



Instructions for authors, subscriptions and further details:

<http://redimat.hipatiapress.com>

Discurso Docente y Prácticas Democráticas en la Clase de Matemáticas

Yuly Vanegas¹, Ubiratan D'Ambrosio² y Joaquim Giménez Rodríguez¹

1) Universitat de Barcelona, Spain

2) Universidade de Sao Paulo, Brazil

Date of publication: June 24th, 2019

Edition period: June 2019-October 2019

To cite this article: Vanegas, Y., D'Ambrosio, U., and Giménez Rodríguez, J. (2019). Discurso y prácticas democráticas en la clase de matemáticas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 8(2), 139-165. doi: [10.17583/redimat.2019.3112](https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3112)

To link this article: <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2019.3112>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

The terms and conditions of use are related to the Open Journal System and to [Creative Commons Attribution License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (CCAL).

Teaching Discourse and Democratic Practices in the Math Class

Yuly Vanegas
*Universitat de
Barcelona*

Ubiratan D'Ambrosio
*Universidade de Sao
Paulo*

Joaquim Giménez
*Universitat de
Barcelona*

(Received: 03 December 2017; Accepted: 13 May 2018; Published: 24 June 2019)

Abstract

In this paper we present a characterization of mathematical practices, which we call democratic, taking into account the analysis of debates that have taken place in the development of a didactic unit of algebra with 12-13 years old students. We reflect on the role of the teacher in each debate and characterize the types of practices at different times. We start from the democratic educational perspective of ethnomathematics and integrate it with approaches to the collaborative construction of meanings. Our analysis shows that the actions of the teacher and the students in an experience of deliberative mathematical participation make it possible to successfully negotiate mathematical meanings.

Keywords: Mathematics education, mathematical practices, democratic debates, construction of meanings

Discurso Docente y Prácticas Democráticas en la Clase de Matemáticas

Yuly Vanegas
Universitat de
Barcelona

Ubiratan D'Ambrosio
Universidade de Sao
Paulo

Joaquim Giménez
Universitat de
Barcelona

(Recibido: 03 Diciembre 2017; Aceptado: 13 Mayo 2018; Publicado: 24 Junio 2019)

Resumen

En este artículo presentamos una caracterización de prácticas matemáticas, que denominamos democráticas, teniendo en cuenta el análisis de debates que se han producido en el desarrollo de una unidad didáctica de álgebra con estudiantes de 12-13 años. Se reflexiona sobre el papel del docente en cada debate y se caracterizan los tipos de prácticas en distintos momentos. Partimos de la perspectiva educativa democrática de la etnomatemática y la integramos con planteamientos sobre la construcción colaborativa de significados. Nuestro análisis muestra que las actuaciones del profesor y los estudiantes en una experiencia de participación deliberativa matemática posibilitan negociar exitosamente significados matemáticos.

Palabras clave: Educación matemática, prácticas matemáticas, debates democráticos, construcción de significados

Desde hace varios años se ha planteado que es necesario defender la escuela como un servicio público importante, cuyo objetivo mayor es la formación de los estudiantes para ser ciudadanos críticos.

Autores como Giroux y McLaren (1989); D'Ambrosio (1990) y Skovsmose (1999), resaltan la necesidad de formar sujetos con capacidad para pensar, desafiar, correr riesgos y creer que sus acciones pueden transformar la sociedad, para mejorarla. En consonancia con estos planteamientos, en el contexto de la Educación Matemática, se considera que uno de los grandes desafíos que tenemos los profesores es reconocer cómo la enseñanza de las matemáticas hace parte y contribuye al desarrollo de objetivos amplios de la educación, por ejemplo, los enunciados en la Declaración de Derechos Humanos de 1948.

Por otra parte, se propone que la formación escolar, debe favorecer una construcción colaborativa de significados y debe facilitar el desarrollo de una alfabetización matemática que permita a los ciudadanos ejercer una competencia democrática. En dicha competencia se asume que el foco debe ser aprender a vivir el aula y educar para la democracia (Darling-Hammond, 1996). Asimismo, buscar que los estudiantes sepan participar en una sociedad, tomando decisiones fundamentadas, considerando múltiples perspectivas y reconociendo la influencia positiva que las matemáticas pueden ejercer en las formas de pensar (Ellis y Malloy, 2007). Desde esta perspectiva, se sugiere que una clase democrática involucra cuatro características distintivas: a) un currículo basado en la resolución de problemas; b) una cultura de la inclusión y los derechos; c) una participación igualitaria en la toma de decisiones y d) la generación oportunidades y estímulos para que todos aprendan las matemáticas de forma exitosa. Si bien estas cualidades no pretenden definir los planes de estudio, sirven de base para organizar la interacción que se genera en el aula.

