

Solución numérica de la ecuación de onda en medios heterogéneos y aleatorios en dos dimensiones

Numerical solution of the wave equation in heterogeneous and random media in two dimensions

O. Andrés Cuervo^a

Resumen. Cuando queremos modelar problemas físicos por medio de ecuaciones diferenciales, algunas aplicaciones no pueden ser descritas de forma determinística debido a las propiedades del medio. Entonces utilizamos herramientas de la teoría de probabilidad en las ecuaciones diferenciales parciales para dar una mejor predicción al comportamiento de los coeficientes de las ecuaciones. En este documento, estudiamos la ecuación de onda en dos dimensiones con coeficientes aleatorios que es un tipo de ecuación diferencial parcial hiperbólica, de la cual realizamos unas aproximaciones para obtener algunas estadísticas importantes del modelo. Como primer paso, mostramos el método KL para dar una aproximación del coeficiente que representa la velocidad de propagación de la onda. Es de interés conocer el valor esperado de las soluciones de la ecuación, calculada por medio del método Monte Carlo y como herramienta numérica utilizamos el método de elementos finitos combinado con el de diferencias finitas en la discretización temporal de la ecuación. Se muestran resultados numéricos del problema con distintos parámetros y algunos estudios de error para mostrar la convergencia de los métodos mostrados.

Palabras claves: Ecuaciones diferenciales parciales en medios aleatorios, Método de los elementos finitos, Expansión de Karhunen-Loève.

Abstract. When we want to simulate physical problems by means of differential equations, some applications cannot be described in a deterministic way because of the properties of the environment. For this reason we use tools of the probability theory in the partial differential equations to give a better prediction of the behavior of the coefficients of the equations. In this document, we study the wave equation in two dimensions with random coefficients which is a type of hyperbolic partial differential equation, from which we perform some approximations to get some important statistics of the model. As a first step, we show the KL method to give an approximation of the coefficient that represents the propagation speed of the wave. It is interesting to know the expected value of the solutions of the equation, calculated by the Monte Carlo method and as a numerical tool we use the finite element method combined

¹Departamento de Matemática, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

^aoacuervof@unal.edu.co

with the finite differences method in the temporary approximation of the equation. Numerical results of the problem are shown with different parameters and some error studies to show the effectiveness of the methods described.

Keywords: Partial differential equations in random media, Finite element method, Karhunen-Loève expansion.

Mathematics Subject Classification: 35L05, 32W50.

Recibido: noviembre de 2018

Aceptado: abril de 2019

1. Introducción

Cuando queremos estudiar problemas modelados por ecuaciones diferenciales parciales sobre dominios complejos, en algunas ocasiones se vuelve muy difícil o hasta imposible encontrar la solución de dichas ecuaciones. Entonces podemos encontrar una aproximación de la solución por medio métodos numéricos con los cuales se puede hacer un estudio de error para asegurar que la aproximación es lo suficientemente buena. Ahora, cuando los coeficientes de las ecuaciones diferenciales sufren grandes fluctuaciones, la teoría de ecuaciones comunes se queda corta ya que no se puede predecir bien su comportamiento. Entonces, utilizando herramientas de la teoría de probabilidad, podemos estudiar las ecuaciones diferenciales parciales pero donde sus coeficientes tienen una dependencia aleatoria para modelar con mayor certeza el comportamiento del fenómeno, hallando las principales estadísticas del problema.

En este trabajo, queremos dar solución a la ecuación de onda que es de vital importancia en problemas de la actualidad, dentro de las que se destacan los problemas de geofísica y electromagnetismo, entre otras; ver [4], [11], [9], [2], y referencias allí citadas. Este trabajo se presenta como la continuación del estudio mostrado en [3] donde se proponen las herramientas para solucionar de forma aproximada la ecuación de onda con coeficiente aleatorio en una dimensión espacial. Allí, se hace una introducción del método de las herramientas de probabilidad y métodos numéricos para dicha aproximación. En los métodos numéricos, se destaca lo estudiado para el método de elementos finitos en una dimensión donde introducimos los conceptos, definiendo los espacios y formulaciones adecuadas para el desarrollo del mismo. En el presente trabajo, extendemos dichas ideas para dos dimensiones, definiendo nuevamente los espacios adecuados con sus respectivas funciones base, pero en este caso deberán estar definidas sobre un dominio bidimensional con ciertas condiciones adecuadas.

Como caso de estudio, aproximamos numéricamente el valor esperado $E(u(x, t, \omega)) = \bar{u}(x, t)$ de la solución de la ecuación de onda en una dimensión para medios heterogéneos y aleatorios, es decir, donde la velocidad de propagación no es constante ya que varía su valor en el espacio y su comportamiento

depende de un coeficiente estocástico. Dicha ecuación la podemos definir como ecuación diferencial parcial hiperbólica

$$u_{tt}(x, t, \omega) - \nabla_x \cdot [\kappa(x, \omega) \nabla_x u(x, t, \omega)] = f(x, t, \omega) \quad (1)$$

donde $u(x, \omega, t)$ es una función que depende del espacio $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, el tiempo $t \in [0, T]$ y el comportamiento del coeficiente con dependencia aleatoria $\kappa(x, \omega)$ que representa la velocidad de propagación de la onda y que describe las propiedades del medio [8]. El coeficiente $\kappa(x, \omega)$ depende del valor que toma una sucesión de variables aleatorias $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ de la siguiente forma

$$\kappa(x, \omega) := \kappa(x, Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) Y_i(\omega), \quad (2)$$

donde las variables aleatorias $Y_i := Y_i(\omega)$ son independientes con distribución normal estandar y las funciones deterministas a_i están definidas en el mismo dominio espacial de u . Dichas variables aleatorias tienen funciones de distribución de probabilidad que son calculadas con las medidas obtenidas a partir de las muestras, describiendo por medio de estas variables aleatorias las propiedades del suelo. Según [1], existen dos distribuciones de probabilidad que se ajustan a las variables físico-químicas del terreno. La distribución normal para medidas de humedad y densidad aparente, y la distribución log-normal que modela la conductividad hidráulica y la distribución de sedimentos, entre otras. Finalmente, f será la fuerza externa aplicada que determina el comportamiento de la onda, que tiene los mismos dominios de u y que de forma general también va a depender de un coeficiente aleatorio.

