

## INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DEL FLUJO A TRAVÉS DE BIFURCACIONES EN CANALES CON ESCURRIMIENTO A SUPERFICIE LIBRE

Franco Trivisonno<sup>(1)</sup>, Gerardo Riccardi<sup>(2)(3)</sup>, Hernán Stenta<sup>(2)</sup>

(1) Becario de Investigación, (2) Profesor Adjunto, (3) Investigador CIC-CIUNR  
Departamento de Hidráulica, Escuela de Ingeniería Civil, FCEIA, UNR  
trivisonno.franco@gmail.com

### RESUMEN

Las estructuras hidráulicas de bifurcación, ampliamente utilizadas en escurrimientos a superficie libre, permiten dividir el flujo que arriba a un sitio en dos o más porciones. Este estudio comprende una revisión bibliográfica en la temática y la aplicación correspondiente al prediseño de una estructura de división de flujo: una bifurcación en el sistema hídrico Ludueña-Ibarlucea (Rosario, Argentina) cuyo objeto es derivar caudales desde los cursos superficiales hacia un sistema de conductos cerrados a construir, denominado Aliviador 3 Ramal Grandoli. Se llegó a describir el mecanismo hidráulico que permite la derivación de la mitad del caudal transportado por el Canal Ibarlucea a través de un canal de la mitad de su ancho y con una pendiente de fondo mínima, de manera de cumplir una limitación de número de Froude implícita en el modelo utilizado. Asimismo, se calcularon los coeficientes de pérdida de energía asociados. A través de la metodología presentada se constata que es posible determinar un conjunto de características geométricas de utilidad para el diseño preliminar, dejándose en claro que para el diseño completo de tal estructura hidráulica resulta necesario recurrir al estudio experimental mediante modelación física a fin de obtener una descripción más precisa del flujo.

**Palabras clave:** bifurcación en canales abiertos, derivación de caudales, división de flujo.

### ABSTRACT

Hydraulic structures of bifurcation, widely used on superficial flow, allow the division of the approaching discharge into two or more portions. This study comprises a bibliographic review on the subject and the application of a theoretical model for the preliminary design of a flow division structure: a bifurcation in the water system Ibarlucea-Ludueña (Rosario, Argentina) which aims to derive flow from superficial courses to a closed conduit system to construct, called Aliviador 3 Ramal Grandoli. It was described the hydraulic mechanism that allows the division of half the flow transported by the Ibarlucea channel through a channel of the middle of its width and with a minimum slope, so as to satisfy a limitation on the Froude number (implicit in the used model). In addition, associated energy loss coefficients were computed. It was verified that it is possible to determine a set of geometric features providing the preliminary design of the flow division work through the methodology presented in this paper, although it is clearly stated that to address the complete design of such a hydraulic structure it would be necessary to address experimental study by physically modeling the hydraulic structure for a more accurate flow description.

**Keywords:** open channel bifurcation, channel branches, division of flow.

## INTRODUCCIÓN

Una estructura de bifurcación o partición de flujo de un canal es una estructura que divide el flujo en dos o más porciones, derivando parte del caudal que arriba a un sitio desde un canal principal, pudiendo ser el caudal derivado incluso mayor al que continúa en la alineación principal.

La división de caudales es utilizada usualmente en sistemas de riego y de distribución de plantas de tratamiento de agua. En estos últimos, canales alimentadores dispuestos en grupos se enlazan a tanques de mezclado. Asimismo puede encontrarse su aplicación en redes de desagües pluviales, tanto en grandes conductos cerrados como en canales a cielo abierto. En obras de toma o en embocaduras de conductos para entubamientos de cursos de agua se emplean estructuras de bifurcación cuando por ejemplo se debe atravesar una zona densamente urbanizada. De la misma manera, en obras de aliviadores de cursos de agua existentes se recurre a la extracción de caudal del canal principal mediante conducciones cerradas para recuperar un determinado nivel de protección ante inundaciones, recobrándose así capacidad de transporte de flujo. Otra aplicación habitual de esta estructura hidráulica la constituye una boca de tormenta en una red de drenaje pluvial ubicada en un punto intermedio.

En principio, analizando por consideraciones energéticas una estructura hidráulica de este tipo, se llega a que se desarrolla, a lo largo del canal principal, una contracción en la bifurcación y una expansión aguas abajo, lo que se traduce en un descenso del nivel en el canal de derivación y un ascenso en el canal principal aguas abajo de la bifurcación. Esta descripción general del comportamiento del flujo puede observarse en la Figura 1, que además presenta los elementos generales de una bifurcación en un canal rectangular y en donde pueden observarse las corrientes secundarias que aparecen en la misma (particularmente una fuerte corriente de fondo hacia el canal de derivación), siendo  $\delta$  el ángulo de bifurcación e indicando con los subíndices  $0$ ,  $u$  y  $a$  a los parámetros hidráulicos y geométricos (caudal  $Q$  y ancho  $b$ ) en las secciones del canal principal antes y luego de la bifurcación y del canal derivador, respectivamente.

Un caso específico de este tipo de estructura se presenta en el proyecto de saneamiento del sistema hídrico del Arroyo Ludueña (Rosario, Santa Fe). En tal sistema, ante la necesidad de aliviar el caudal máximo que actualmente llega al sistema de conduc-

tos existentes, se ha planteado una obra de división del caudal transportado por el Canal Ibarlucea para derivarlo hacia un sistema de conductos cerrados denominado Aliviador 3 Ramal Grandoli (a proyectar). En vistas de aportar lineamientos teóricos para el diseño de esta obra hidráulica surge la necesidad de analizar el flujo en bifurcaciones. El aporte se llevó a cabo a través de una recopilación bibliográfica y luego mediante la aplicación de los enfoques considerados más acordes con el tipo de estructura hidráulica planteada.

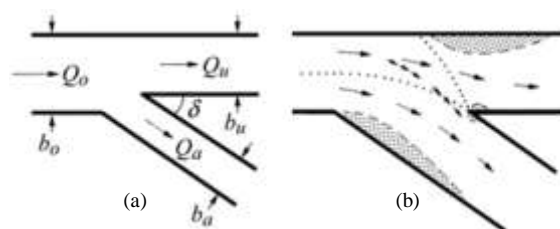


Figura 1. Bifurcación en un canal rectangular: (a) esquema general, (b) (—) corrientes de superficie, (→→→) corrientes de fondo, (.....) línea de división de flujo, (- - -) separación del flujo de las paredes (extraído de Hager, 2010).

## RECOPILOCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE MODELOS DE DIVISIÓN DE FLUJO

### Estudio experimental según parámetros geométricos generales

Cerrato et al. (1985) estudiaron las relaciones entre porciones de caudal derivado, razones de ancho de los canales y ángulos de bifurcación para canales de pequeña pendiente de fondo. En la Figura 2 puede observarse un esquema de la obra de división de flujo, en la cual 1 es una sección del canal de entrada (o canal principal antes de la bifurcación), 2 es una sección del canal de salida (o canal principal luego de la bifurcación) y 3 es una sección del canal derivador, y  $Q$  y  $b$  son los caudales y anchos en cada sección con los subíndices correspondientes.

Planteando como hipótesis flujo subcrítico en el canal de entrada y en los canales de salida y de derivación luego de la bifurcación (régimen cuasi uniforme y permanente) y paralelo a las paredes del canal, velocidad uniformemente distribuida aguas arriba y aguas abajo de la bifurcación, alineación entre los canales de entrada y de salida y pendiente de fondo pequeña e igual en los tres canales, desde un análisis teórico el flujo pudo ser descrito de la siguiente manera: se desarrolla un remanso aguas arriba de la bifurcación; en la bifurcación el flujo es

rápido variado, la corriente se contrae y sobre los contornos de la división aparecen zonas de separación ocupadas por remolinos; después de la vena contraída, la corriente comienza a expandirse y se restablece el régimen de flujo uniforme en los canales de derivación y salida. Con el fin de introducir en el análisis el efecto de la contracción, pérdidas por remolino, distribución no uniforme de la velocidad y distribución no hidrostática de la presión, se recurrió

a la definición de un coeficiente de descarga  $C$ , el cual fue relacionado a parámetros geométricos e hidráulicos mediante un análisis dimensional. Según los autores esta relación permitió demostrar que el problema del flujo dividido está gobernado fundamentalmente por las fuerzas de inercia y de gravedad, de manera que una similitud dinámica del flujo se garantizaría con una similitud geométrica (Cerrato et al., 1985).

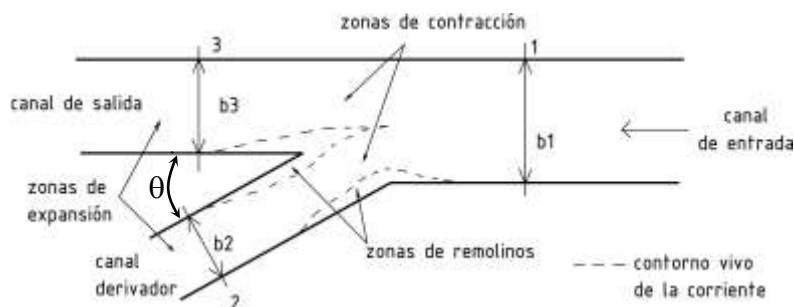


Figura 2. Esquemización en planta de la división del flujo en canales (adaptado de Cerrato et al., 1985).

Complementariamente, a través de una investigación experimental en laboratorio (donde inicialmente se realizó una cantidad considerable de estudios en una mesa potencial basándose en la analogía eléctrica y luego una serie de estudios en un modelo físico, modelando la situación más crítica seleccionada en la mesa potencial y en el cual los canales tenían un talud de  $45^\circ$ ), Cerrato et al. (1985) construyeron un conjunto de gráficas que brindan porciones de caudal derivado  $Q_3/Q_1$  según ángulos de bifurcación  $\theta$  y razones de ancho entre canales  $b_3/b_1$  y  $b_1/b_2$  (Figura 3).

Cerrato et al. (1985) concluyeron que: la variación de  $\theta$  no resulta ser un parámetro determinante en la porción de caudal derivado  $Q_3/Q_1$  (si bien las mayores derivaciones corresponden a  $60^\circ \leq \theta \leq 75^\circ$ ), no siendo así la influencia de la variación de los anchos del canal de salida y de derivación; el caudal derivado está influenciado en mayor medida por la variación de  $\theta$  cuando el ancho del canal de salida es menor al de entrada (ya que se produce un efecto de cuña en la derivación); la influencia de  $\theta$  es mayor cuanto menor es el ancho del canal derivador, acentuándose aún más la existencia de ángulos óptimos (debido a que para anchos de derivación pequeños la influencia de la zona de remolinos en el canal derivador es mayor); el caudal derivado aumenta marcadamente al disminuir el ancho del canal de salida y aumentar el de derivación; para un mismo  $\theta$  la variación del caudal derivado con respecto al ancho del canal de salida tiende a ser lineal, viéndose alterada

por el efecto de cuña. Finalmente, en cuanto a la porción de caudal derivado, los valores obtenidos de la mesa potencial y los del modelo físico coinciden (error de 1%), entonces resulta aceptable la utilización de la analogía eléctrica.

### Patrones de flujo y pérdidas de energía

Mock (1960), citado por Hager (2010) investigó el flujo subcrítico en una bifurcación de canales rectangulares con anchos iguales, resultando en la definición de una relación de caudales  $q_a$  y de los coeficientes de pérdida de carga  $\xi$  basados en la velocidad  $V_0$  del flujo de aproximación. Resulta necesario aclarar que en esta sección se reprodujo la nomenclatura adoptada por el autor, según la cual:  $\delta$  es el ángulo de bifurcación;  $\theta$ ,  $u$  y  $a$  refieren a las secciones del canal principal antes y luego de la bifurcación y del canal derivador, respectivamente; y con los subíndices correspondientes se identifican parámetros hidráulicos y geométricos (velocidad  $V$ , caudal  $Q$ , ancho  $b$ , nivel de energía  $H$ ) en cada sección.

$$q_a = \frac{Q_a}{Q_0} \tag{1}$$

$$\xi_a = \frac{H_0 - H_a}{V_0^2 / 2g} \tag{2}$$

$$\xi_u = \frac{H_0 - H_u}{V_0^2/2g} \quad (3)$$

De las observaciones efectuadas, Mock (1960; citado por Hager, 2010) llegó a un conjunto de expresiones que permiten calcular los coeficientes de pérdida  $\xi$  según el ángulo  $\delta$  y la relación de caudales  $q_a$ :

$$\xi_a = 1 - \frac{5}{4}q_a + 0.725q_a(1 + q_a^2)\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (4)$$

$$\xi_u = 0.45q_a(q_a - 0.5) \quad (5)$$

Se presentaron las siguientes conclusiones: las observaciones son idénticas para flujo a presión y la ley de transferencia puede ser aplicada para números

de Froude ( $F$ ) por sobre 0.5 y hasta mayores de 0.7;  $\xi_u$  es independiente de  $\delta$ ; el canal bifurcado puede tener pérdidas considerables, particularmente cuando  $q_a \rightarrow 1$ , dependiendo significativamente de  $\delta$  (Mock, 1960; citado por Hager, 2010).