Lo anterior implica, la necesidad de revalorizar la construcción de un sentido ético de la responsabilidad profesional del docente y llevar a cabo investigaciones orientadas al análisis de las características mencionadas, por ejemplo, la desarrollada por Planas y Edó (2008) relacionada en el estudio de procesos exitosos de construcción de significados que muestran la relevancia del análisis de la participación en la clase de matemáticas, así como el análisis del discurso del docente, en cuanto genera debates y oportunidades de aprendizaje. O la planteada por Colomina, Onrubia y

Rochera (2001) en la que se identifican la evolución favorable de mecanismos de influencia educativa como: la construcción progresiva de los sistemas de significados compartidos y el traspaso del control y responsabilidad en el aprendizaje del profesor a los estudiantes, cuando se propicia una atmósfera cooperativa.

En este sentido, el objetivo de este artículo es mostrar como a través de una experiencia de debates matemáticos, en el desarrollo de una unidad didáctica de iniciación al álgebra escolar, con estudiantes de 12-13 años, podemos caracterizar actuaciones, (que llamaremos prácticas matemáticas democráticas), de distinto tipo, en las que observamos que se consigue negociar exitosamente significados matemáticos.

La Noción de Práctica Matemática Democrática

Desde el posicionamiento socioconstructivista en general, se incorpora la idea de co-construcción de significados, en la que el lenguaje y la participación dialogada se consideran instrumentos mediadores del desarrollo cognitivo por excelencia (Lantolf, Thorne y Poehner, 2015). Una participación de este tipo incorpora el contraste y el conflicto, en donde se comparten, compara y desarrollan reflexiones y conocimiento de una forma sistemática y eficaz. De esta manera se busca que los participantes se sientan “involucrados” y “escuchados”, por ende “implicados” como miembros del grupo, en una interacción en la que se comparten deberes y responsabilidades (Engeström, 1994). De esta manera, propiciamos que los miembros de un grupo vean cómo las reflexiones propias son compartidas por otras personas iguales y que al mismo tiempo sean considerados como ‘expertos potenciales’ (Donato, 1994). Añadir el apelativo de crítico, implica no sólo situarse en el análisis de la interacción y la participación lingüística, sino reconocer la construcción de significados en la zona de riesgo investigador (Alrø y Skovsmose, 2004) para identificar los movimientos discursivos de justificación y negociación (Crook, 1994) que los han permitido construir.

Co-construcción de Significados y Diálogo Deliberativo

Interpretamos de acuerdo con los planeamientos de Crook (1994), las prácticas de co-construcción, como aquellas que se generan a partir de tres

procesos dialógicos principales: *la articulación, el conflicto y la co-construcción*. La articulación, consiste en la justificación y declaración explícita pública de ideas logradas, a través del pensamiento organizado e interpretado. El conflicto, surge de los desacuerdos de los participantes cuando tratan de justificar sus puntos de vista y se hacen intentos para resolver opiniones divergentes, lo que requiere procesos de replanteamiento y reestructuración cognitiva. Por último, la co-construcción puede ser vista como la producción de conocimiento que se construye de forma conjunta en la articulación y cruce de argumentos durante el intercambio de textos dirigido al pensamiento colectivo. Ello se muestra en referencia a la significación que considera el hecho de compartir objetivos cognitivos comunes y que el resultado alcanzado no sea la simple yuxtaposición de información sino su elaboración, reformulación y construcción conjunta entre los participantes.

En ese contexto, la noción de diálogo deliberativo surge de considerar tipos de prácticas escolares discursivas¹, en donde se da una participación igualitaria (Serradó, Vanegas y Giménez, 2015). En otros estudios como el de Boaler (2004) y los de Alrø y Skovsmose (2004) se introducen nociones como la de equidad relacional o la noción de diálogo colaborativo investigador. En estas propuestas, se considera un nuevo rol del profesor, que le exige asumir la responsabilidad en la transformación de un currículo tecnocrático, hacia planteamientos dinámicos y creativos, que incorporan una dimensión ética de la educación (D'Ambrosio, 2011). Esta dimensión considera, que la responsabilidad tanto de los matemáticos como la de los educadores, es saber cómo orientar un pensamiento crítico a través del discurso igualitario (Freire, 1988) desde una perspectiva ética. En este sentido, D'Ambrosio (2011) alude a una ética para la diversidad en la que se promueve la comprensión, la reflexividad y la autocrítica y se organiza según, mediante tres componentes: *el respeto, la solidaridad y la colaboración*. El respeto se entiende como la consideración de las diferencias individuales. La solidaridad como la satisfacción de las necesidades básicas de supervivencia de los individuos. Finalmente, la colaboración no es aquí sinónimo de diálogo como forma de discurso, sino en el sentido de preservar el patrimonio cultural y natural común.