En lo que sigue, el documento se desarrollará así: en la siguiente sección se presentan los detalles de la expansión en serie de potencias del coeficiente mostrado en (2) y mostrar un método de aproximación del valor esperado $\bar{u}(x, t)$. Seguido damos las definiciones y herramientas básicas para la solución de la ecuación (1) por medio del método de los elementos finitos para posteriormente definir el problema en sus diferentes formulaciones que nos permiten realizar la implementación computacional. En la última sección se mostrarán los resultados numéricos del problema.

2. Herramientas de Probabilidad

El objetivo de esta sección es mostrar como la solución u se puede ver como un proceso estocástico, para el cual proporcionamos una herramienta de aproximación del valor esperado de la solución, llamado el método Monte Carlo. Además, definimos un método estadístico para calcular el coeficiente $c(x, \omega)$ como una expansión en serie de funciones deterministas (funciones de las cuales se conoce el comportamiento exacto) acompañadas de unos respectivos coeficientes aleatorios. La idea del método es definir el coeficiente $c(x, \omega)$ como un proceso estocástico al cual asociamos una función de covarianza que va a

caracterizar las propiedades del medio poroso en donde se desarrollen los problemas. En [1] se clasifican las variables aleatorias mostradas en (2) que están asociadas a las muestras tomadas sobre el suelo en estudio. Allí, llaman las variables estacionarias cuando la función de covarianza del proceso estocástico depende directamente de la distancia media entre los poros de una muestra. Esta expansión del coeficiente c es llamada la expansión de Karhunen-Loève (KL).

2.1. Expansión de Karhunen-Loève

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, un kernel $A : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice definido positivo en Ω si para cada sucesión finita de puntos $\{x_i\}_{i=1}^N \subseteq \Omega$ y correspondiente sucesión de coeficientes $\{\lambda_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathbb{R}$ tenemos,

$$\sum_{n,m=1}^N \lambda_n \lambda_m A(x_n, x_m) \geq 0.$$

Además, el kernel se llama simétrico si $A(x, y) = A(y, x)$ para todos $x, y \in \Omega$. Entonces, si consideramos el coeficiente $c(x, \omega)$ y definimos el proceso estocástico $Z_x = c(x, \omega) - \bar{c}(x)$, siendo \bar{c} el valor esperado de $c(\cdot, \omega)$, entonces definimos la función de covarianza

$$\text{Cov}(x, y) = E[Z_x Z_y], \quad (3)$$

que podemos ver como un kernel y pedir que sea definido positivo y simétrico para aplicar los resultados mostrados a continuación, por lo que restringimos las funciones de covarianza a ciertas funciones que cumplan las condiciones pedidas.

Dado el Kernel Cov, definimos el operador $\mathbb{A} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ por

$$\mathbb{A}(f) = \int_{\Omega} \text{Cov}(x, y) f(x) dx,$$

donde $L^2(\Omega)$ es el espacio de funciones cuadrado integrables con dominio Ω y deducimos que si la función Cov es continua, entonces $\mathbb{A}(f)$ es una función continua y además el operador \mathbb{A} es también continuo. Ahora, por el *teorema espectral para operadores compactos* aseguramos la existencia de $\{\varphi_i\}_{i \in I} \in L^2(\Omega)$ eigenfunciones y $\{\mu_i\}_{i \in I}$ los respectivos eigenvalores del operador \mathbb{A} , es decir las funciones que cumplen la igualdad

$$\mathbb{A}(\varphi_i) = \mu_i \varphi_i,$$

y que formarán una base ortonormal del espacio $L^2(\Omega)$. Entonces el *teorema de Hilbert-Schmidt* [10], establece que si el Kernel Cov es simétrico este cumple la expansión en serie

$$\text{Cov}(x, y) = \sum_i \mu_i \varphi_i(x) \varphi_i(y). \quad (4)$$

Por el *teorema de Mercer* se tiene que si el Kernel Cov es simétrico entonces además es definido positivo y por lo tanto los eigenvalores $\{\mu_i\}_{i \in I}$ son no negativos y la expansión (4) tiene convergencia uniforme.

Dado $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ conjunto de variables aleatorias con distribución normal estandar e independientes entre sí, definimos

$$c(x, \omega) = \bar{c}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \varphi_i(x) Y_i(\omega), \tag{5}$$

llamada la expansión de Karhunen-Loève para el proceso estocástico definido por el coeficiente c . Observamos que para el proceso $Z_x = c(x, \omega) - \bar{c}(x)$ por la linealidad del valor esperado, asumiendo que la serie (5) converge y por definición de las variables aleatorias Y_i , la función de covarianza

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= E[Z_x(\omega)Z_y(\omega)] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \varphi_i(x) Y_i(\omega) \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu_j} \varphi_j(y) Y_j(\omega) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j} \varphi_i(x) \varphi_j(y) E[Y_i(\omega)Y_j(\omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \varphi_i(x) \varphi_i(y), \end{aligned}$$

cumpliendo la expansión mostrada en (4) y que bajo las condiciones pedidas, tendrá convergencia uniforme. Esto muestra que el proceso estocástico Z_x tiene la covarianza deseada y encontramos una forma de definir el proceso por medio de su función de covarianza asociada.