Interpretando las ecuaciones (4) y (5) se evidencia que los coeficientes de pérdida  $\xi$  más importantes se presentan en la derivación y que los mismos aumentan con  $\delta$ . Para el caso particular  $\delta = 90^\circ$  y  $q_a = 0.5$ , el coeficiente de pérdida  $\xi_a$  resulta cercano a 0.83. Por otra parte, los coeficientes de pérdida en el canal principal ( $\xi_u$ ) sólo resultan considerables para  $q_a > 0.5$ . Para  $q_a = 0.5$  la pérdida es nula, y para derivaciones menores presenta valores negativos que no deben ser considerados.

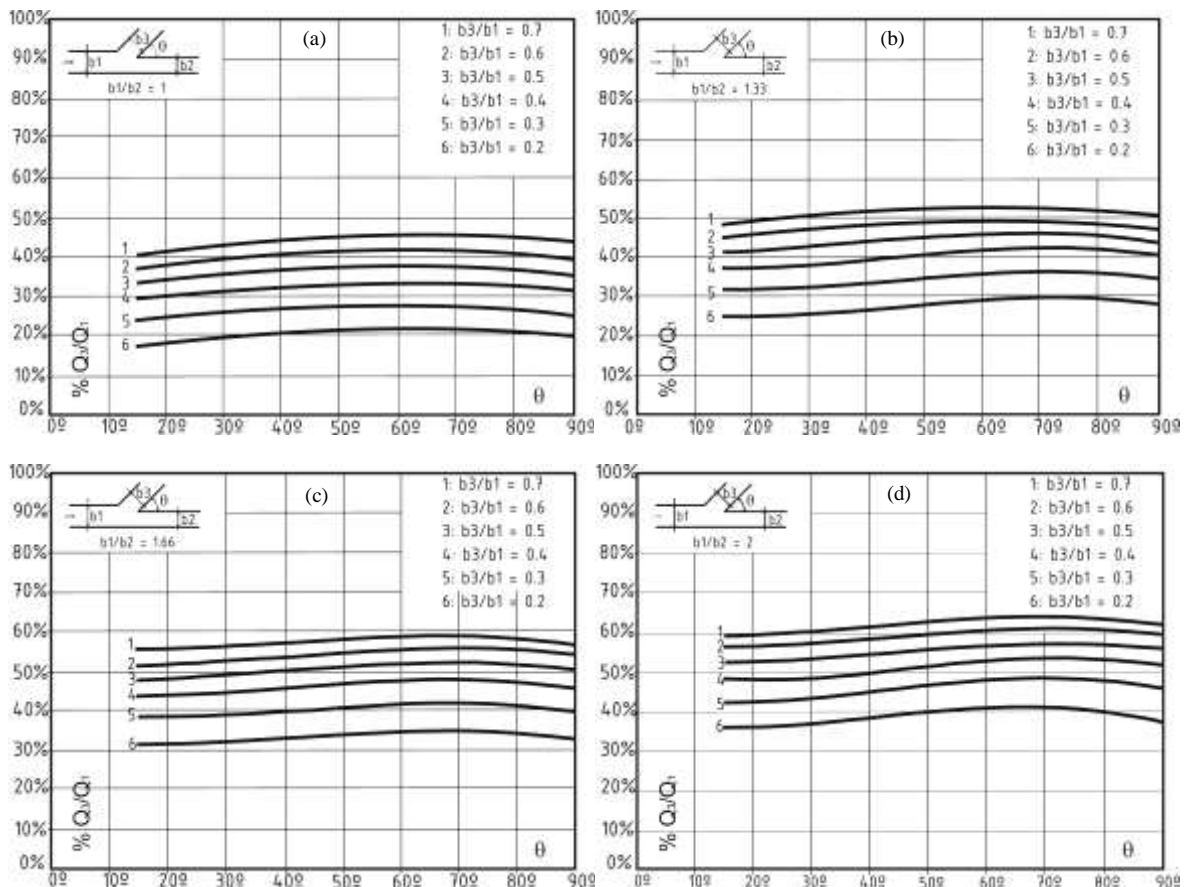


Figura 3. Porciones de caudal derivado según distintas contracciones de ancho del canal principal: (a)  $b_1/b_2 = 1$ , (b)  $b_1/b_2 = 1.33$ , (c)  $b_1/b_2 = 1.66$ , (d)  $b_1/b_2 = 2$  (adaptado de Cerrato *et al.*, 1985).

Adicionalmente se efectuó una descripción cualitativa del flujo (Figura 4). Para  $q_a = 0$  (sin descarga lateral) fuertes corrientes secundarias gobiernan el flujo en el canal de bifurcación, en tanto que debido a que el tirante en este canal sería aproximadamente

igual al del canal principal, toda la velocidad de aproximación sería disipada y entonces  $\xi_a = 1$ . Para  $q_a > 0$  el flujo puede ser comparado con flujo subcrítico en curva. Dependiendo de  $\delta$  y  $q_a$ , se desarrollan zonas de separación de flujo tanto en el lado interno

de la curva como además en el canal principal, aguas abajo de la bifurcación, y entonces las pérdidas se tornan nuevamente considerables. En el caso de que el flujo transportase sedimentos las partículas podrían depositarse a lo largo de las zonas de separación y debe plantearse la necesidad de mantenimiento adicional. Por esta razón geometrías afiladas no serían recomendadas para un diseño satisfactorio; a pesar de ello a menudo éstas se encuentran combinadas con compuertas para bloquear cualquiera de los flujos de salida (Mock, 1960; citado por Hager, 2010).

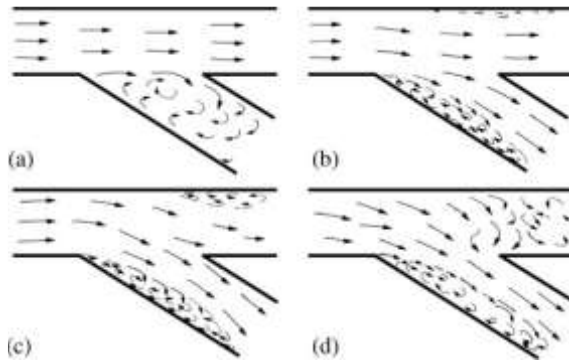


Figura 4. Patrones de flujo en bifurcaciones en canales para: (a)  $q_a = 0$ ; (b)  $q_a = 1/3$ ; (c)  $q_a = 2/3$ ; (d)  $q_a = 1$  (extraído de Hager, 2010).

### Bifurcaciones en T

Entendiendo bajo esta denominación a las bifurcaciones constituidas por un canal recto el cual contiene un canal derivador en ángulo recto de ancho menor o igual que el primero, para  $F_u < F_o < 0.75$  (siguiendo en esta sección la misma nomenclatura de la anterior) y sin presentarse condiciones de sumergencia en el canal derivador, Krishnappa y Seetharamiath (1963) plantearon una razón de caudal derivado sin considerar relaciones entre los tirantes del flujo aguas arriba y aguas abajo, según la ecuación (6), en la que  $\beta_a$  es la razón entre los anchos del canal de derivación y del canal principal, definida según la ecuación (7) (Figura 5).

$$q_a = \frac{Q_a}{Q_0} = (1.55 - 1.45F_o)\beta_a + 0.16(1 - 2F_o) \quad (6)$$

$$\beta_a = \frac{b_a}{b_0} \leq 1 \quad (7)$$

De modo de presentar una ecuación alternativa a (6) se recurrió a Lakshmana Rao et al. (1968); citados en Hager (2010), que plantea una relación entre el

caudal aguas abajo de la bifurcación ( $Q_u$ ) y el caudal total que arriba a la misma ( $Q_0$ ):

$$\frac{Q_u}{Q_0} = \tanh \left[ 5(0.56 - F_a)F_u^{1/2} \right] \quad (8)$$

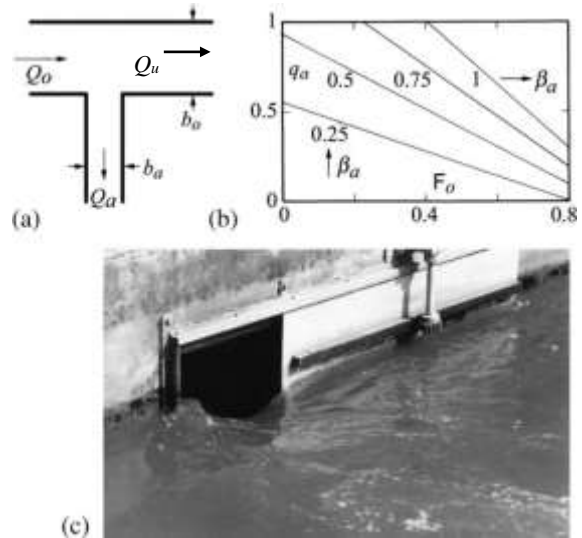


Figura 5. Bifurcación en T: (a) esquema en planta y nomenclatura; (b)  $q_a$  según  $F_o$  para  $F_a > 1$  y  $\beta_a$  (Krishnappa y Seetharamiath, 1963; citado por Hager, 2010); (c) efecto de depresión de la superficie libre del flujo en ingreso al canal lateral (extraído de Hager, 2010).

Según Hager (2010), en flujos con  $F_a > 1/3$  se desarrolla un resalto hidráulico y entonces debe usarse  $F_a = 1/3$  en la ecuación (8) para computar la relación de caudales  $Q_u/Q_0$  teniendo en cuenta tal efecto. Por otra parte, el coeficiente de contracción  $C_c$  del canal derivador depende de  $F_u$  (Figura 6) según:

$$\frac{1 - C_c}{1 - C_{c\infty}} = [\tanh(3F_u)]^{2/3} \quad (9)$$

donde  $C_{c\infty}$  se define como el coeficiente de contracción para  $F_u \gg 0$ :

$$C_{c\infty} = \left(\frac{2}{3}\right) \tanh(3.5F_a) \quad (10)$$

La sección de máxima contracción de flujo en el canal derivador se localiza aproximadamente a  $1/2b_a$  a partir de la entrada al mismo aguas abajo. La longitud de la separación del flujo de la pared lateral depende de  $F_u$  y  $F_a$ . Asimismo, la dirección media del flujo en la bifurcación puede ser determinada mediante  $C_\delta$  (coeficiente adimensional que varía

entre 0 y 1) en función de  $F_u$ , el cual puede obtenerse de la siguiente manera (Hager, 2010):

$$C_\delta = \left(\frac{2}{3}\right)(1 - F_u) \quad (11)$$

Luego, el ángulo medio de bifurcación se calcula como el producto entre  $C_\delta$  y  $\delta$ , donde  $\delta = 90^\circ$  para el caso de bifurcaciones en T.

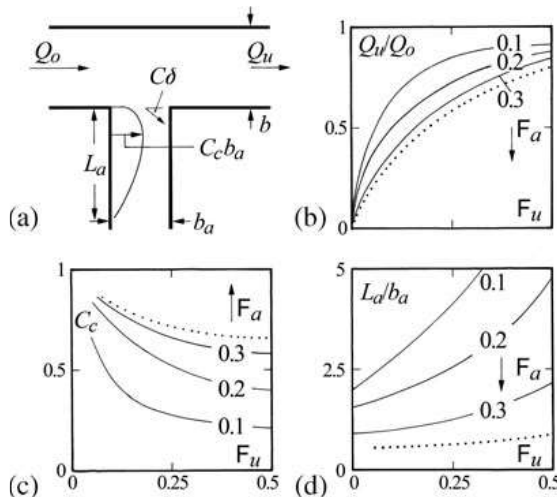


Figura 6. Bifurcación en T: (a) esquema en planta y nomenclatura; (b) relación de repartición de caudales  $Q_u/Q_0$ ; (c) coeficiente de contracción  $C_c$ ; (d) longitud relativa del despegue de la corriente en el ramal lateral  $L_a/b_a$ ; (b), (c) y (d) como función de  $F_u$  y  $F_a$ ; (...) resalto hidráulico en canal lateral (Lakshmana Rao et al., 1968; citado por Hager, 2010) (extraído de Hager, 2010).