Sobre la Práctica Matemática

Una manera de conceptualizar las prácticas matemáticas realizadas en el aula por los alumnos es considerarlas como una secuencia de acciones intencionales que permite la lectura y producción reflexiva de textos matemáticos, la cual es reconocida como matemática por un interlocutor experto (el profesor). Esta manera de entender la práctica matemática implica considerar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática (Godino y Batanero, 1994). Hay que distinguir entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que en tanto que acción humana orientada a una finalidad tiene un sentido, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta. En el caso de las prácticas matemáticas realizadas en el aula, su sentido viene determinado por la función que esta práctica desempeña en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. Hay que resaltar que esta manera de entender el sentido de las prácticas matemáticas implica que se las considera como una secuencia de acciones sujetas a reglas matemáticas (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Si bien la práctica matemática realizada en el aula por los alumnos está sujeta a reglas matemáticas (por ejemplo, la regla que indica cómo se debe hacer la construcción de la mediatriz de un segmento), el hecho de que ésta se realice en una educación escolar lleva a considerar que no se pueden tener en cuenta sólo reglas matemáticas para caracterizar la práctica matemática realizada en el aula (Godino, Font, Wilhelmi, Castro, 2009). La sociedad organiza la escuela con el fin, entre otros, de formar o educar a sus miembros (ciudadanos) para hacer de ellos miembros activos, responsables, competentes en la solución de los problemas actuales o futuros que se presenten a la sociedad. Hay pues una primera y básica regla del contrato educativo: la escuela debe educar para la ciudadanía y el desempeño profesional. Pero la escuela es un ente abstracto que se personaliza en los sujetos (profesores, estudiantes, directores, administradores, etc.). La obligación de educar se concreta en la obligación de enseñar por parte de los profesores y de aprender para los estudiantes; asimismo, la sociedad en

su conjunto tiene la obligación de proporcionar los medios necesarios y los padres la obligación de contribuir en algunas esferas específicas.

La noción genérica de “contrato”, heredada del mundo jurídico, busca especificar esas reglas. En las relaciones pedagógicas y didácticas que se establecen en las instituciones escolares, intervienen diversos agentes y facetas. Esto hace que no todas las reglas, que determinan dichas relaciones, sean de la misma naturaleza. Por ello se habla de contratos: *social, educativo, institucional, pedagógico* o *didáctico*, según sea su ámbito de aplicación (y agentes intervinientes): la sociedad, el conjunto de personas y de grupos interesados en la creación y comunicación de saberes de un cierto campo, la institución, la clase, o la clase de matemáticas. Las reglas en la clase de matemáticas son la concreción de las reglas en el aula de las reglas que constituyen los cinco contratos mencionados.

Práctica Matemática Democrática y Procesos Normativos Intencionales

Cuando se realiza el análisis de la actividad matemática desarrollada en un aula podemos ver cómo aparecen en el transcurso de la clase determinadas reglas matemáticas (por ejemplo, cuando se institucionaliza una definición, un procedimiento, etc.), pero también podemos ver cómo se repiten ciertos patrones de interacción que explícita o implícitamente están generando normas socioculturales, sociales, etc. y también valoraciones, explícitas o implícitas, de los alumnos sobre dichas normas (D'Amore, Godino y Font, 2007; Civil y Planas, 2011). La cantidad de reglas que regulan la realización de la práctica matemática de los alumnos en el aula da pie a combinaciones diferentes, que producen tipos de prácticas matemáticas diferentes. En un extremo se tiene una práctica matemática no significativa (Pochulu y Font, 2011), mientras que en el otro tenemos la que nos interesa en esta investigación, aquellas que permiten una construcción de significados matemáticos. A este tipo de prácticas la llamaremos *prácticas matemáticas democráticas*.