Para efectos numéricos, definimos la expansión de Karhunen-Loève truncada en K términos para el proceso estocástico, por

$$c(x, \omega) \approx \bar{c}(x) + \sum_{i=1}^K \sqrt{\mu_i} \varphi_i(x) Y_i(\omega), \tag{6}$$

donde φ_i son las eigenfunciones asociadas al operador \mathbb{A} definido por la función de covarianza $\text{Cov}(x, y)$.

2.2. Método Monte Carlo

Para la solución de (1) deseamos encontrar el valor esperado $\bar{u}(x, t)$ de las soluciones del problema. De forma general, dado un proceso estocástico

$\{Z_x\}_{x \in S}$ definido en un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, P)$, la función de medias $\mu_x = E[u]$ es desconocida, pero se puede conocer el comportamiento aproximado de los datos por resultados estadísticos, como lo es el método Monte Carlo que sirve para dar solución a problemas complejos por medio de métodos numéricos que van a depender de factores aleatorios. La base principal del método Monte Carlo es la generación de números aleatorios para calcular probabilidades, o en nuestro caso los valores esperados. Existen diversas y complejas formas para generar dichos números aleatorios que deben estar en un conjunto estadístico determinado [7].

Dada una variable aleatoria $Y(\omega)$ definida en un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, P)$ y cuya función de densidad es f_Y , sabemos que para un función g con dominio el conjunto de estados de la variable aleatoria Y se cumple, por la regla del valor esperado [5] que la esperanza de la variable aleatoria $Z = g(Y)$ se puede ver como

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) f_Y(\omega) d\omega.$$

Con el método Monte Carlo podemos aproximar el valor de la integral tomando R valores o realizaciones de Y , $\{Y(\omega_i) = y_i\}_{i=1}^R$ y calculando

$$E[g(Y)] \approx \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R g(y_i). \quad (7)$$

Aplicando lo anterior al proceso estocástico de las soluciones $Z_x(\omega)$, tenemos para t fijo

$$\bar{u}(x, t) = E[u(x, t, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t, y) f_Y(y) dy \quad (8)$$

y utilizando (7), tenemos la aproximación

$$\bar{u}(x, t) \approx \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R u(x, t, y_i)$$

donde aproximamos el valor de la integral (8) calculando el promedio de las soluciones $u(x, t, y_i)$ de R realizaciones del problema donde cada coeficiente aleatorio cumple $\kappa(x, \omega_i) := \kappa(x, Y(\omega_i)) = \kappa(x, y_i)$.

3. El Método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos halla aproximaciones numéricas a la solución de ecuaciones diferenciales parciales asociadas a problemas físicos en dominios complejos. El método consiste en tres pasos principales: primero, reescribimos el problema en forma variacional, generalmente multiplicando la ecuación diferencial por una función llamada función de prueba e integrando. Segundo, descomponemos el dominio de la ecuación diferencial en subdominios

que no se intersectan, llamados elementos finitos para definir unas funciones base con las cuales se obtiene la aproximación de la solución de la ecuación. El espacio que se define a partir de las funciones base es llamado el espacio de elementos finitos. Finalmente, en el espacio de dimensión finita obtenemos un sistema finito de ecuaciones cuya solución será la proyección del problema variacional en el espacio de elementos finitos y que será la aproximación de la solución del problema original. Utilizamos el método de elementos finitos para aproximar la solución de la ecuación de onda mostrada en (1) que es una ecuación diferencial parcial hiperbólica con coeficiente aleatorio.

A continuación, definimos los espacios de funciones que se utilizan en el método para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en dimensión dos. Decimos que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un *dominio* si es abierto y convexo, y que es un *dominio poligonal* si su frontera $\partial\Omega$ es un polígono. Por simplicidad, vamos a trabajar con dominios poligonales, más específicamente con dominios con frontera cuadrados o rectángulos. Generalmente, al utilizar el método de elementos finitos sobre dominios con geometría compleja con frontera que sea una curva suave, se hace la aproximación de dicha frontera a un dominio poligonal para simplificar la definición de los espacios, ver [6].

Una partición o *triangulación* \mathcal{T}_h para un dominio poligonal Ω es una subdivisión $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_N\}$ de Ω compuesta por N triángulos los cuales cumplen que $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $i \neq j$,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \bar{T}_i$$

y tales que ningún vértice de algún triángulo T_i vive en el lado de algún otro triángulo T_j , es decir $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j$ es un triángulo, una arista completa o un vértice.

Cada triángulo T_i de la partición \mathcal{T}_h es llamado *elemento* y cada vértice z_k del triángulo es llamado *nodo* de la partición. Supongamos que para los N elementos existen $k = 1, \dots, M$ nodos de la partición. El parámetro h de la partición \mathcal{T}_h está definido por

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$$

donde $\text{diam}(T)$ es la medida del lado más largo del triángulo T . La ubicación de los elementos en la triangulación se puede presentar de manera diversa, como se puede observar en [6], pero para nuestro trabajo tomaremos una triangulación donde el parámetro h es el mismo para todos los elementos del dominio, como observamos en **Figura 1**, donde se muestra para un dominio espacial $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, las triangulaciones para dos cantidades distintas de vértices cuyos elementos se ubican de una manera uniforme.