### División de flujo con derivador corto a $90^\circ$

Ramamurthy y Satish (1988) propusieron un modelo teórico simple para la división del flujo con un canal de derivación corto emplazado perpendicularmente a un canal principal. Se consideraron varias relaciones de ancho entre canales. El modelo fue desarrollado utilizando los principios de momento, energía y continuidad y está basado en la existencia de condiciones de flujo libre en el canal de derivación. El análisis hace uso de la similitud de la configuración del flujo entre la bifurcación de un canal y un conducto con salida lateral con barrera (u orientador de flujo) analizado bidimensionalmente para estimar el coeficiente de contracción del flujo convergente al canal de derivación. Se relacionó la razón de descarga derivada con el número de Froude ( $F$ ) en el canal principal aguas abajo de la bifurcación. Este modelo teórico fue validado con información de estudios experimentales efectuados especialmente para el caso y de otros anteriores, resultando en la imposi-

ción de una condición de flujo no sumergido en la zona de la derivación debido a condiciones de control aguas abajo para satisfacer tal validez.

La Figura 7 ilustra un esquema donde se presentan las variables geométricas y de flujo relacionadas al problema:  $V$ ,  $Q$ ,  $h$  y  $g$  designan la velocidad, el caudal, el tirante y la aceleración de la gravedad, respectivamente; se denomina con  $B$  al ancho del canal principal y con  $L$  al ancho del canal de derivación (debe ser  $L \leq B$ ). Los subíndices 1, 2, 3\* y 3 refieren a las secciones indicadas en el esquema. La sección 3 está localizada a una distancia cercana a  $4L$  desde la entrada a la derivación.

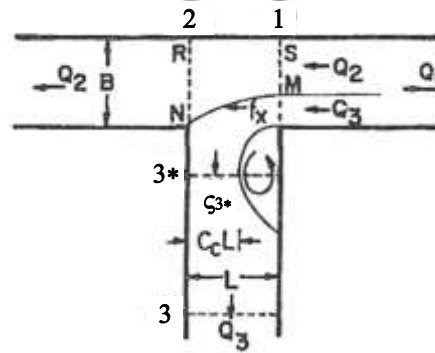


Figura 7. Flujo en un canal con bifurcación (adaptado de Ramamurthy y Satish, 1988).

Se plantea la determinación de la dependencia de  $Q_3/Q_1$  con  $F_2$  (o  $F_1$ ) y  $L/B$ , para la cual Ramamurthy y Satish (1988) proponen relacionar el coeficiente de contracción del flujo  $C_c$  con el parámetro de velocidad:

$$\eta_1 = V_1/V_{3*} \quad (12)$$

Sin embargo, existe una dificultad para encontrar tal dependencia debido a las complejidades asociadas al flujo a superficie libre, y entonces se hace uso de la similitud de la configuración del flujo con un conducto con salida lateral con orientador de flujo (Figura 8) que permite estimar  $C_c$  para el canal de derivación a partir de tal analogía. Debido a la compleja naturaleza del flujo en el canal de derivación sólo pueden hallarse valores globales de  $C_c$ , representativos de la sección entera contraída para el modelo del canal de derivación. Luego,  $Q_3/Q_1$  se relaciona con  $F_2$  (o  $F_1$ ) para valores dados de  $L/B$  (Ramamurthy y Satish, 1988).

Tanto resultados provenientes de estudios anteriores (Krishnappa y Seetharamiah, 1963; citados por Hager, 2010; Law, 1965; Sridharan, 1966) como resul-

tados de experiencias realizadas en Ramamurthy y Satish (1988) fueron utilizados para verificar el modelo propuesto. Las experiencias provenientes de Law (1965) estuvieron restringidas a los casos de sección de máxima contracción en la derivación no sumergida debido al control del flujo por una compuerta al final del canal de derivación. Law (1965) y Sridharan (1966) indican que el flujo a la entrada de la derivación está generalmente no sumergido cuando  $F_3 > 0.3$ . En este caso se aumentó tal limitación a un valor de  $F_3 \geq 0.35$  (Ramamurthy y Satish, 1988).

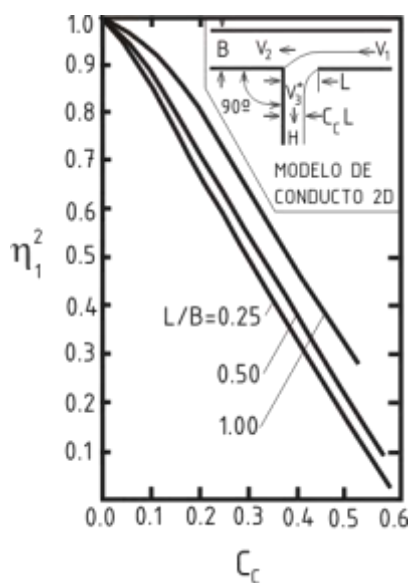


Figura 8. Variación de  $C_c$  con  $\eta_1^2$  en bifurcaciones laterales con orientadores de flujo (adaptado de Ramamurthy y Satish, 1988).

La configuración general del flujo entrante al canal de derivación se aproxima al patrón de flujo lateral que pasa por un conducto con salida lateral con barrera analizado bidimensionalmente, en el cual  $L$  representa el ancho de la salida y  $B$  el ancho del conducto (Figura 8). En ambas configuraciones el flujo de aproximación a la derivación se separa del canal principal y comienza a contraerse hasta llegar a un ancho  $C_c L$  en la sección de la máxima contracción. Esta similitud entre las dos configuraciones de flujo en cuanto a la contracción del flujo bifurcado permite estimar el coeficiente de contracción  $C_c$  para el canal de derivación utilizando el modelo del conducto bidimensional con salida lateral con orientador de flujo (Ramamurthy y Satish, 1988).

Con el objeto de desarrollar el modelo teórico del flujo en el canal de derivación se formula un conjunto de hipótesis: los canales principal y de derivación

son rectangulares y horizontales,  $L \leq B$  y el flujo en el canal principal es subcrítico; la pérdida de energía entre las secciones 1 y 3\* es despreciable; la distribución de presiones es hidrostática en las secciones 1 y 2 y la presión media actuando a lo largo de la superficie divisoria  $MN$  es el promedio de las alturas piezométricas en  $M$  y  $N$ ; la pérdida por fricción es despreciable entre 1 y 2; cuando el flujo no está sumergido a la entrada de la derivación, las condiciones de flujo son aproximadamente críticas en la sección 3\* donde ocurre la máxima contracción;  $C_c$  para el modelo de conducto de salida lateral con barrera analizado bidimensionalmente provee una buena estimación para el coeficiente de contracción global en el canal de derivación cuando los valores de  $L/B$  y  $\eta_1$  son los mismos en los dos casos (Ramamurthy y Satish, 1988).

Aplicando conservación de la energía entre las secciones 1 y 3\*, definiendo el parámetro de velocidad  $\eta_1 = V_1/V_{3*}$ , aplicando continuidad entre las secciones y conservación de momento en la dirección del flujo principal y operando matemáticamente, Ramamurthy y Satish (1988) llegan a un conjunto de ecuaciones que permiten resolver el modelo. La solución es descrita a continuación:

1. dado  $F_1$ , se obtiene  $\eta_1$  de la siguiente ecuación:

$$F_1^2 = \frac{2}{\frac{3}{\eta_1^2} - 1} \tag{13}$$

2. de la solución existente del problema del conducto analizado bidimensionalmente se obtiene  $C_c$  entrando con  $\eta_1$  y  $L/B$ ; con  $L/B$ ,  $\eta_1$  y  $C_c$  se calcula  $Q_3/Q_1$  para el canal de derivación empleando la siguiente ecuación:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = \frac{2 \frac{L}{B} C_c}{3\eta_1 - \eta_1^3} \tag{14}$$

3. de la ecuación mostrada a continuación se puede obtener la relación de tirantes antes y después de la derivación en el canal principal ( $h_2/h_1$ ):

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{h_2}{h_1} \frac{Q_3}{Q_1} - \left(2F_1^2 + 1\right) \left(1 - \frac{Q_3}{Q_1}\right) \frac{h_2}{h_1} + 2F_1^2 \left(1 - \frac{Q_3}{Q_1}\right)^2 = 0 \tag{15}$$

4. el número de Froude aguas abajo  $F_2$  se obtiene de la siguiente ecuación:

$$F_2 = F_1 \left( 1 - \frac{Q_3}{Q_1} \right) \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{3/2} \quad (16)$$

5. por último, dada una relación  $h-Q$  del canal de derivación se debe comprobar que  $F_3 > 0.35$ .

Si la desigualdad  $F_3 > 0.35$  no se cumple puede observarse de los resultados experimentales que las condiciones del flujo en la sección de máxima contracción se tornan claramente subcríticas y por lo tanto cualquier cambio en la condición del flujo en el canal de derivación viaja aguas arriba y afecta drásticamente el flujo en el canal principal. Esto puede observarse en la Figura 9, donde se ilustra la relación de tirantes  $h_2/h_c$  (siendo  $h_c$  es el tirante crítico) para distintos  $F_3$ . La gráfica se construyó con el modelo teórico proporcionado anteriormente y los resultados experimentales se graficaron como puntos, observándose una adecuada aproximación entre valores computados y observados. La condición de flujo no sumergido en la derivación en la zona de la bifurcación se encuentra normalmente en canales con derivaciones cortas o con derivaciones en pendiente. Más generalmente, las condiciones del flujo en la derivación pueden depender de la naturaleza del control en la sección aguas abajo de la bifurcación. Cuando el flujo en la sección de máxima contracción (sección 3\*) es crítico, el flujo inmediatamente aguas abajo de esta sección se torna supercrítico y expansivo. Dependiendo del control aguas abajo el flujo puede permanecer supercrítico o formarse un resalto hidráulico. Es por esto entonces que cuando el flujo sea crítico en la sección de la máxima contracción, los cambios en el canal de derivación no afectarán significativamente el flujo en el canal principal. Asimismo resulta oportuno explicar que según el modelo teórico, para valores fijos de  $L/B$ ,  $C_c$  aumenta a medida que  $\eta_1$  disminuye (Ramamurthy y Satish, 1988).

En la Figura 10 se contrastaron los resultados teóricos de  $F_2$  en función de  $Q_3/Q_1$  para distintas  $L/B$  con los resultados experimentales y se halló que coinciden para valores de  $F_2 < 0.7$  (Ramamurthy y Satish, 1988).

Por último, se expone un diagrama de flujo explicando un método iterativo de cálculo del caudal derivado basado en las gráficas de  $F_2$  en función de  $Q_3/Q_1$  para distintas  $L/B$  de la Figura 10 (Figura 11).

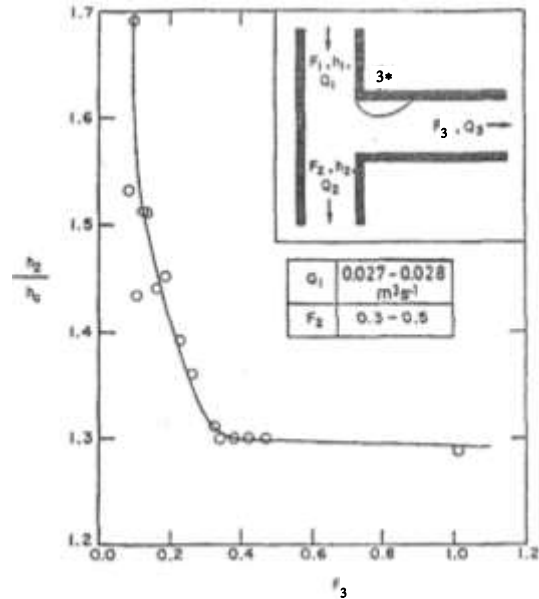


Figura 9. Variación de  $h_2/h_c$  con  $F_3$  (extraído de Ramamurthy y Satish, 1988).

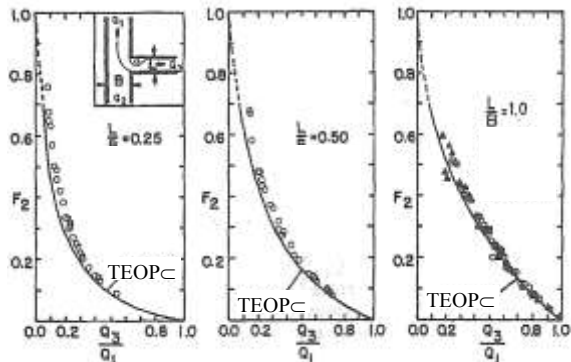


Figura 10. Variación de  $Q_3/Q_1$  con  $F_2$  para diferentes valores de  $L/B$ ;  $\blacksquare, \blacktriangle$ : resultados de estudios previos citados por Ramamurthy y Satish, 1988;  $\circ$  resultados de las experiencias presentadas por Ramamurthy y Satish, 1988 (adaptado de Ramamurthy y Satish, 1988).