Entendemos la práctica matemática democrática como un *sistema de interacciones dialogadas en el aula que tienen por fin la co-construcción crítica de significados matemáticos, y en donde se consideran elementos de la ética como: el respeto, la solidaridad y la colaboración*. Para caracterizar este tipo de prácticas, asumiremos una tipología a priori

construida a partir del cruce de las categorías planteadas por la componente ética y la co-construcción crítica, discutidas en párrafos anteriores.

Contexto y Caso de Estudio

De acuerdo con el objetivo propuesto, se realiza un estudio de caso etnográfico, en donde los investigadores buscan dar sentido e interpretar fenómenos en términos del significado que es asignado por las personas. Se analiza la práctica matemática de un profesor con más de veinte años de experiencia, que se reconoce por su capacidad de reflexionar sobre sus prácticas y por el desarrollo de propuestas interculturales. El docente participa de un grupo de formación e innovación educativa en el que se planean, diseñan, implementan y evalúan propuestas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Participa en programas de formación docente sobre práctica reflexiva y tiene el hábito de escribir narrativas sobre sus propias clases. En sus reflexiones se interesa por remarcar cómo enfrenta la diversidad en el aula planteando un discurso que promueve que los alumnos indaguen y enfrenten problemas de forma colaborativa e investigativa. El docente tiene una visión de la clase de matemáticas centrada en el estudiante en la que es fundamental proponer problemas abiertos y fomentar la construcción de significados matemáticos. Podemos decir que este profesor muestra conciencia de acciones y eventos clave de su práctica, que explica y justifica con referencia a múltiples perspectivas y contextos históricos, sociales y/o políticos (Ramos y Flores, 2016).

Para caracterizar las prácticas desarrolladas en las clases del profesor seleccionado, se observaron, grabaron en video y analizaron doce sesiones (de 50 minutos cada una) en las que se abordaban diferentes actividades de introducción al álgebra, con un grupo de 25 estudiantes de edades entre 12 y 13 años, en una escuela pública regular multicultural, cerca de Barcelona, España. El grupo es heterogéneo con gran diversidad de conocimiento matemático. Algunos de los estudiantes tienen una visión negativa de las matemáticas y consideran que no tienen habilidades para el trabajo en esta área.

Se decide analizar un conjunto de clases enfocadas a la iniciación al álgebra en las que el profesor asume los planteamientos de la Educación Matemática Realista. Usualmente, en la enseñanza del álgebra, la mayoría de los docentes introducen significados institucionales preestablecidos, en

este caso, en cambio, se considera que las relaciones algebraicas surgen como modelos a partir de situaciones reales con matematizaciones y desmatematizaciones progresivas (Vilella y Giménez, 2008).

En dichas sesiones se desarrollan distintas fases de trabajo matemático:

- 1) Identificación de propiedades algebraicas deducidas a partir de igualdades, usando un contexto en el que se plantean relaciones “comida / precio”. Para ello se plantean preguntas de tipo abierto, por ejemplo, “Si tres pizzas y dos ensaladas cuestan 19,90 euros ¿qué podemos saber a partir de esta información?”. Se discute qué aporta tener o dar más condiciones. Se promueve que los estudiantes razonen a partir de combinaciones lineales de los datos. Se finaliza esta primera fase reconociendo que no siempre que se dan dos condiciones hay un resultado único.
- 2) Exploración de situaciones de coordenadas en un problema de localización de barcos. Con dos condiciones lineales del tipo $ax + by = c$ se pretende determinar dónde se encuentra el barco a partir de la intersección de rectas.
- 3) Resolución de problemas de intersección de rectas en contextos abstractos (Si tengo una condición (a, b, c) y otra (a', b', c') dónde está la intersección). Se reconocen diferentes procedimientos para la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en lenguaje simbólico sin necesidad de pasar por la ecuación de primer grado.
- 4) Resolución de problemas de clásicos de persecuciones, en donde un coche sale con más velocidad que otro y debe alcanzarlo. Se formaliza el lenguaje de las ecuaciones.
- 5) Modelización mediante ecuaciones de aspectos de algunas situaciones arqueológicas. En todos los problemas, se realizan debates en pequeño y gran grupo, en donde se presentan y discuten las diferentes respuestas a las actividades propuestas.

A partir de las transcripciones de las clases, mediante un proceso de triangulación, se reconocen aquellos episodios en los que se producen debates, los cuales se constituyen en unidades de análisis. Estos episodios se subdividen identificando momentos diferentes en la construcción de significados matemáticos.