Si tomamos cierta triangulación \mathcal{T}_h de un dominio poligonal Ω , definimos el espacio de funciones lineales por partes $V^h(\Omega)$ como el conjunto

$$V^h(\Omega) = \{v : v \text{ es continua en } \Omega \text{ y } v|_T \text{ es lineal, para todo } T \in \mathcal{T}_h\},$$

es decir,

$$v|_T = ax + by + c,$$

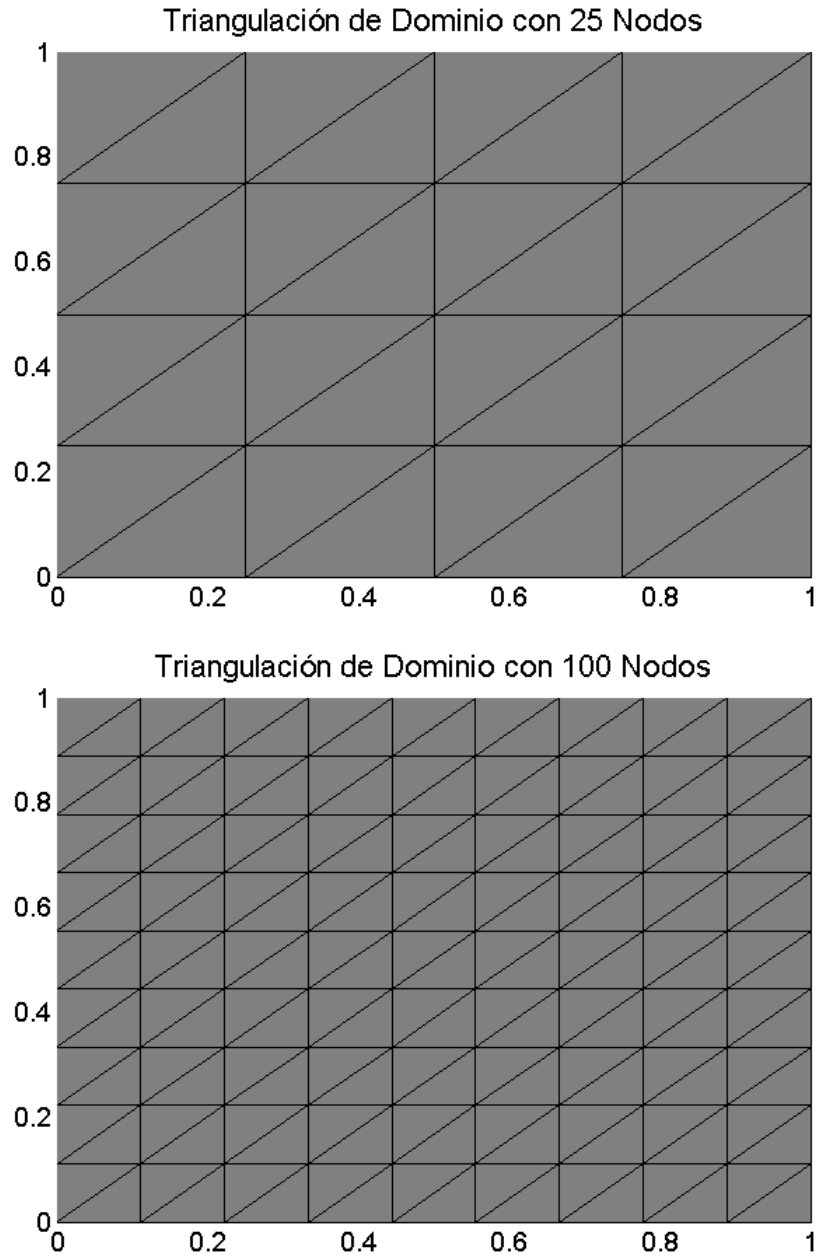


Figura 1: Dos triangulaciones con $M = 25$ y $M = 100$ vértices (respectivamente) sobre el dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son los grados de libertad de la función v con respecto al triángulo $T \in \mathcal{T}_h$. Observamos que podemos caracterizar a cada función $v \in V^h(\Omega)$ por los valores que tome en cada uno de los nodos de la partición, es decir por los valores $v(z_k)$ donde z_k es el vértice de algún triángulo $T \in \mathcal{T}_h$. Entonces, si definimos las funciones

$$\varphi_j(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases} \quad (9)$$

donde $j, k = 1, \dots, M$, formarán una base para un espacio de dimensión finita $V^h(\Omega)$ llamado el espacio de elementos finitos. El comportamiento de las funciones base φ_j es mostrado en la **Figura 2** para una partición de $M = 25$ nodos sobre el dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, cuyo soporte serán los elementos que tienen en común el vértice $j \in \{1, \dots, 25\}$.