### División de flujo con derivador a 90° en canales del mismo ancho

Ramamurthy et al. (1990) propusieron un modelo que permite estimar la relación de caudales para bifurcaciones de flujo a superficie libre para canales con la derivación emplazada perpendicularmente, en términos de los números de Froude ( $F$ ) en el canal principal. La principal ventaja de este estudio radica en que permite hallar la solución para cualquier condición de flujo en el canal de derivación. Los demás modelos requieren una verificación de flujo no sumergido en la zona de la bifurcación mediante



un control de flujo. Como desventaja, sólo acepta una relación unitaria de anchos entre canales principal y de derivación ya que así fue construido el modelo físico utilizado para validar el modelo teórico (Figura 12).

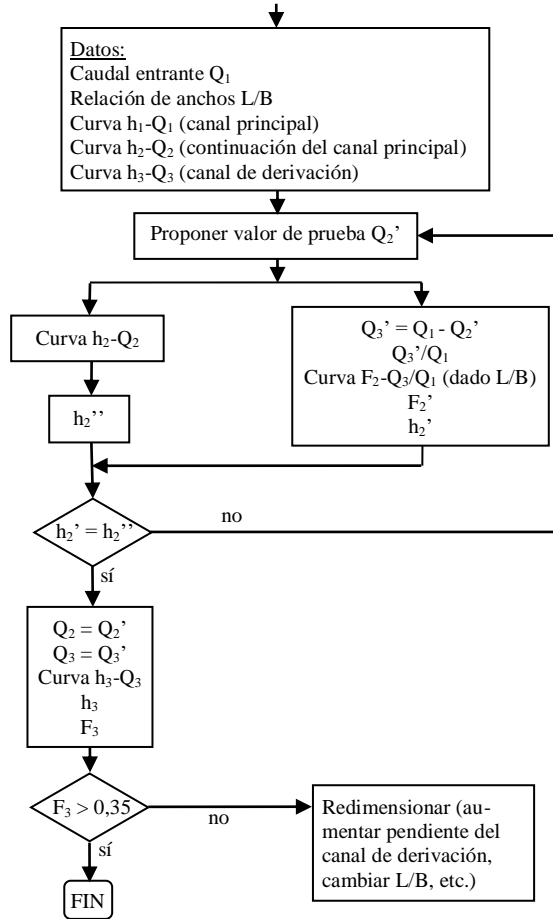


Figura 11. Diagrama de flujo: determinación gráfica del caudal derivado según Ramamurthy y Satish, 1988.

De manera de estudiar las características del flujo, y respetando la nomenclatura presentada en la sección anterior, se plantearon las siguientes hipótesis: canales rectangulares y horizontales; el flujo entrante  $Q_1$  es subcrítico; los flujos en las secciones  $AB$ ,  $GF$  y  $HK$  son aproximadamente uniformes por lo que los caudales por unidad de ancho  $Q_1/b_I = Q_2/b_{II} = Q_3/b_{III}$  y los coeficientes de momento en estas secciones son cercanos a la unidad; la pérdida por fricción en la sección  $ADCE$  y la pérdida de energía a lo largo de la línea de corriente  $EC$  son despreciables; para la línea de corriente divisoria  $PEC$  se asume un punto de estancamiento en  $C$  y, por lo tanto el tirante  $Y$  en una sección infinitesimalmente pequeña  $ds$  varía de

$Y_1$  en  $E$  a  $Y_1(1+F_1^2/2)$  en  $C$ , esta variación se asume que sigue una relación simple  $Y = Y_1 + az^2$  donde  $a$  es una constante y  $z$  es la distancia desde  $ds$  a la línea  $Ex$  (Ramamurthy et al., 1990).

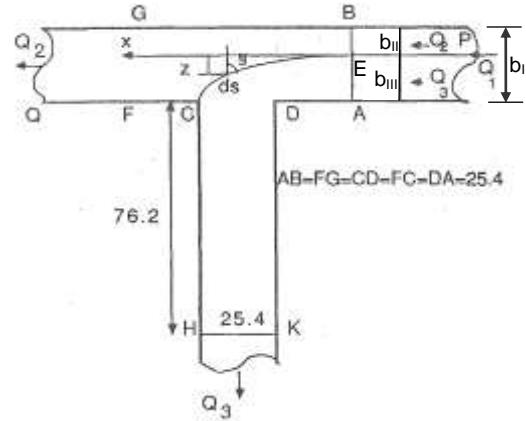


Figura 12. Modelo ensayado para la división de flujo en canales abiertos rectangulares, con dimensiones en centímetros (adaptado de Ramamurthy et al., 1990).

Según Ramamurthy et al. (1990), aplicando la ecuación de momento en la sección de control  $ADCE$  en la dirección  $Ex$  y luego a la sección  $ABGF$  en la dirección  $x$ , se llega a una ecuación que relaciona la razón de profundidades, la razón de descarga y los números de Froude  $F_1$  y  $F_2$ :

$$\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)^2 + 2\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)^2 F_1^2 \left(1 - k \frac{Q_3}{Q_1}\right) = 1 + 2F_2^2 \quad (17)$$

siendo:

$$k = \frac{5}{6} - \frac{F_1^2}{40} \quad (18)$$

Por lo cual, puede expresarse:

$$F_2^2 = F_1^2 R_q^2 R_y^3 \quad (19)$$

con las relaciones de descarga  $R_q$  y de tirante  $R_y$  definidas como:

$$R_q = \frac{Q_2}{Q_1}; R_y = \frac{Y_1}{Y_2} \quad (20)$$

puediéndose obtener:

$$\frac{1-R_q}{40} F_1^4 + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} R_q - R_q^2 R_y\right) F_1^2 + \frac{R_y^2 - 1}{2R_y^2} = 0 \quad (21)$$

donde se llega a expresar  $R_q$  directamente en términos de  $F_1$  y  $R_y$  (Figura 13). Alternativamente  $F_2$  puede ser definido directamente en términos de  $F_1$  y  $R_q$ :

$$\frac{F_2^{4/3}}{1+2F_2^2} = \frac{F_1^{4/3} R_q^{4/3}}{1+2F_1^2 \left[ \frac{1}{6} + \frac{5}{6} R_q + \frac{F_1^2}{40} (1-R_q) \right]} \quad (22)$$

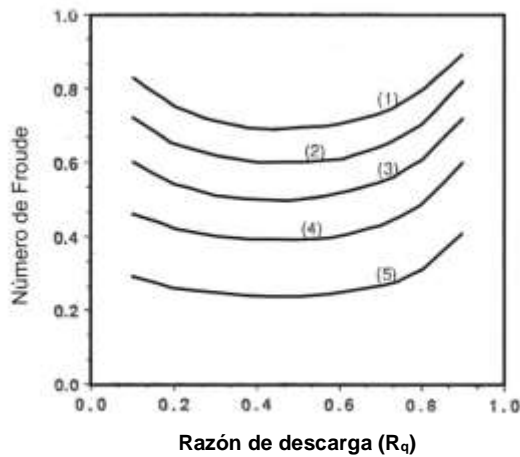


Figura 13.  $R_q = Q_2/Q_1$  en relación a  $F_1$ : (1)  $R_y = 0.86$ ; (2)  $R_y = 0.89$ ; (3)  $R_y = 0.92$ ; (4)  $R_y = 0.95$ ; (5)  $R_y = 0.98$  (adaptado de Ramamurthy et al., 1990).

Si bien este modelo permite prescindir de limitaciones del flujo en el canal derivador (y esto constituye una gran ventaja) al aplicar las ecuaciones de momento sólo al canal principal es también incapaz de describir el flujo en el primero. Por otra parte, debido a que el patrón de flujo en la derivación se vuelve complejo (separación del flujo y formación de resalto hidráulico), la medición del tirante  $Y_3$  no resulta precisa. Resulta entonces conveniente que este parámetro no sea necesario en el modelo (sí es un parámetro para la solución de Taylor, 1944; citado en Ramamurthy et al., 1990). Los tirantes utilizados son los correspondientes a las secciones  $AB$  y  $GF$ , donde el flujo ya es aproximadamente uniforme, cuando  $F_1 < 0.75$ . El flujo en la sección  $FG$  tiende a ser no uniforme cuando  $F_1 > 0.75$  por lo que estos casos no pueden ser validados experimentalmente y constituye una limitación del modelo. Finalmente, y de modo de aportar a la descripción cualitativa del flujo, de la observación de los experimentos llevados a cabo en esta oportunidad es notable que la profundidad del flujo inmediatamente después de la bifurcación aumenta en el canal principal y disminuye en la derivación.

## Análisis dimensional

Detallando todas las variables involucradas en el estudio de este tipo de flujos Lakshmana Rao et al., 1968 (citados por Hager, 2010) encontraron una relación entre el cociente de dos de los tres caudales y el número de Froude ( $F$ ) del flujo en el canal principal, aguas abajo de la bifurcación. Se realizó un estudio experimental para diferentes relaciones de anchos y ángulos de bifurcación y por consideraciones energéticas se obtuvo una relación teórica entre el número de Froude aguas arriba y aguas abajo de la bifurcación. También se desarrolló un método para calcular la división del flujo en bifurcaciones con relaciones de ancho entre 0.25 y 1 y ángulos entre  $30^\circ$  y  $90^\circ$ . Adicionalmente, los autores hallaron una expresión que permite determinar para un ángulo recto de bifurcación el cociente entre el caudal en el canal principal aguas abajo de la bifurcación ( $Q_u$ ) y el caudal de entrada ( $Q_a$ ) en función de los números de Froude en el canal principal aguas abajo de la bifurcación ( $F_u$ ) y en la derivación ( $F_a$ ):

$$\frac{Q_u}{Q_0} = \tanh \left[ 5(0.45 - F_a) F_u^{1/2} \right] \quad (23)$$

donde para  $F_a > 1/3$  se forma un resalto hidráulico en la derivación y debe adoptarse  $F_a = 1/3$  -cabe destacar que en esta sección se respeta la nomenclatura presentada en las secciones en las que se hace referencia a Hager (2010) y/o a trabajos citados por el mismo autor-. A partir de la ecuación (23), estableciendo relaciones de caudales, se graficaron los distintos pares de valores  $F_a, F_u$  que satisfacen cada condición, generando una familia de curvas de igual razón de descarga  $Q_u/Q_0$  (Figura 14).

De la interpretación de la Figura 14 se desprende que para  $Q_u/Q_0 > 0$  las curvas son funciones crecientes en todo su dominio, facilitando el análisis del flujo: dado un  $F_u$  fijo al aumentar  $F_a$  descende la relación de caudales  $Q_u/Q_0$  (se deriva mayor cantidad de caudal). Por otra parte, estableciendo un valor para  $F_a$  si aumenta  $F_u$ , entonces aumenta la relación  $Q_u/Q_0$  (el caudal derivado es menor).

Volviendo a Ramamurthy et al. (1990), se recuerda que los valores esperados de Froude en el canal principal aguas abajo de la bifurcación ( $F_u$  según Lakshmana Rao et al., 1968, citados por Hager, 2010, pero  $F_1$  según la notación introducida por Ramamurthy et al., 1990) superan siempre el valor 0.15. Contrastándolo con este trabajo se remarca que para obtener valores

mayores de  $F_u$  con la condición  $Q_u/Q_0 = 0.5$  debe garantizarse que el número de Froude en el canal de derivación ( $F_a$ ) sea mayor a 0.27. Por otra parte, con el modelo de Ramamurthy y Satish (1988) puede determinarse el mínimo valor para  $F_a$  estableciendo la formación del tirante crítico en la sección de máxima contracción, resultando  $F_u = 0.35$ . Esto corresponde a la condición de flujo no sumergido en la zona de bifurcación. De esta manera se constituyen condiciones más favorables, validándolas por el campo de valores  $F_u, F_a$  que brinda Lakshmana Rao et al., 1968 (citados por Hager, 2010).

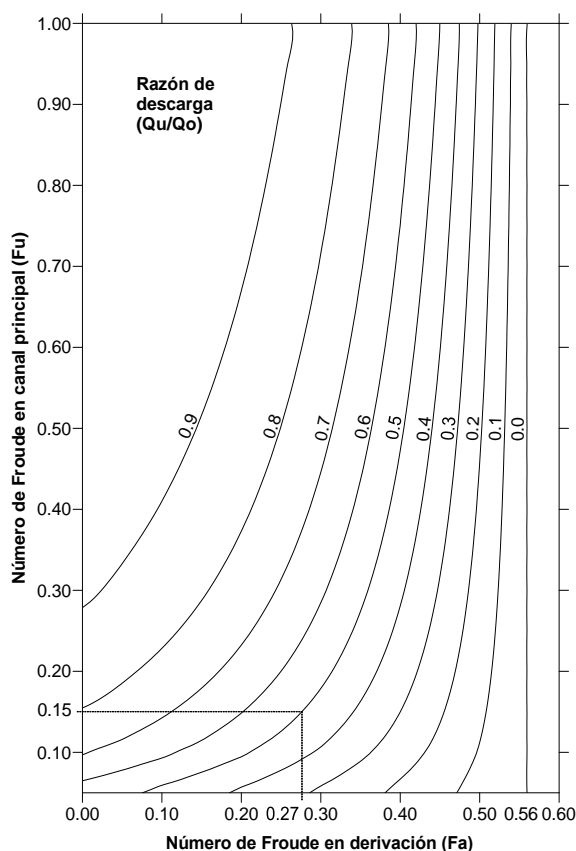


Figura 14. Curvas de igual  $Q_u/Q_0$  para distintos pares de valores  $F_a, F_u$ .