Respecto el análisis, en un primer momento el profesor participante en el estudio y dos investigadores analizaron las producciones de los estudiantes. Inicialmente se buscaba reconocer los momentos de abstracción reflexiva y los momentos de desmatematización. Paralelamente el docente reflexiona y justifica las preguntas que realizó en determinados momentos del proceso.

A continuación, en la Tabla 1 se muestra un ejemplo de la organización y estructuración de la información relacionada con uno de los episodios que se constituye en base para nuestros análisis.

Tabla 1

Ejemplo de primer esquema de análisis en el episodio 1

Texto del episodio	Elementos normativos	Reflexión del profesor	Tipo de práctica (Respecto a lo dialógico)
 <p>Momento inicial Profesor; Si dos pizzas y tres ensaladas cuestan 19,90 euros. ¿Puedes saber cuánto cuesta 1 pizza y dos ensaladas? Razona tu respuesta. ¿4 pizzas y 6 ensaladas cuánto cuestan? Explica qué más se puede saber con estos datos. Razona por qué una ensalada no puede costar más de 6 euros. Enuncia 5 posibles precios de la ensalada y los correspondientes de cada pizza</p>	<p><i>Normas epistémicas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Todos pueden decir algo - Se pueden determinar conclusiones a partir de premisas - El contexto es suficientemente rico y permite reconocer propiedades de las igualdades. <p><i>Normas interaccionales</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Se generan respuestas espontáneas que el propio grupo ayuda a depurar 	<p>“Con la tarea me propongo construir la idea de <i>expresiones consecuentes</i> (que se deducen una a partir de otra) o <i>equivalentes</i> (que una y otra indican una misma cuestión – igualdad numérica). La pregunta sobre máximo y mínimo no se suele formular en este tipo de contextos. Pretendo que se reconozca que dada una afirmación si multiplico los términos por el mismo número se conserva la igualdad. Refuerzo también la idea de</p>	<p>Con una instrucción directiva pero una gestión dialogada el docente consigue generar un debate matemático basado en el respeto por las respuestas de los compañeros.</p> <p>No es un debate deliberativo, pero si igualitario. Se establecen criterios para determinar la validez de una afirmación más allá de lo empírico</p>

Tabla 1

Ejemplo de primer esquema de análisis en el episodio 1 (.../...)

Los estudiantes responden de diversas maneras y con argumentos interesantes, muestran sus dudas y algunos establecen relaciones del tipo	que una afirmación matemática lleva otras asociadas como es el caso de desigualdades asociadas a igualdades o relaciones del tipo si $x + a = b$, entonces $x = b - a$ ” (Fragmento entrevista)
--	--

Para cada una de las tareas de la unidad didáctica se considera lo ocurrido en la clase y la entrevista generada con el docente. Se identifican los elementos matemáticos producidos, así como las relaciones y los modos de representación usados. También se identifican las intenciones didácticas del profesor y las normas emergentes que regulan la construcción de significados en la actividad matemática. Cabe mencionar que las normas interaccionales y epistémicas se interpretan como parte esencial de la estructura de participación del aula en el sentido que proponen Coll y Rochera (2000) de los “derechos y obligaciones comunicativas”, normas que se relacionan con las intenciones del profesor.

Para el reconocimiento y caracterización de las prácticas matemáticas democráticas, se consideran únicamente los debates de grupo realizados en diferentes momentos en el desarrollo de la unidad didáctica, en cuanto se reconocen como formas de diálogo poderosas para la construcción de significados matemáticos mediante un discurso igualitario. En estas situaciones el profesor asume un nuevo rol dejando que se escuche la voz de los estudiantes. En estos debates, todos los estudiantes tienen las mismas oportunidades de compartir su particular aproximación a las ideas matemáticas (D’Ambrosio, 1984; Giménez, Diez-Palomar y Civil, 2007). Y

se constituyen en evidencias de discurso importantes para nuestro objetivo (Weber, Maher, Powell y Lee, 2008).

Para el análisis de las *prácticas matemáticas democráticas*, consideramos las categorías definidas en la propuesta de co-construcción crítica de significados matemáticos (Crook, 1994) y en la propuesta de la ética de la diversidad (D'Ambrosio, 2011). Este cruce de categorías nos permite definir nueve tipos de prácticas matemáticas (ver Tabla 2). Este cuadro se constituye en una herramienta que nos permite organizar los tipos de práctica que pretendemos identificar.