Funciones Base en Dimensión Dos

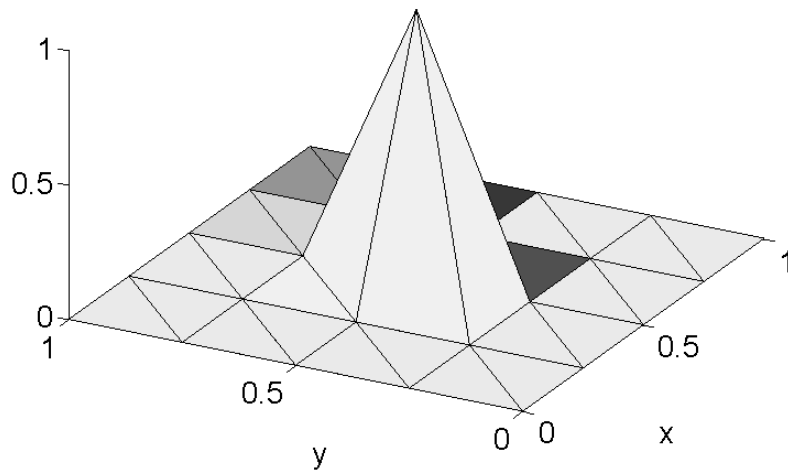


Figura 2: Función base para una triangulación del dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

3.1. Fórmula de Green

Para poder establecer la formulación variacional de la ecuación diferencial, tomamos la ecuación y la multiplicamos por una función de prueba que vive en un espacio de Hilbert y seguido procedemos a integrar. La fórmula de Green es una herramienta del cálculo que nos ayudará en dicho proceso.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado en el plano y si consideramos el campo $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ el cual podemos escribir como $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. La divergencia del campo F está dada por

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}.$$

Además, para una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, notamos los operadores

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad \text{y} \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} n_2 \end{aligned}$$

llamados *gradiente* de f , *Laplaciano* de f y *derivada normal* de f con respecto a la curva frontera $\Gamma = \partial\Omega$, respectivamente. Aquí $n = (n_1, n_2)$ es el vector normal a Γ que apunta hacia el exterior de Ω . El teorema de la divergencia para el campo F , establece que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\Gamma} F \cdot n ds,$$

siendo la integral del lado izquierdo una integral doble sobre el dominio Ω y la integral del lado derecho una integral de línea sobre la curva Γ . Entonces, dadas las funciones $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos los campos vectoriales $F_1(x) = (f(x)g(x), 0)$ y $F_2(x) = (0, f(x)g(x))$, donde

$$\operatorname{div} F_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Entonces, si aplicamos el teorema de la divergencia a los dos campos anteriores, obtenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx + \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} f g n_i ds, \quad (10)$$

para $i = 1, 2$. Luego, si dadas u, v funciones reales definidas en Ω y llamamos $f(x) = u(x)$ y $g(x) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x)$, aplicando (10) con $i = 1$, tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 ds \quad (11)$$

y análogamente, si llamamos $f(x) = u(x)$ y $g(x) = \frac{\partial v}{\partial x_2}(x)$ y aplicando (10) con $i = 2$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 ds. \quad (12)$$

Luego, despejando de (11) y (12), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx + \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx \\ &= \int_{\Gamma} u \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 \right] ds - \int_{\Omega} u \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] dx \end{aligned}$$

y según la notación establecida previamente, tenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\Omega} u \Delta v dx. \tag{13}$$

Esta última ecuación es llamada la *fórmula de Green* o fórmula de integración por partes en dos dimensiones, que nos ayudará a establecer la formulación débil del problema.

4. Formulaciones del Problema

Estudiamos la ecuación de onda con coeficiente aleatorio mostrada en (1) y definida en $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ dominio poligonal, donde $\kappa(x, \omega) = e^{c(x, \omega)}$ siendo c una función suave. Las condición de frontera será Neumann homogénea y como condiciones iniciales tenemos las funciones u_0 y v_0 funciones suaves definidas para el tiempo $t = 0$. Con estas especificaciones, el problema queda establecido por la ecuación

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ u_{tt}(x, t, \omega) - \nabla \cdot [e^{c(x, \omega)} \nabla u(x, t, \omega)] = f(x, t, \omega), & x \in \Omega \\ e^{c(x, \omega)} \nabla u(x, t, \omega) \cdot n = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 & \text{Condición de Frontera,} \\ u(x, 0, \omega) = u_0(x), \quad x \in \Omega, & \text{Posición Inicial,} \\ u_t(x, 0, \omega) = v_0(x), \quad x \in \Omega, & \text{Velocidad Inicial.} \end{cases}$$

donde n es el vector normal en la frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Para considerar la formulación debil del problema tomamos una función de prueba $v \in H^1(\Omega)$, la multiplicamos a la ecuación (1) e integramos sobre Ω , obteniendo

$$\int_{\Omega} v(x) u_{tt}(x, t, \omega) dx - \int_{\Omega} v(x) \nabla \cdot [e^{c(x, \omega)} \nabla u(x, t, \omega)] dx = \int_{\Omega} v(x) f(x, t, \omega) dx. \tag{14}$$

Recordando la fórmula de Green estudiada previamente, establece que dadas g_1 y g_2 funciones reales definidas en Ω , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla g_1 \cdot \nabla g_2 dx &= \int_{\Gamma} g_1 \frac{\partial g_2}{\partial n} ds - \int_{\Omega} g_1 \Delta g_2 dx \\ &= \int_{\Gamma} g_1 \nabla g_2 \cdot n ds - \int_{\Omega} g_1 \nabla \cdot [\nabla g_2] dx, \end{aligned}$$

siendo n el vector normal a ∇g_2 en la frontera de Ω . Entonces, si fijamos los valores de ω , t y al llamar $g_1(x) = v(x)$ y $g_2(x) = e^{c(x,\omega)} \nabla u(x, t, \omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v(x) \nabla \cdot [e^{c(x,\omega)} \nabla u(x, t, \omega)] dx &= - \int_{\Omega} g_1(x) \nabla \cdot [\nabla g_2(x)] dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla g_1(x) \cdot \nabla g_2(x) dx - \int_{\Gamma} g_1(x) \nabla g_2(x) \cdot n ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot [e^{c(x,\omega)} \nabla u(x, t, \omega)] dx \\ &\quad - \int_{\Gamma} v(x) e^{c(x,\omega)} \nabla u(x, t, \omega) \cdot n ds. \end{aligned}$$

