

$$W = kL^d$$

para alguna constante d, la "dimensión fraccional" del empaque (de lado L), entonces, puesto que $AB'C'$ es un triángulo similar de lado $L/2$, debemos tener que

$$W = kL^d = 3k\left(\frac{L}{2}\right)^d$$

de donde obtenemos que

$$2^d = 3, \Longrightarrow d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58$$

Entonces este es un objeto de dimensión no sólo no entera, sino irracional.

Operaciones similares, de "hacer agujeros" nos permiten construir objetos con dimensiones entre 0 y 1 (cortando porciones de una línea) o de dimensiones entre 2 y 3 (haciendo agujeros en un sólido).

Estructuras raras como estas no pueden ser caracterizadas por una sola escala de longitud L: ellas tienen estructura a todas las escalas de longitud menores a L.

¿Tienen estas estructuras aparentemente abstractas algún paralelo en la naturaleza?

Consideremos la tarea (aparentemente razonable a primera vista) de medir la costa de algún país.

Podemos imaginarnos a un diligente geógrafo haciendo un mapa en escala 1:10,000 midiendo la costa con una regla de un metro.

Desafortunadamente, sin embargo, esto no producirá la "verdadera respuesta", porque las pequeñas entradas en la costa no aparecerían en ese mapa.

Un mapa con resolución mayor ciertamente daría un resultado mayor.

Un observador cuidadoso en la playa encontraría detalles todavía más finos, como rocas individuales, y ultimadamente granos de arena, y llegaría a una estimación todavía mayor de la longitud de la costa.

En resumen, la respuesta dependería de la escala de longitud de resolución escogida, y es esta presencia de estructura a todas las escalas, que es una característica cualitativa de todas las estructuras fractales.

Los fractales han sido vistos cuantitativamente, y sus dimensiones fractales medidas, para un número de procesos de agregación.

Pequeñas partículas suspendidas en un fluido son constantemente golpeadas por el constante movimiento aleatorio de las moléculas del fluido (movimiento Browniano) y ocacionalmente chocan entre ellas.

Si las fuerzas de atracción entre ellas quedan unidas y forman un agregado, el cual después agrega más partículas conforme transcurre el tiempo, cada una pegándose a lo que es en ese instante la superficie exterior del agregado.

Este proceso de agregación limitada por difusión (diffusion-limited aggregation) resulta característicamente en la formación de grandes cúmulos (clusters) abiertos, llenos de agujeros, con una dimensión fractal de alrededor de 1.7.

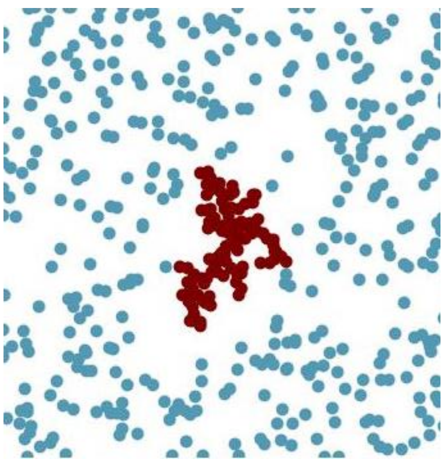

Figura 8. *Agregación limitada por difusión (diffusion-limited aggregation), Hiroki Sayama, Wolfram Demonstrations Proyect.*

Estructuras fractales similares han sido vistas en fenómenos tan diversos como relámpagos eléctricos, electroquímica y polímeros.

Un caso de interés económico es la extracción de petróleo. El petróleo está atrapado a veces en intersticios dentro de rocas porosas.

La geometría de estas distribuciones porosas demasiado compleja, pero también se ajusta a una estructura fractal sobre una amplia gama de escalas de longitud.

La tarea de examinar la dinámica del petróleo atrapado, y por lo tanto la comparación de la eficiencia relativa de diferentes técnicas de extracción es objeto de mucha investigación.

CONCLUSIÓN

Enfrentado con el análisis de un problema nuevo, o no muy familiar, el científico o el ingeniero prudente buscarán identificar los ingredientes físicos importantes que necesita incorporar en cualquier modelo matemático.

Hemos visto cómo el proceso de investigar el comportamiento de escala, junto con el análisis dimensional, provee el requerido “se me hace que” y la complejidad de los cálculos y la falta de datos usualmente significan en la práctica que un análisis complejo no se justifica.

REFERENCIAS

Institute of Mathematics and its applications (S.F.). *New applications of Mathematics*. En: http://www.ima.org.uk/.

Wolfram Demonstrations Proyect (S.F.). *Diffusion-Limited Aggregation: A Real-Time Agent-Based Simulation*. En: http://demonstrations.wolfram.com/DiffusionLimitedAggregationARealTimeAgentBasedSimulation/.