Tabla 2

Tipos de prácticas matemáticas democráticas

	Respeto	Solidaridad	Colaboración
Articulación	Articulación respetuosa	Articulación solidaria	Articulación colaborativa
Conflicto	Generación respetuosa de conflictos	Conflicto solidario	Colaboración ante los conflictos
Co-construcción	Co-construcción respetuosa	Co-construcción solidaria	Co-construcción colaborativa

A partir de las observaciones realizadas, el equipo investigador asocia a cada episodio el tipo de práctica que se pone en evidencia. Posteriormente se recoge la opinión del docente sobre el análisis inicial. Esto se hace con el propósito de refinar las observaciones sobre las interacciones producidas en los debates. Se realizan entrevistas semiestructuradas al finalizar cada una de las fases de trabajo matemático. En estas se pregunta al docente si considera que ha fomentado la búsqueda de significados, en qué sentido y en qué momento. También se indaga si considera que ha habido un diálogo participativo y hasta qué punto ha sido un diálogo igualitario o no. Finalmente, para validar los hallazgos se discute de nuevo con el profesor para contrastar las prácticas identificadas con las interpretaciones intencionales que él da como justificación. Las entrevistas de desarrollo y el debate final del equipo investigador con el docente tuvieron como objetivo

recoger información sobre cómo el profesor percibía el desarrollo de las sesiones y cómo interpreta el diálogo.

Discusión

A continuación, se ejemplifican diferentes momentos en los que se observan prácticas matemáticas democráticas, en los momentos clave de los debates analizados y se explican algunas de sus características. La descripción sigue el orden de las prácticas presentadas en la Tabla 2. Se privilegian ejemplos que permiten constatar momentos en los que dichas prácticas emergen.

Prácticas de Articulación Respetuosa

En este tipo de práctica, el docente hace preguntas provocadoras (Martino & Maher, 1999) habitualmente de tipo interpretativo, que buscan establecer contacto con los significados de los estudiantes cuando abordan inicialmente una tarea matemática (Alrø & Skovsmose, 2004). Los alumnos hacen una declaración personal de ideas, significados, estrategias, o formas de razonamiento. Se evidencian aspectos de la articulación y el respeto. Un ejemplo de este tipo de prácticas se observa en el episodio inicial (el cual se presenta de forma resumida en la Tabla 1). En este caso el profesor formula una actividad con preguntas abiertas que posibilitan un diálogo igualitario. Considera que todos los estudiantes pueden argumentar matemáticamente usando razonamientos intuitivos asociados al contexto, el cual, les permite el reconocimiento de propiedades de las igualdades y desigualdades aritméticas. En la entrevista, el docente no sólo explica el énfasis dado a la igualdad, sino su voluntad en que los alumnos vaya progresando en el reconocimiento de diferentes maneras de establecer igualdades. Considera que la búsqueda de razones y argumentos hacen que el alumnado sitúe el conocimiento en relación con un contexto habitual como es el de los precios.

El alumnado se interesa en la actividad, manifestando que se propone en un contexto cercano. La resuelven inicialmente de forma individual y posteriormente se comparte este trabajo en el seno de un pequeño grupo para comparar cada una de las respuestas personales. Posteriormente, los grupos discuten diferentes estrategias para consensuar una respuesta colectiva.

Desde el punto de vista del significado matemático construido, los estudiantes reconocen que un tipo de relación *precio/consumo* se puede expresar mediante una expresión aritmética con dos incógnitas $ax + by = c$ donde a y b son las cantidades (de productos) y las variables x , y así como c son precios, y que, en consecuencia, muchos de los valores del par (x, y) cumplen con las condiciones. Durante los episodios en los que se identifican este tipo de prácticas, también se discuten algunas propiedades de las igualdades a nivel inicial.

En este proceso, los estudiantes reconocen públicamente que puede haber distintas argumentaciones y que algunas de ellas pueden ser válidas, pues depende de las variables y condiciones que se estén considerando en cada caso. Se discute sobre las interpretaciones y argumentaciones dadas de forma igualitaria. En efecto, el profesor nunca da una respuesta por validada por el hecho de que la enuncie un alumno considerado “líder”. Más bien, procura que sea un estudiante “desaventajado” o de una “cultura minoritaria” quien asuma la responsabilidad de la validación. Es posible también distinguir que emergen diferentes tipos de normas (de carácter epistémico e interaccional), como:

un determinado tipo de afirmación no permite un determinado tipo de conclusión”, “se puede justificar una equivalencia (o no equivalencia) de maneras diferentes” y “ante una pregunta, se puede reconocer el posicionamiento del otro como válido, aunque se muestren diferentes argumentos.