Ahora, por la condición de frontera establecida, la integral de línea a través de la frontera de Ω es cero, luego

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v(x) \nabla \cdot [e^{c(x,\omega)} \nabla u(x, t, \omega)] dx &= \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot [e^{c(x,\omega)} \nabla u(x, t, \omega)] dx \\ &= \int_{\Omega} e^{c(x,\omega)} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x, t, \omega) dx. \end{aligned}$$

Así, obtenemos la formulación débil del problema como sigue

$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que para todo } v \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} v(x) u_{tt}(x, t, \omega) dx + \int_{\Omega} e^{c(x,\omega)} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x, t, \omega) dx = \int_{\Omega} v(x) f(x, t, \omega) dx \\ u(x, \omega, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, \omega, 0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Ahora, si reemplazamos el espacio $H^1(\Omega)$ por el espacio de elementos finitos $V^h(\Omega)$, obtenemos la formulación de Galerkin semidiscretizada

$$(W') \begin{cases} \text{Encontrar } u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que para todo } v \in V^h(\Omega), \\ \int_{\Omega} v(x) u_{tt}(x, t, \omega) dx + \int_{\Omega} e^{c(x,\omega)} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x, t, \omega) dx = \int_{\Omega} v(x) f(x, t) dx \\ u(x, \omega, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, \omega, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Requerimos discretizar el intervalo de tiempo para aproximar numéricamente la derivada temporal de la ecuación. Dada la función $u(x, t, \omega)$ donde $t \in [0, T]$ y tomando un parámetro de discretización temporal $\Delta t = h_t = \frac{T}{S}$ para S entero positivo, tenemos

$$u_t(x, t, \omega) \approx \frac{u(x, t + h_t, \omega) - u(x, t, \omega)}{h_t},$$

entonces

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t, \omega) &\approx \frac{u(x, t + 2h_t, \omega) - u(x, t + h_t, \omega)}{h_t^2} - \frac{u(x, t + h_t, \omega) - u(x, t, \omega)}{h_t^2} \\ &= \frac{u(x, t + 2h_t, \omega) - 2u(x, t + h_t, \omega) + u(x, t, \omega)}{h_t^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Entonces, si reemplazamos (15) en (W') obtenemos la formulación de Galerkin (G) con tiempo discreto, dada al fijar un valor $z \in \{0, \dots, S\}$

$$(G) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V^h \text{ tal que para todo } v \in V^h, \\ \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega} u_z v dx - \frac{2}{\Delta t^2} \int_{\Omega} u_{z-1} v dx + \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega} u_{z-2} v dx + \int_{\Omega} e^c \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \\ u_{z-1}, u_{z-2} \in V^h, \end{cases}$$

donde

$$u_{z-i} = u(x, t_{z-i}, \omega) \quad \text{y} \quad t_{z-i} = (z - i)h_t.$$

Para el tiempo inicial $t = 0$, las funciones $u_{z-1}, u_{z-2} \in V^h$ son las proyecciones en el espacio $V^h(\Omega)$ de las funciones de posición $u_0(x)$ y velocidad $v_0(x)$ iniciales, respectivamente. Por último, si definimos las matrices $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{M \times M}$ y $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{M \times M}$ por

$$a_{ij} = \int_{\Omega} e^{c(x,\omega)} \nabla \varphi_i(x) \cdot \nabla \varphi_j(x) dx,$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