**División de flujo en conductos rectangulares cerrados**

Zhu (1995) explica que el desarrollo de las relaciones gobernantes que describen las características de la división de flujo en conductos rectangulares cerrados es muy similar al desarrollo de las relaciones para flujo a través de un vertedero lateral en un canal circular. En la Figura 15 se ilustra una salida rectangular lateral de un canal de longitud  $L$  en un conduc-

to de ancho  $B$ . El coeficiente de contracción  $C_c$  puede ser definido en este caso como:

$$C_c = \frac{\text{caudal/profundidad en el conducto}}{L V_j} \tag{24}$$

$C_c$  se plantea en función del parámetro geométrico  $L/B$  y del parámetro de velocidad  $\eta$ :

$$\eta = \frac{V_l}{V_j} = \sqrt{\frac{\frac{V_l^2}{2g}}{\frac{V_j^2}{2g} + \frac{p_l}{\gamma}}} \tag{25}$$

donde  $V_l$  y  $p_l$  son la velocidad axial del flujo y la presión en una sección de aproximación y  $V_j$  es la velocidad del chorro emergente desde la salida lateral (Figura 15). Teóricamente la velocidad del fluido a lo largo de la línea de flujo  $bc$  es constante (Figura 15). Puede remarcarse que los ensayos muestran que la velocidad se aproxima a la uniforme en la sección contraída  $cg$  (Figura 15) (Zhu, 1995).

Reformulando, Zhu (1995) redefine  $C_c$  en función de  $\eta$  y  $L/B$ :

$$C_c = C_c(\eta, L/B) \tag{26}$$

Si se acotan los rangos  $0 < L/B \leq 1$  y  $0 < \eta \leq 1$ , Zhu (1995) sugiere que el coeficiente  $C_c$  para un flujo bidimensional bifurcado mediante una abertura con orientador de flujo a  $90^\circ$  (Figura 15) puede ser determinado mediante:

$$C_c = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 \tag{27}$$

donde:

$$c_0 = 0.618 + 0.144(L/B) + 0.225(L/B)^2 \tag{28a}$$

$$c_1 = -0.096 - 0.286(L/B) - 0.977(L/B)^2 \tag{28b}$$

$$c_2 = -0.7 + 0.822(L/B) + 1.41(L/B)^2 \tag{28c}$$

$$c_3 = 0.2 - 0.685(L/B) - 0.644(L/B)^2 \tag{28d}$$

Zhu (1995) define al coeficiente de pérdida de energía a lo largo del canal principal como:

$$K_{12} = \frac{E_1 - E_2}{\frac{V_1^2}{2g}} \quad (29)$$

donde:

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \quad (30)$$

$$E_2 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (31)$$

siendo  $p_1$  y  $p_2$  las presiones en los puntos 1 y 2 (Figura 15). En los casos de flujo a superficie libre  $p/\gamma$  puede ser sustituido por el tirante.

Análogamente, el autor define al coeficiente de pérdida de energía a lo largo de la derivación como:

$$K_{13} = \frac{E_1 - E_3}{\frac{V_1^2}{2g}} \quad (32)$$

donde:

$$E_3 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} \quad (33)$$

Si se define la relación de caudales:

$$Q_r = \frac{Q_3}{Q_1} \quad (34)$$

la velocidad  $V_1$  puede escribirse:

$$V_1 = \frac{V_3}{Q_r} \frac{L}{B} \quad (35)$$

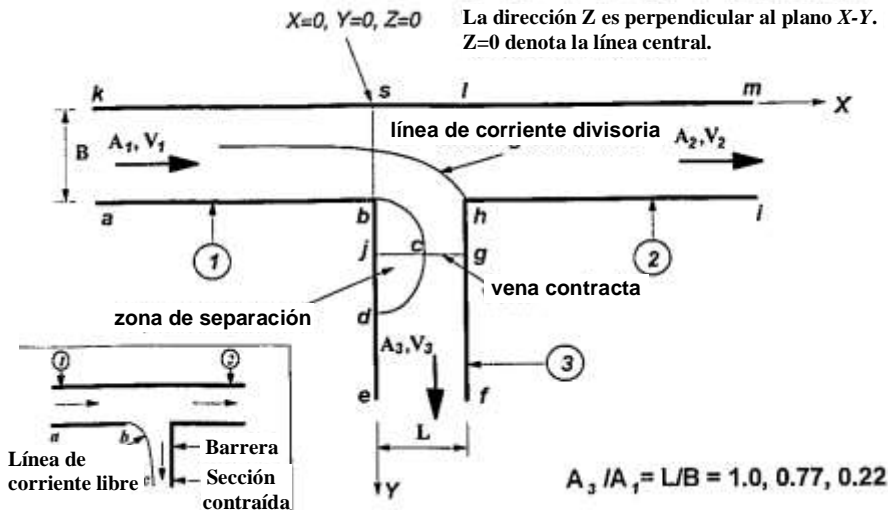


Figura 15. Esquema general de la división del flujo en conductos rectangulares (adaptado de Zhu, 1995).

El flujo que se deriva hacia el canal lateral se contrae en la región  $bc$ , se expande luego en la región  $cd$  y se vuelve a pegar a la pared del canal en el punto  $d$ . El flujo completamente desarrollado en toda la sección transversal ocurre en la sección  $e$ , la cual está distante desde la sección  $d$  (Figura 15). Según Zhu (1995) la expansión del flujo en la región  $cd$  experimentaría una considerable pérdida de energía, la cual depende del valor de  $C_c$  que a su vez es función de la relación de anchos  $L/B$  y  $\eta$  según la ecuación (26). Asumiendo que la expansión brusca del flujo en un conducto puede formularse mediante la

ecuación de pérdida en expansión de flujo en un canal, el coeficiente de pérdida de carga  $K_{13}$  puede ser escrito como:

$$K_{13} = \frac{Q_r}{L} \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \quad (36)$$

El flujo bifurcado no sigue estrictamente el perfil que sigue en una expansión brusca en un conducto, por lo tanto la ecuación (36) puede ser usada sólo a

modo de aproximación para obtener la relación para  $K_{13}$  (Zhu, 1995).

A partir de ensayos de laboratorio se reportaron resultados experimentales de valores de coeficientes de pérdida de carga, campo de flujo y perfiles de presiones para diferentes relaciones de caudales derivados y relaciones entre anchos de los conductos. En la Figura 16 se presenta el coeficiente de pérdida de carga  $K_{12}$  para relaciones de área mojada  $A_3/A_1$ , valores de  $K_{12}$  para distintos  $L/B$  (donde pueden observarse valores negativos de  $K_{12}$  para bajos rangos de  $Q_3/Q_1$ , explicado mediante análisis tridimensional de la energía en la zona de la división de flujo), valores del coeficiente de pérdida

$K_{13}$  en función de  $Q_3/Q_1$  y además para distintas relaciones  $L/B$ . Las gráficas de la Figura 17 corresponden a configuraciones del campo de flujo y perfiles de presiones para distintas alternativas de  $Q_3/Q_1$  y  $L/B$ : los perfiles de presiones corresponden al caso del conducto principal a una línea pegada a la pared opuesta a la abertura ( $km$ ), en la pared donde está la abertura ( $ab$  y  $hi$ ), en el caso del conducto lateral los perfiles de presiones corresponden a una línea pegada a la pared donde se produce el despegue de la corriente ( $be$ ) y otra línea pegada a la pared donde se producen altas velocidades ( $hf$ ). En la Figura 18, finalmente, se representan los patrones de las líneas de corriente en la zona de división de flujo para distintos  $L/B$ .

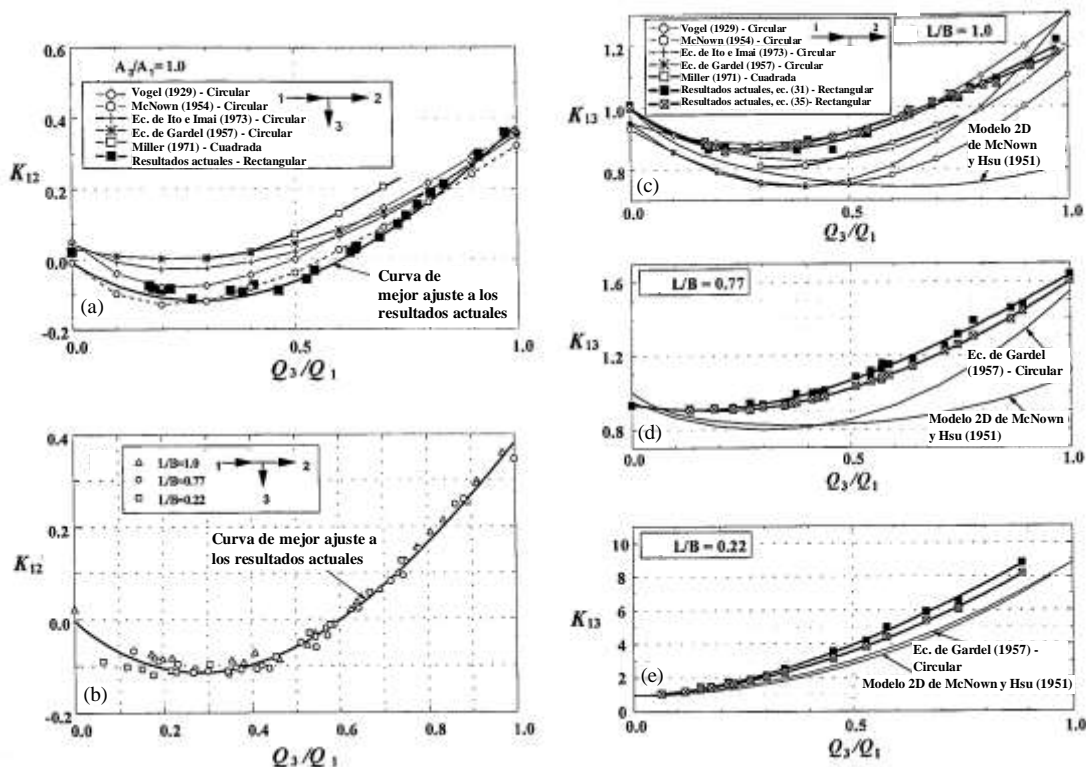


Figura 16. Coeficientes de pérdida de energía para bifurcaciones en conductos cerrados: (a)  $K_{12}$  para  $A_3/A_1 = 1$ ; (b)  $K_{12}$  para  $L/B = 1; 0.77; 0.22$ ; (c)  $K_{13}$  para:  $L/B=1$ ; (d)  $L/B = 0.77$ ; (e)  $L/B = 0.22$  (Vogel, 1929; citado por Zhu, 1995) (McNown, 1954; citado por Zhu, 1995) (Gardel, 1957; citado por Zhu, 1995) (Miller, 1971; citado por Zhu, 1995) (Ito e Imai, 1973; citado por Zhu, 1995) (adaptado de Zhu, 1995).