El papel deliberativo de este tipo de práctica es muy débil. Se observa más una comparación de estrategias, que propiamente una discusión sobre el valor de estas. Sin embargo, permiten que los estudiantes se enfrenten a un problema con igualdad de condiciones y permiten establecer una conexión entre el contexto extramatemático y el poder de los medios aritméticos que se han asociado. Así, la igualdad no es el fin educativo, sino el medio para establecer lo que se puede o no se puede concluir de una afirmación numérica en un determinado contexto. Se considera que este principio está al alcance de prácticamente todo el alumnado, independientemente que se equivoquen o no en los cálculos.

Este tipo de práctica se reconoce en diferentes momentos que suelen ser al inicio de cada una de las fases de trabajo matemático. En efecto, el profesor hace preguntas en todo momento, pero es en los momentos

iniciales de los bloques de actividades cuando se producen las articulaciones más potentes de significado matemático.

Prácticas de Articulación Solidaria

Este tipo de prácticas se refieren a las acciones dialogales que buscan contraste, constatación de alguna dificultad y un momento consiguiente que se centra en superar dicha dificultad fundamentalmente con la ayuda de los compañeros. Este tipo de práctica puede reconocerse también en un debate inicial cuando además de dar la oportunidad de exponer ideas diferentes, se introduce la norma de *“revisar las respuestas entre todos”*. Esto evidencia aspectos relacionados con la articulación y la solidaridad. El docente promueve que se declaren públicamente las dificultades ante la tarea planteada y motiva que sean los propios estudiantes quienes colaboren a superar la dificultad, más allá de una simple colaboración que busca la respuesta. El alumno, que no explicita sus necesidades básicas (en este caso, de interpretar un enunciado matemático) queda auto-excluido de la construcción matemática posterior.

Por ejemplo, siguiendo en el episodio inicial, Dani, un estudiante de la clase ante la pregunta: *¿qué más podemos saber con estos datos?*, indica en voz alta que no sabía qué responder a dicha pregunta. Ante esta afirmación, siete de sus compañeros quieren intervenir y piden la palabra levantando la mano. Dani, le da la palabra a Paula. Ella intenta explicar mediante dibujos que, si se tiene una información, se puede saber la mitad o el precio de una parte, o el precio de un trozo de pizza más una bebida. Paula, le pregunta si lo entiende, y Dani le dice que sí. Paula se da cuenta por la expresión de Dani, que aún no lo tiene claro, y le insiste. "Dani, si no lo acabas de entender, me dices. No te quedes con dudas". Y Dani le sugiere *“¿Puedes explicármelo otra vez?”*. Paula trata de cambiar el discurso usando números junto con los dibujos. La respuesta de Paula hace posible que Dani reconozca formulaciones hipotéticas y de validación.

En cuanto a la construcción de significados, en este ejemplo, se incide en los procesos de particularización y generalización, en una tarea matemática compleja que implica la construcción de ecuaciones o igualdades equivalentes y que Paula interpreta en el caso particular de hacer mitades.

El docente afirma que en un proceso solidario “*la idea es que los alumnos se ayuden los unos a los otros. Que escuchen realmente lo que cada uno argumenta, para poder decidir si se está de acuerdo o no, o si se considera que es necesaria una nueva intervención para aclarar los puntos de conflicto*”. Esta aseveración del docente la interpretamos como una norma. Así mismo, se pueden identificar otras normas, como: “*es importante pensar en voz alta, y reformular afirmaciones para ser comprendidas por otros*”, entre otras.

Consideramos que con este tipo de prácticas se fomenta la deliberación, en cuanto son los propios estudiantes los que ayudan a resolver las dificultades que emergen en la actividad matemática. En este caso, van construyendo la idea de generalización, como respuesta a preguntas de tipo hipotético “*qué sucede si...*” (Martino & Maher, 1999).

Prácticas de Articulación Colaborativa

Este tipo de prácticas hacen referencia a las acciones en las que se reconoce la identidad del grupo como institución que colabora en la generación de conocimiento matemático en las primeras fases de construcción de significado. En este caso, el papel del docente es promover que los alumnos realicen a nivel grupal síntesis de un conjunto de preguntas que tienen como finalidad reconocer un aspecto matemático concreto.