y el vector $\mathbf{b} = [b_i]_{1 \times M}$ por

$$b_i = \int_{\Omega} f(x) \varphi_i(x) dx,$$

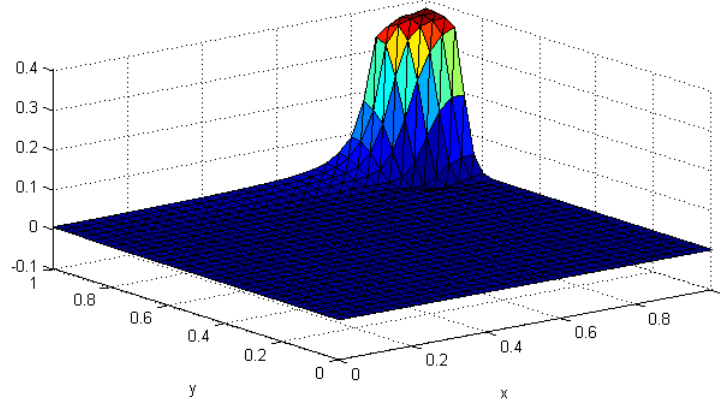
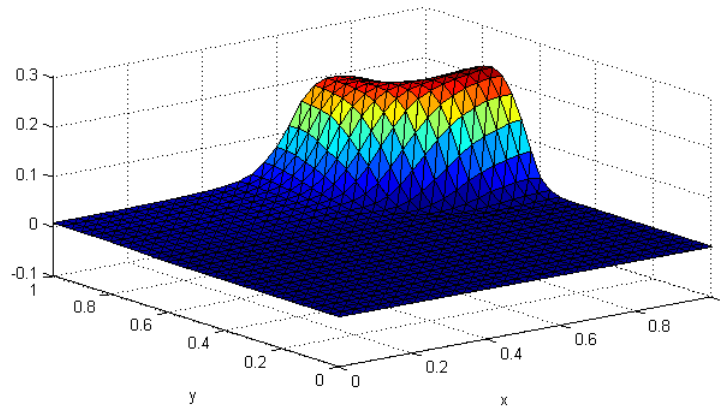
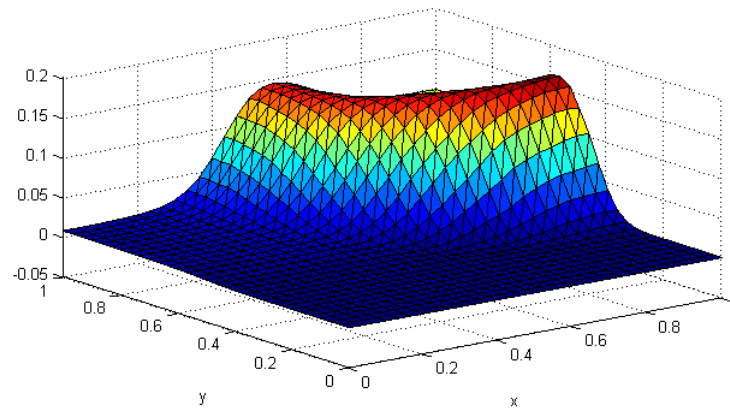
siendo $\varphi_i(x)$ las funciones base de $V^h(\Omega)$ con $i, j = 1, \dots, M$ entonces establecemos la formulación matricial (M) del problema como el sistema lineal

$$\left[\mathcal{A} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathcal{M} \right] \mathbf{x} = \mathbf{b} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathcal{M} \cdot u_{z-1} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathcal{M} \cdot u_{z-2},$$

cuyo vector solución \mathbf{x} es la aproximación en $V^h(\Omega)$ de la solución $u(x, t, \omega)$ de la formulación fuerte para las variables t y ω fijas.

4.1. Resultados

En esta sección, mostramos los resultados correspondientes al problema de la ecuación de onda en dos dimensiones. En primer lugar, en la **Figura 3** mostramos el comportamiento del valor esperado de las soluciones en distintos intervalos de tiempo, simulando la evolución de la onda media a través del tiempo.

Media de la Solución en $t=10 \cdot dt$ Media de la Solución en $t=30 \cdot dt$ Media de la Solución en $t=50 \cdot dt$ 

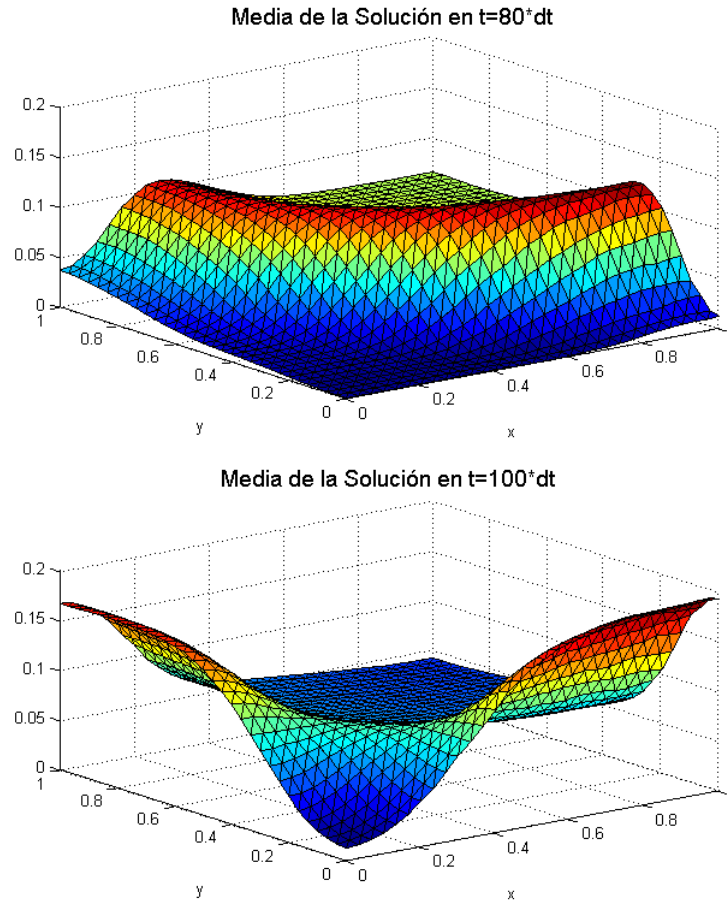


Figura 3: Comportamiento de la solución media de la ecuación de onda en dos dimensiones en distintos intervalos de tiempo con un $\Delta t = 0.01$, obtenida por el método Monte Carlo para $R = 100$ realizaciones y con condiciones iniciales $v_0(x) = e^{-(xy)}$, posición inicial dada por $u_0(x, y) = 0$ y sin fuerza externa actuante. Para definir el coeficiente $c(x, \omega)$ se utiliza una matriz de covarianza determinada por la ecuación $C(Q_1, Q_2) = e^{-|Q_1 - Q_2|^{1.5}}$, aplicando la expansión definida en (6) con $K = 20$ términos de la serie. Para obtener el resultado se utiliza el método de elementos finitos con $M = 100$ elementos.