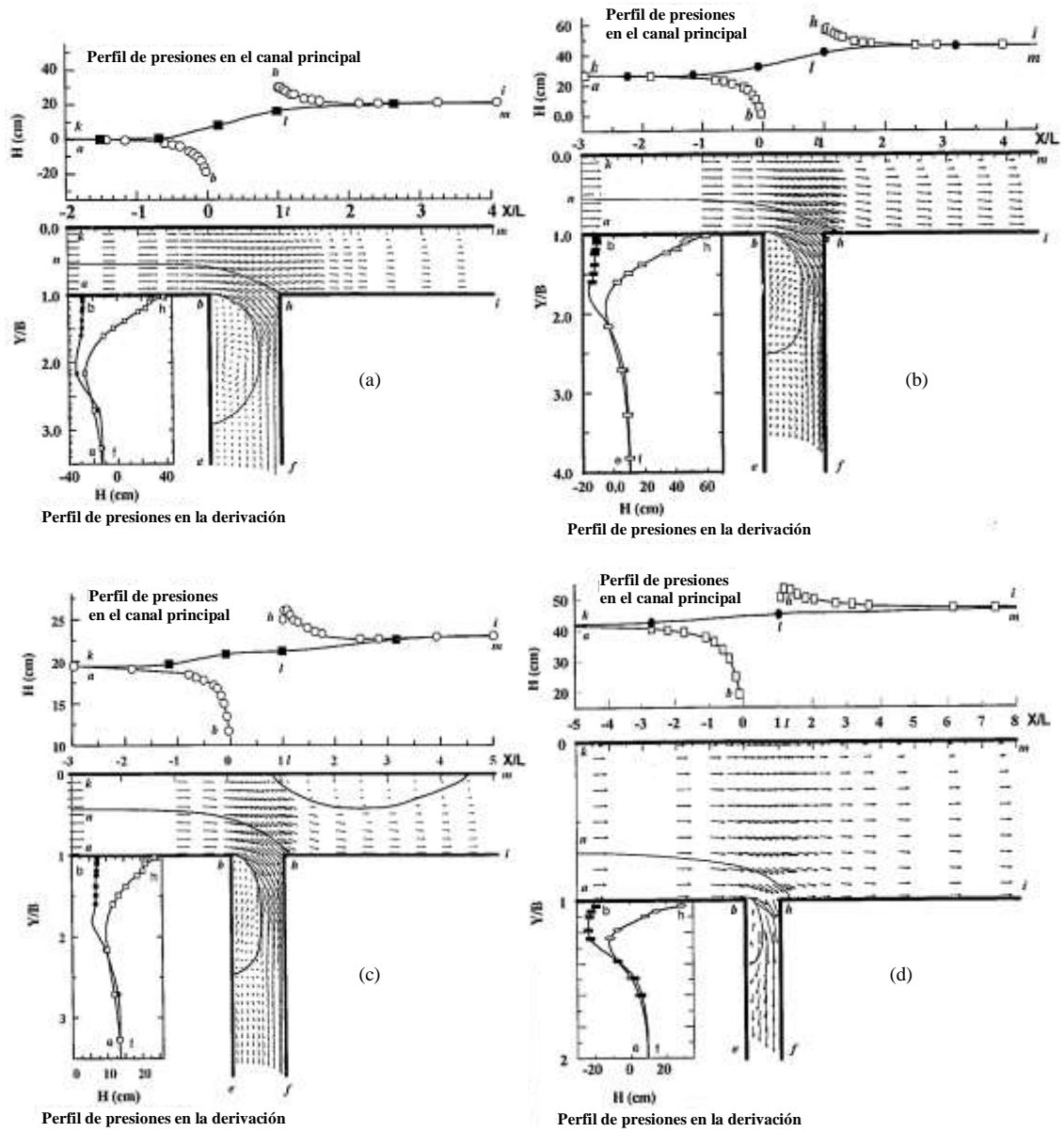


Figura 17. Campo de flujo y perfil de presiones para bifurcaciones en conductos cerrados: (a)  $L/B = 1, Q_3/Q_1 = 0.46$ ; (b)  $L/B = 0.77, Q_3/Q_1 = 0.42$ ; (c)  $L/B = 0.77, Q_3/Q_1 = 0.57$ ; (d)  $L/B = 0.22, Q_3/Q_1 = 0.3$  (adaptado de Zhu, 1995).

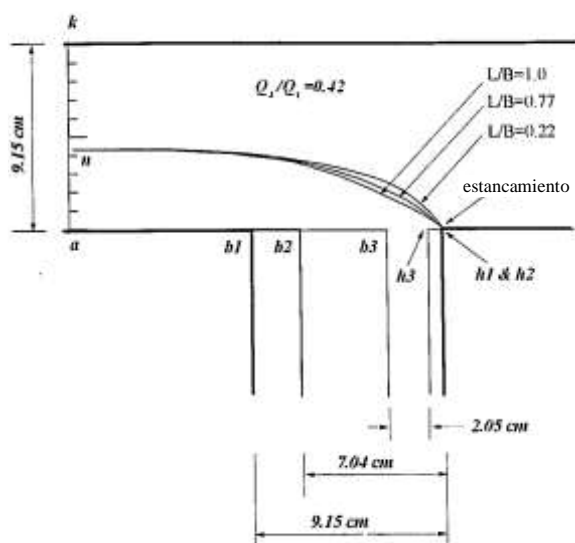


Figura 18. Patrones de la línea de división de flujo para distintos L/B (adaptado de Zhu, 1995).

**PREDISEÑO DE OBRA DE DERIVACIÓN DE FLUJO EN EL CANAL IBARLUCEA**

La recopilación bibliográfica relativa al caso de bifurcaciones a superficie libre fue llevada a cabo a los efectos de generar pautas de diseño para la obra hidráulica de división de flujo a proyectarse sobre el Canal Ibarlucea a la altura de la calle Grandoli en la zona norte de la ciudad de Rosario (Figura 19), la cual tiene como fin derivar una considerable porción del caudal transportado por el Canal Ibarlucea a través de un conducto de gran diámetro con descarga en el Río Paraná.

Se consideraron las siguientes características para el Canal Ibarlucea en el tramo de estudio:

- Caudal de diseño:  $Q_d = 300 \text{ m}^3/\text{s}$
- Sección transversal trapecial con base de fondo:  $B_f = 35 \text{ m}$ ; y talud lateral 1:1 (V:H)
- Pendiente de fondo:  $S_0 = 0.8 \text{ ‰}$
- Flujo uniforme
- Coeficiente de resistencia de Manning:  $n = 0.03$

En cuanto a la bifurcación, el ángulo más conveniente para la misma desde el punto de vista de las condiciones existentes resulta  $\theta = 60^\circ$ . El caudal que se pretende derivar es el 80% del que arriba a la bifurcación por el Canal Ibarlucea (aproximadamente  $240 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

En la Figura 20 se ilustran las gráficas de caudales (Q), velocidades medias en la sección (V) y números de Froude (F) en función del tirante de flujo en el Canal Ibarlucea (Y). Las variables hidráulicas de diseño son:  $B_f = 35 \text{ m}$ ;  $Q_d = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $Y_d = 4.37 \text{ m}$ ;  $V_d = 1.75 \text{ m/s}$ ;  $F_d = 0.27$ .

La mayor parte de los trabajos revisados consideran en sus modelaciones canales de sección rectangular, por lo que a modo de simplificación las variables de flujo consideradas para el Canal Ibarlucea se asemejaron a las de un canal rectangular de  $B_f = 35 \text{ m}$ . Como canal de derivación se calculó en todos los casos uno de sección rectangular.

**Abordaje del prediseño según Cerrato et al., 1985**

En este caso la situación que más se asemeja a la condición de proyecto corresponde a una derivación del 65% del caudal entrante ( $195 \text{ m}^3/\text{s}$ ), con relaciones de ancho:  $b_3/b_1 = 0.7$  y  $b_1/b_2 = 2$ ; y ángulo de bifurcación  $\theta = 60$  (Figura 21). Este ángulo es el que de acuerdo a los autores permite la máxima derivación de caudal. El trabajo de Cerrato et al. (1985) no provee mas información que permita describir otras características del flujo.

Sin embargo, planteando una solución más simple constructivamente en la que el canal principal permanezca geoméricamente invariable a ambos lados de la derivación ( $b_1 = b_2$ ), no resulta posible derivar más del 46% del caudal entrante al canal principal (para  $\theta = 60^\circ$ ), y sólo un 44% asumiendo una bifurcación recta (en ambos casos  $b_3/b_1 = 0.7$ ).

**Pérdidas de energía según Mock (1960) (citado por Hager, 2010)**

Además del análisis cualitativo del flujo, es interesante observar las expresiones que brinda este autor para los coeficientes de pérdida, tanto a lo largo del canal principal como en la derivación. Estos coeficientes de pérdida de energía son calculados con relación a la carga de velocidad en el canal principal antes de la bifurcación. Debido a las limitaciones del método, los canales debieron considerarse rectangulares y de igual ancho. Respetando la nomenclatura original, desde ecuación (1) se puede establecer:

$$q_a = \frac{Q_a}{Q_0} = 0.8 \tag{37}$$

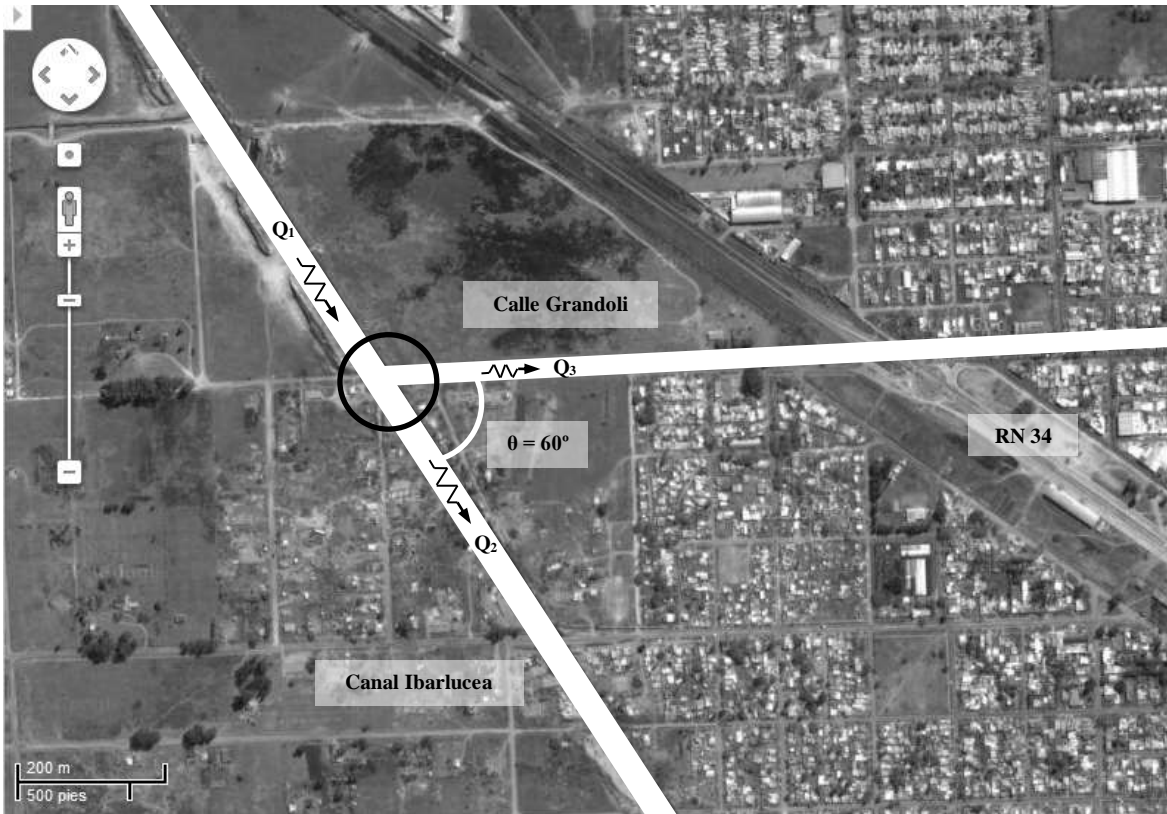


Figura 19. Zona de emplazamiento de la obra de división de flujo: Canal Ibarlucea y calle Grandoli (fuente: GoogleEarth®).

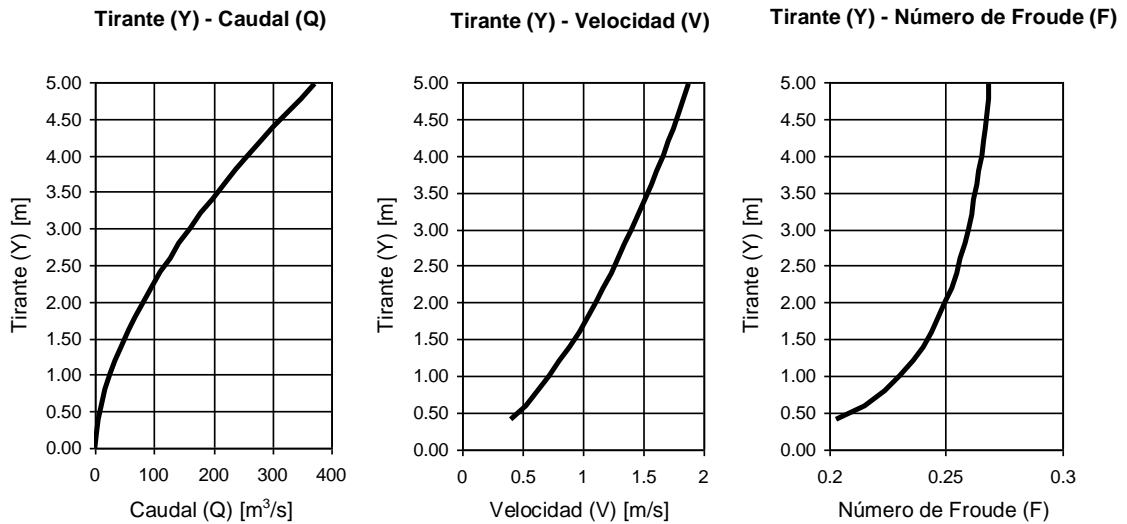


Figura 20. Caudal (Q), velocidad (V) y número de Froude (F) en función del tirante del flujo en el Canal Ibarlucea (Y).