Por medio del error ε_{H^1} propio del espacio $H^1([0, 1])$ mostramos una gráfica para el anterior experimento fijando las soluciones en un tiempo determinado y variando la cantidad de términos de la serie KL, obteniendo la **Figura 4**.

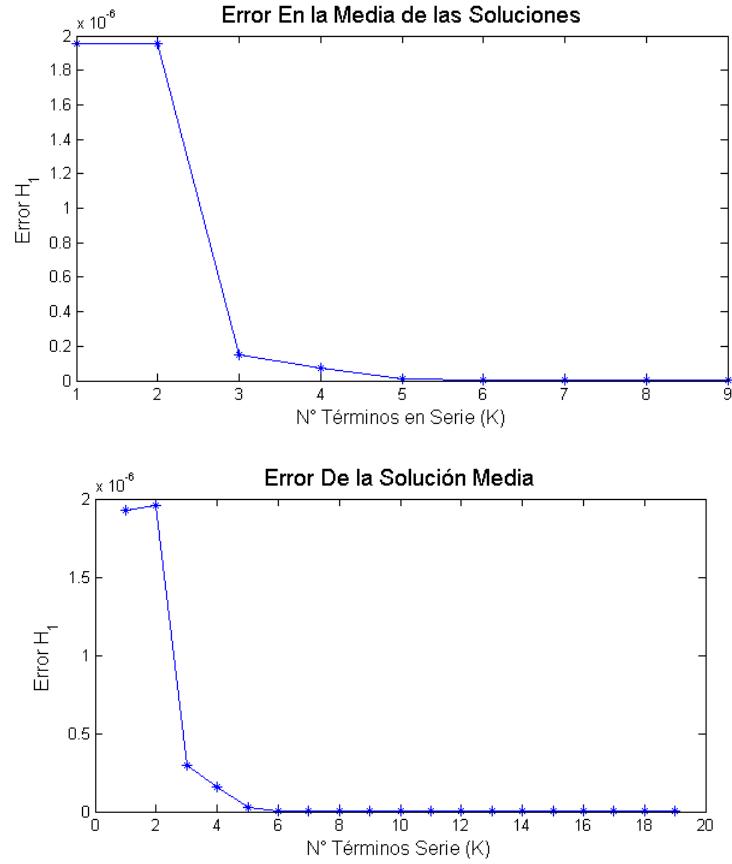


Figura 4: Gráfica de error por medio de la norma H^1 para la solución media con las condiciones mostradas en **Figura 3** y fijando un intervalo de tiempo de $t = 100\Delta t$, variando el parámetro K de términos de la serie KL.

Finalmente, un estudio de mareograma, donde fijamos un nodo la triangulación y ahora variamos el parámetro temporal.

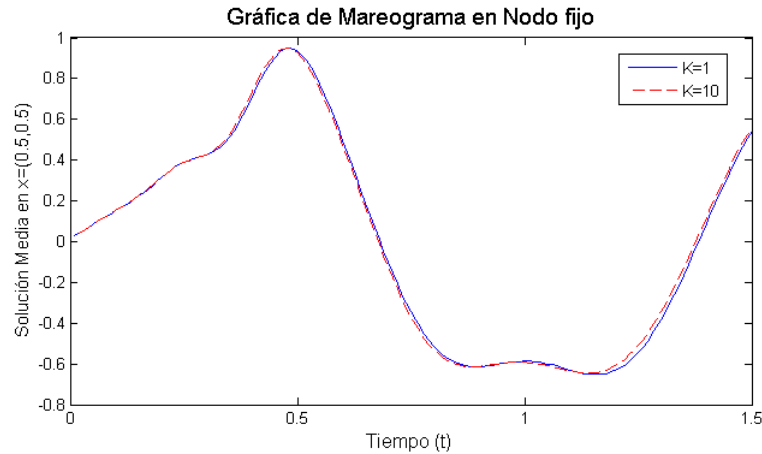


Figura 5: Gráfica de mareograma de la solución media calculada con las condiciones de la **Figura 3**, fijado en el punto $(x, y) = (0.5, 0.5)$ y variando el parámetro temporal desde $t = 0$ hasta $t = 150\Delta t$.

Referencias

- [1] J. Calvete and J. Carrera, *Geoestadística. Aplicaciones a la hidrología subterránea*, Ed. Centro Int. de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1990.
- [2] J. M. Carcione and G. C. Herman, *Seismic modeling*, *Geophysics* **67** (2002), no. 4.
- [3] O. A. Cuervo, *Solución Numérica de la Ecuación de Onda en medios Heterogéneos y Aleatorios en 1 Dimensión*, *Boletín de Matemáticas* **24** (2017), no. 1, 37–55.
- [4] W. H. Gardner and L. D. Baver, *Soil Physics*, New York, Wiley, 1972.
- [5] J. Jacod and P. Protter, *Probability essentials*, Springer Verlag, 2004.
- [6] C. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Courier Corporation, 2012.
- [7] D. P. Kroese and T. Taimre, *Handbook of Monte Carlo methods*, Wiley, 2011.
- [8] W. C. Lane, *The Wave Equation an its solutions*, Project Physnet, Michigan State University, 2002.

- [9] L. Pichon, *Finite Element analysis of bounded an unbounded Electromagnetic Wave problems*, The institution of Electrical Engineers, 1995.
- [10] F. Riesz and S. Nagy, *Functional Analysis*, Frederick Ungar Publishing , University of Michigan, 2011.
- [11] S. Zhou and J-L. Robert, *Finite Element Modeling for Shear Wave Elastography*, Philips Research North America, 2011.