De acuerdo con la ecuación (4):

$$\xi_a = 1 - \frac{5}{4}q_a + 0.725q_a(1 + q_a^2)\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (38)$$

$$\xi_a = 1 - \frac{5}{4}0.8 + 0.725 \times 0.8(1 + 0.8^2)\tan\left(\frac{60}{2}\right) = 0.5492 \quad (39)$$

Asumiendo  $Y_0 = 4.37$  m y sección rectangular de  $B_f = 35$  m, resulta:  $V_0 = 1.96$  m/s;  $V_0^2/2g = 0.20$  m;



$H_0 = 4.57$  m;  $F_0 = 0.3$ . Por otro lado, considerando la ecuación (2) se determina:

$$H_a = H_0 - \xi_a V_0^2 / 2g \quad (40)$$

$$H_a = 4.57\text{ m} - 0.5492 \times 0.20\text{ m} = 4.46\text{ m} \quad (41)$$

De acuerdo con la ecuación (5), el coeficiente de pérdida de energía en el ramal saliente alineado con el canal principal ( $u$ ) es:

$$\xi_u = 0.45 q_a (q_a - 0.5) = 0.45 \times 0.8 \times (0.8 - 0.5) = 0.1080 \quad (42)$$

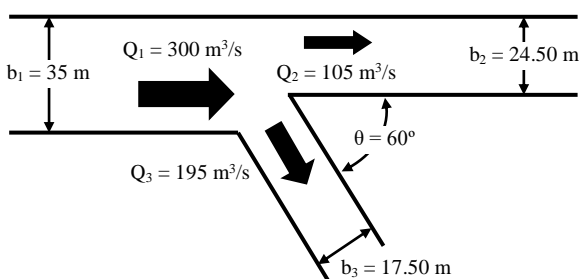


Figura 21. Esquema de estudio según Cerrato et al., 1985.

Luego, a través de la ecuación (3) puede determinarse la energía en el ramal saliente alineado ( $u$ ):

$$H_u = H_0 - \xi_u V_0^2 / 2g = 4.57 - 0.1080 \times 0.20 = 4.55\text{ m} \quad (43)$$

Análogamente, y de manera de comparar valores calculados según los otros estudios, se calcularon las pérdidas de carga considerando la configuración de canal derivador a  $90^\circ$  ( $\delta = 90^\circ$ ) y estableciendo una derivación de la mitad del caudal transportado por el Canal Ibarlucea ( $q_a = 0.5$ ) -Tabla 1-. Entonces, según las ecuaciones (4) y (5):

$$\xi_a = \xi_3 = 0.8281; \xi_u = \xi_2 = 0 \quad (44)$$

### Descripción del flujo según los modelos de Ramamurthy y Satish (1988)

De manera de aplicar el modelo teórico propuesto por Ramamurthy y Satish (1988) (y siguiendo la nomenclatura presentada en tal oportunidad) se calcularon las derivaciones considerando dos relaciones de anchos  $L/B$ : 0.5 y 1. Dadas las condiciones de diseño en el Canal Ibarlucea, se dispone del número de Froude aguas arriba de la bifurcación  $F_1 = F_d$  y con éste se obtiene el parámetro de velocidades  $\eta_1$  a través de la ecuación (13). Luego, con  $\eta_1$ , y empleando las curvas presentadas en la Figura

8 para cada razón  $L/B$ , se obtuvieron los coeficientes de contracción  $C_c$ . Con estos últimos, y mediante la ecuación (14), se calcularon las razones de descarga  $Q_3/Q_1$  correspondientes a cada caso: para  $L/B = 1$  se admite una derivación  $Q_3/Q_1 = 93\%$ , mientras que para una relación de anchos  $L/B = 0.5$  la derivación se limita al 50% del caudal que arriba a la bifurcación. Luego, el tirante en el canal principal aguas abajo de la bifurcación ( $h_2$ ) se calcula a través de la ecuación (15) y el número de Froude en el canal principal aguas abajo de la bifurcación ( $F_2$ ) se calcula mediante la ecuación (16). Con las curvas  $h-Q$  del canal de derivación en sus dos variantes ( $L/B = 0.5$  y  $L/B = 1$ ) se comprueba que el número de Froude en el mismo sea  $F_3 > 0.35$ . De modo de cumplir tal condición se debe asegurar una pendiente de fondo mínima de 1‰ en el canal de derivación con la relación de anchos  $L/B = 1$ , aumentándose el límite de la pendiente de fondo a 1.2‰ para  $L/B = 0.5$ . Cabe aclarar que se asume una pendiente propia del terreno natural en la zona de la obra del 0.8‰, demandando trabajos de movimientos de suelo en cualquiera de las dos variantes de canal de derivación que sea eventualmente implementada.

Por otra parte, aplicando el método gráfico sugerido por Ramamurthy y Satish (1988) -o método iterativo de cálculo del caudal derivado  $Q_3$  basado en las gráficas de la Figura 10 ( $F_2$  en función de  $Q_3/Q_1$  para distintas relaciones de ancho  $L/B$ ), gráficas que para las relaciones  $L/B = 0.5$  y 1 (las variantes de canal de derivación propuestas para la obra en cuestión) se repiten más detalladamente en la Figura 22- cuyo procedimiento está explicado en el diagrama de flujo de la Figura 11, se puede llegar a una derivación  $Q_3/Q_1 = 50\%$  para una relación de anchos  $L/B = 1$ , mientras que para una relación de anchos  $L/B = 0.5$ , este método explica una derivación  $Q_3/Q_1 = 36\%$ . Como indica el diagrama de flujo de la Figura 11, dadas las curvas  $h-Q$  de los canales y para cada relación de anchos  $L/B$ , se propone un valor de prueba  $Q_2'$  que permite obtener la derivación  $Q_3/Q_1$  al fin de la iteración mediante  $F_2'$  utilizando las gráficas de la Figura 10 (que se repiten para el cálculo de la obra en cuestión en la Figura 22), debiendo coincidir los tirantes calculados con los de la curva  $h-Q$  en el canal principal aguas abajo de la bifurcación y finalmente verificando la condición  $F_3 > 0.35$ . Puede observarse que este método da valores menores de caudales derivados. Esto es porque las gráficas de  $F_2$  en función de  $Q_3/Q_1$  para distintas  $L/B$  darían valores máximos de  $F_2$  los que corresponden a menores relaciones de caudal derivado (Figura 22).

En ambos casos -para el modelo teórico propuesto por Ramamurthy y Satish (1988) y el método gráfico sugerido por los mismos autores- y donde estaban disponibles los datos de velocidad requeridos, se calcularon las pérdidas de carga relativas a la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación -ecuaciones (2) y (3), siendo  $\zeta_2$  la pérdida a lo largo del canal principal y  $\zeta_3$  la pérdida en la derivación-. Las pérdidas a lo largo del canal principal ( $\zeta_2$ ) según los resultados obtenidos por el método gráfico dan valores muy grandes y distintos a los obtenidos por el modelo teórico (hasta de distinto signo insinuando que el tirante en vez de subir disminuiría en el canal principal) poniendo en duda la capacidad de este método para resolver el problema (Tabla 1). Por lo tanto se tomó la decisión de adoptar la resolución por el modelo teórico, pero sin dejar de lado el hecho de que el método gráfico constituiría un proceso más simple y rápido para resolver el problema.

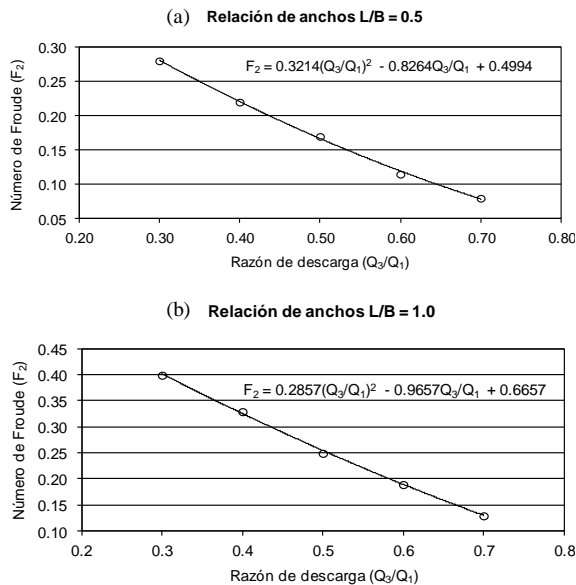


Figura 22. Gráficas de  $F_2$  en función de  $Q_3/Q_1$  para: (a)  $L/B = 0.5$ ; (b)  $L/B = 1$ .

La longitud necesaria del canal derivador para llegar a la sección donde el flujo sea uniforme según los autores es de cuatro veces el ancho del canal de derivación,  $4L$  (Ramamurthy y Satish, 1988). Esto podría servir como base para definir una longitud del canal derivador donde se mantengan las condiciones de sección y pendiente de fondo impuestas inicialmente para asegurar la descarga de derivación.

### Descripción del flujo según el modelo de Ramamurthy et al. (1990)

El estudio que hacen Ramamurthy et al. (1990) presenta otro enfoque para resolver el mismo problema, asumiendo una relación de anchos unitaria entre los canales principal y de derivación. Establecidas las curvas  $h-Q$  de los canales principal y de derivación, y la condición de diseño en el Canal Ibarlucea se propuso una relación de derivación  $R_q = Q_2/Q_1 = 0.5$  y luego se obtuvo la relación de tirantes  $R_y = y_1/y_2 = 0.9571$  -ecuaciones (20)- a través de la gráfica de la Figura 13, que relaciona  $F_1$  con  $R_q$  para distintas  $R_y$ . Los resultados brindados son similares a los obtenidos a través de la aplicación del modelo teórico de Ramamurthy y Satish (1988) pero para la relación de anchos de 0.5 (Tabla 1).

Análogamente a las aplicaciones anteriores, con los valores de tirantes y la velocidad en el canal principal antes de la bifurcación, se calcularon los coeficientes de pérdida según la velocidad de aproximación del flujo -ecuación (3)- que supondrían la entrada y las salidas a la bifurcación ( $\zeta_2$ , en el canal principal), dando valores distintos a los obtenidos con el modelo propuesto por Ramamurthy y Satish (1988) -Tabla 1-.

### Validación de un modelo mediante Lakshamana Rao et al. (1968); citados por Hager (2010)

La aplicación de la ecuación (23) presentada por Lakshamana Rao et al. (1968), citados por Hager (2010) al caso planteado de la derivación de caudales del Canal Ibarlucea permite confirmar los resultados obtenidos con los modelos de Ramamurthy y Satish (1988) y Ramamurthy et al. (1990) para derivaciones del 50% del caudal, según las cuales el número de Froude en el canal de derivación ( $F_3$ ) debería siempre ser mayor a 0.27 (Figura 14). Por esta razón se decidió elegir el modelo teórico de Ramamurthy y Satish (1988) para explicar el flujo en la bifurcación, que aumentaría este límite del número de Froude en la derivación a  $F_3 = 0.35$ , pero que permitiría una relación de anchos de  $L/B = 0.5$  para derivar el 50% del caudal. Para lograr cumplir tal limitación, se debe recurrir al aumento de la pendiente de fondo del canal derivador, tal como fue explicado previamente.

**Resumen de resultados**

Las resoluciones del caso de la derivación de caudales en el Canal Ibarlucea presentadas en este trabajo, a través de las distintas metodologías expuestas al comienzo del mismo, coinciden en la derivación de al menos la mitad del caudal transportado. Por esta razón se exponen a continuación

únicamente (y a modo de poder compararlos) los resultados correspondientes a la derivación  $Q_3/Q_1 = 0.5$  (Tabla 1).

Finalmente se propuso un conjunto de características geométricas preliminares para la obra de derivación siguiendo el modelo teórico propuesto por Ramamurthy y Satish, 1988 (Tabla 2).

**Tabla 1. Resumen de resultados según las aplicaciones de distintos métodos; (\*) no disponible debido a las consideraciones del autor correspondiente (nomenclatura según Ramamurthy y Satish, 1988)**

$Q_3/Q_1 = 0.5$	Mock, 1960 (citado por Hager, 2010)	Ramamurthy y Satish, 1988 (teórico)	Ramamurthy y Satish, 1988 (gráfico)	Ramamurthy et al., 1990
$L/B$	1	0.5	1	1
$\zeta_2$	0	-0.67	6.61	-0.80
$\zeta_3$	0.83	1.09	*	*
$h_1$ [m]	4.09	4.09	4.09	4.09
$h_2$ [m]	*	4.24	2.61	4.27
$h_3$ [m]	*	3.85	*	*
$F_1$	0.33	0.33	0.33	0.33
$F_2$	*	0.16	0.25	0.16
$F_3$	*	0.36	*	*

**Tabla 2. Dimensiones tentativas para la obra de derivación del Canal Ibarlucea para derivar el 50% del caudal que arriba al mismo.**

Ancho Canal Ibarlucea [m]	$S_0$ (Canal Ibarlucea)	Ángulo de bifurcación ( $\theta$ )	Ancho canal derivador [m]	Longitud canal derivador [m]	$S_0$ (canal derivador)
35.00	0.8‰	90°	17.50	70.00	1.2‰

**CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

El flujo a través de bifurcaciones resulta ser un fenómeno que depende de un grupo de variables tanto geométricas como hidráulicas: ángulo de bifurcación, forma y pendiente de los canales, direcciones de flujo y caudales, tipo de régimen de escurrimiento, etc. La aparición de separación del flujo de las paredes de los canales, recirculación en la derivación y formación de olas tanto en el canal principal como en el derivador denotan un flujo necesariamente tridimensional y hace necesario, además, el conocimiento de la dimensión espacial de tales fenómenos con el fin de proteger los canales. En consecuencia, resulta dificultoso definir un análisis general que abarque todos los casos. Los modelos teóricos son sólo capaces de resolver situaciones puntuales a veces no coincidentes con casos reales, debido por ejemplo al planteo de hipótesis simplificadoras necesarias para la aplicación de las ecuaciones de momento donde variables de compleja determinación

son eliminadas (e.g. flujo estrictamente bidimensional). Restricciones como las recién explicadas sugieren que para describir el mecanismo hidráulico del flujo en bifurcaciones se hace necesario recurrir conjuntamente al estudio experimental y al planteo matemático de modo de obtener descripciones del flujo que respondan a cada aplicación en particular.

Sin dejar de reconocer las limitaciones, de este trabajo se obtuvieron lineamientos para el diseño de esta obra de división de flujo. Si bien el ángulo de bifurcación influye en la cantidad de caudal derivado, las diferencias no son considerables y puede definirse preliminarmente en emplazar el canal derivador en ángulo recto con el Canal Ibarlucea, constituyendo una conveniencia técnica simplificadora.

En cuanto a la determinación del caudal derivado respecto de las características físicas del canal derivador se llega a conclusiones dispares. Los resultados obtenidos a través de los distintos métodos apli-

cados son diferentes; sin embargo todos coinciden en que es posible derivar al menos un 50% del caudal que llega al canal, a través de restricciones geométricas a imponer al canal derivador en cada caso. Una coincidencia en la imposición de un número de Froude mínimo en el canal derivador aguas abajo de la bifurcación brindado por dos enfoques distintos a la problemática (Lakshmana Rao et al, 1968, citados por Hager, 2010, y el modelo teórico de Ramamurthy y Satish, 1988) justificó la elección del modelo teórico presentado por Ramamurthy y Satish (1988), mediante el cual se explica una derivación de la mitad del caudal que ingresa al canal principal a través de un canal derivador de la mitad del ancho del canal principal, con la imposición de una pendiente de fondo mínima para el canal derivador de modo de asegurar la condición de flujo necesaria en el mismo. Se propuso un diseño para la obra analizando el flujo según este modelo (Tabla 2). De todas maneras, se insiste en que esto constituye sólo el punto de partida y que es necesario continuar la investigación a través de la modelación física para poder completar el diseño de una obra hidráulica de tal magnitud, donde se desea derivar un 80% del caudal que llega a la bifurcación.

## LISTADO DE NOTACIONES

(según orden de aparición)

$O$ : sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$a$ : sección representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$u$ : sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$h_o$ : tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$h_a$ : tirante del flujo en sección representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$h_u$ : tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$b_o$ : ancho del tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$b_a$ : ancho del canal de derivación.

$b_u$ : ancho del tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$b_1$ : ancho del tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$b_2$ : ancho del tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$b_3$ : ancho del canal de derivación.

$\delta$ : ángulo de bifurcación; ángulo entre los alineamientos del canal principal y del canal de derivación.

$\theta$ : ángulo de bifurcación; ángulo entre los alineamientos del canal principal y del canal de derivación.

$C$ : coeficiente de descarga introducido por Cerrato et al., 1985.

$Q_o$ : caudal (total) que arriba a la bifurcación; caudal del flujo en el canal principal antes de la bifurcación.

$Q_a$ : caudal derivado; caudal del flujo en el canal derivador.

$Q_u$ : caudal del flujo en el canal principal luego de la bifurcación; caudal no derivado.

$V_o$ : velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación; velocidad media del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$F_o$ : número de Froude en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$F_a$ : número de Froude en una sección representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$F_u$ : número de Froude en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$g$ : aceleración de la gravedad ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

$H_o$ : energía total del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$H_a$ : energía total del flujo en una sección representativa del tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$H_u$ : energía total del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$q_a$ : proporción de caudal derivado; razón entre el caudal derivado y el caudal (total) que arriba a la bifurcación, definido por la ecuación (1).

$\xi_a$ : coeficiente de pérdida de carga en la derivación, relativo a la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación y definido según la ecuación (2).

$\xi_u$ : coeficiente de pérdida de carga en el canal principal, relativo a la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación y definido según la ecuación (3).

$\beta_a$ : razón entre los anchos del canal de derivación y del canal principal, definida según la ecuación (7), y siendo para esta definición el ancho del canal principal no variable a ambos lados de la bifurcación.

$C_c$ : coeficiente de contracción del flujo derivado (Figura 6).

$C_{cs}$ : coeficiente de contracción de la vena líquida en el canal de derivación correspondiente a un flujo cuyo número de Froude en una sección representativa del tramo de canal principal posterior a la bifurcación es mucho mayor que cero.

$C_\delta$ : coeficiente adimensional variable entre 0 y 1 que multiplicado al ángulo entre los alineamientos del canal de derivación y del canal principal (recto en el caso de esta definición) brinda el ángulo de bifurcación de la vena líquida (Figura 6).

$B$ : ancho del canal principal, no variable a ambos lados de la bifurcación para esta definición (Figura 7).

$L$ : ancho del canal de derivación (Figura 7).

$I$ : sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación (Figura 7).

2: sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación (Figura 7).

3\*: sección transversal del flujo en el canal de derivación situado en la posición de máxima contracción de la vena líquida (Figura 7).

3: sección transversal del flujo en el canal de derivación situada a una distancia aproximada de cuatro veces el ancho del canal de derivación desde la entrada al mismo (Figura 7).

$F_1$ : número de Froude en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$F_2$ : número de Froude en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$F_3$ : número de Froude del flujo derivado en una sección situada a una distancia aproximada de cuatro veces el ancho del canal de derivación desde la entrada al mismo.

$\eta_1$ : parámetro de velocidad, razón entre la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación o veloci-

dad media del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal anterior a la bifurcación y la velocidad media del flujo en la sección de máxima contracción de la vena líquida y definido por la ecuación (12).

$V_1$ : velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación; velocidad media del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$V_2$ : velocidad media del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$V_{3*}$ : velocidad media del flujo en la sección de máxima contracción de la vena líquida.

$V_3$ : velocidad media del flujo derivado en una sección situada a una distancia aproximada de cuatro veces el ancho del canal de derivación desde la entrada al mismo.

$Q_1$ : caudal (total) que arriba a la bifurcación; caudal del flujo en el canal principal antes de la bifurcación.

$Q_2$ : caudal del flujo en el canal principal luego de la bifurcación; caudal no derivado.

$Q_3$ : caudal derivado; caudal del flujo en el canal derivador.

$h_1$ : tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$h_2$ : tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$h_3$ : tirante del flujo en sección representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$h_c$ : tirante crítico en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$b_1$ : ancho del canal principal, requiriendo para esa definición que sea invariable a ambos lados de la bifurcación e igual al ancho del canal de derivación (Figura 12).

$b_{II}$ : ancho que ocuparía en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación el flujo no derivado (Figura 12).

$b_{III}$ : ancho que ocuparía en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación el flujo a derivar (Figura 12).

$Y_1$ : tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$Y_2$ : tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$Y_3$ : tirante del flujo en sección representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$k$ : coeficiente dependiente del número de Froude en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación, definido según la ecuación (18).

$R_q$ : razón entre el caudal del flujo en el canal principal luego de la bifurcación o caudal no derivado y el caudal (total) que arriba a la bifurcación o caudal del flujo en el canal principal antes de la bifurcación, definida por una de las ecuaciones (20).

$R_y$ : razón entre el tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación y el tirante del flujo en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación, definida por una de las ecuaciones (20).

$V_j$ : velocidad de la vena líquida en la bifurcación, en la dirección de la misma.

$\eta$ : parámetro de velocidad, razón entre la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación o velocidad media del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal anterior a la bifurcación y la velocidad de la vena líquida en la bifurcación, en la dirección de la misma, definido por la ecuación (25).

$p_1$ : presión del fluido en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$p_2$ : presión del fluido en una sección representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$p_3$ : presión del fluido en sección representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$\gamma$ : peso específico del agua ( $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).

$E_1$ : energía total del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal anterior a la bifurcación, definida por la ecuación (30).

$E_2$ : energía total del flujo en una sección representativa del tramo de canal principal posterior a la bifurcación, definida por la ecuación (31).

$E_3$ : energía total del flujo en una sección representativa del tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación, definida por la ecuación (33).

$K_{12}$ : coeficiente de pérdida de carga en el canal principal, relativo a la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación, definido según la ecuación (29).

$K_{13}$ : coeficiente de pérdida de carga en la derivación, relativo a la velocidad de aproximación del flujo a la bifurcación, definido según la ecuación (32).

$Q_r$ : razón entre el caudal derivado o caudal del flujo en el canal derivador derivado y el caudal (total) que arriba a la bifurcación o caudal del flujo en el canal principal antes de la bifurcación, definida por la ecuación (34).

$A_1$ : área mojada de la sección transversal representativa del flujo en el tramo de canal principal anterior a la bifurcación.

$A_2$ : área mojada de la tirante sección transversal representativa del flujo en el tramo de canal principal posterior a la bifurcación.

$A_3$ : área mojada de la sección transversal representativa del flujo en el tramo de canal de derivación posterior a la bifurcación.

$Q_d$ : caudal de diseño; caudal a transportar por el Canal Ibarlucea en la situación considerada para el diseño de la obra de bifurcación.

$V_d$ : velocidad media del flujo en el Canal Ibarlucea en una sección representativa del tramo del mismo anterior a la bifurcación en la situación de diseño.

$Y_d$ : tirante del flujo en el Canal Ibarlucea en una sección representativa del tramo del mismo anterior a la bifurcación en la situación de diseño.

$F_d$ : número de Froude en el Canal Ibarlucea en una sección representativa del tramo del mismo anterior a la bifurcación en la situación de diseño

$S_0$ : pendiente de fondo del Canal Ibarlucea en las proximidades de la bifurcación y de su canal derivador, asociada a la pendiente del terreno natural de la zona.

$n$ : coeficiente de rugosidad de Manning utilizado para el análisis del flujo a superficie libre en la derivación del Canal Ibarlucea.

$\xi_2$ : coeficiente de pérdida de carga en el Canal Ibarlucea luego de la bifurcación, en la situación de diseño, computado según Mock (1960; citado por Hager, 2010).

$\xi_3$ : coeficiente de pérdida de carga en la derivación del Canal Ibarlucea en la situación de diseño, computado según Mock (1960; citado por Hager, 2010).

## REFERENCIAS

Cerrato, J. C., Mangiamelli, S., Pouey, N., 1985. *Estudio experimental de la bifurcación de canales. Flujo dividido*. XII Congreso Nacional del Agua, Mendoza, Argentina, 21 p.  
 Hager, W., 2010. *Wastewater Hydraulics. Theory and Practice*. Second edition, Springer, 652 p.

Law, S. W., 1965. *Dividing flow in an open channel*. Thesis, McGill University, Montreal, Canadá.  
 Ramamurthy, A. y Satish, M., 1988. *Division of flow in short open channels branches*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 114 (4), pp. 428-438.  
 Ramamurthy, A.S., Tran, D.M., Carballada, L.B., 1990. *Dividing flow in open channels*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 116 (3), pp. 449-455.  
 Sridharan, L., 1966. *División of flow in open channels*. Thesis, Indian Institute of Science, Bangalore, India.  
 Zhu, W., 1995. *Characteristics of Dividing and Combining Flows*. Thesis, Concordia University Montreal, Quebec, Canadá.

*Artículo recibido el 11/2011 y aprobado para su publicación el 06/2012.*