En la experiencia descrita, se reconocen indicios de esta colaboración después del debate algebraico inicial. Cuando el docente pregunta: “¿Qué hemos aprendido?”, se comparten y comentan varias respuestas, cuando se habla de las propiedades de las igualdades, una estudiante (Mariona) considera que se puede dar una explicación más profunda a la idea de expresiones equivalentes. Pide la palabra, y enfoca su comentario hablando de proporcionalidad:

Mira, cuando tenemos el precio de pizzas y ensaladas de 12 euros, por ejemplo, sabemos por la aritmética, que la mitad son 6 euros. Eso quiere decir que puedo saber que tal cosa, es la mitad de lo de antes. Es una proporción y valdrá 6 euros. O sea que no sólo se multiplica por dos o tres, sino que se puede dividir”. A lo cual, José añade comentando a otra compañera: “Marta ¿te acuerdas de que, en otro ejercicio, decíamos que si 4 costaban 19, 2 costarían la

mitad? Mariona, dice lo de las proporciones, porque hacer el doble o la mitad, son proporciones.

En ese tipo de intervenciones, el alumnado con más recursos intelectuales reconoce públicamente argumentos que no habían sido explícitos en su respuesta individual inicial de la tarea. En este caso ni Mariona, ni José, habían hablado de proporción en su respuesta escrita, pero, en el debate en gran grupo surge esta alusión a la proporción, que interpretamos como cultura matemática del grupo. Este tipo de situaciones promueve que todos reconozcan la importancia de comunicar y argumentar sus ejemplos, que en su mayoría se basan en la particularización de una regla (que no se hizo explícita) de las igualdades equivalentes. Con ello, se reconoce una norma epistémica: *“los ejemplos aritméticos asociados a los precios no son la regla o expresión algebraica, sino una particularización de la misma”*.

En este tipo de diálogos, el grupo contribuye a la síntesis propuesta por el profesor, en cuanto se identifica un proceso de descontextualización que apunta a la generalización.

Prácticas de Generación Respetuosa de Conflictos

Estas prácticas refieren a las manifestaciones del grupo encaminadas a resolver desacuerdos, reconocer interpretaciones diferentes, y validar argumentaciones y justificaciones personales. El docente en este tipo de práctica es un facilitador privilegiado. Al prever algunos conflictos (cognitivos, semióticos, etc.), puede provocar a través de los propios enunciados de las tareas, que se generen diálogos que dan lugar a las manifestaciones antes mencionadas. Entre otras formas de discurso aparecen el posicionamiento, la reflexión y la regulación. Ello se asemeja a la idea de *desafío cualificado* planteado por Alrø & Skovmose (2004).

Un ejemplo de este tipo de práctica en la clase analizada se produce en un segundo debate. En ese momento se sigue discutiendo sobre cómo se formulan expresiones equivalentes y se discute sobre expresiones indeterminadas, para negociar el significado de una ecuación de primer grado con dos incógnitas con infinitas soluciones. En efecto, el docente dice establecer el debate como forma de oportunidad para que se genere un conflicto sobre el significado de las relaciones aritméticas. Para algunos alumnos, el precio de una pizza es 5, para otros de 4,47. El docente en

varias ocasiones dice frases como: “Bueno, ¿quién tiene razón, los que dijeron 5?”. El docente llama la atención en gran grupo que algunos estudiantes han encontrado diferentes valores para el precio de las pizzas y los refrescos, y pide insistentemente a los estudiantes que argumenten la validez de sus descubrimientos.

En cuanto la construcción del significado, a los estudiantes les cuesta interpretar que precisamente los valores encontrados, satisfacen la expresión indeterminada del tipo $ax + by = c$. La situación sorprende a todos, porque cada uno de los grupos de estudiantes dice haberlo comprobado, y lo verifican con las condiciones iniciales del problema. Su referencia aritmética, es que las relaciones aritméticas tienen una única solución. En este ejemplo, la norma epistémica asociada que emerge es: *“No es fácil aceptar que hay infinitos valores que cumplan una relación con dos variables”*.

En este ejemplo, se inicia un debate complejo en cuanto se está deliberando sobre la validez de los resultados matemáticos frente los resultados reales. Los estudiantes comienzan a discutir la noción de control de las variables que influyen en una expresión algebraica. El docente promueve un debate en donde se admite que los estudiantes cuestionan la validez de una respuesta en relación con el contexto en el que se ha formulado la tarea. En este caso, los estudiantes razonan y hacen afirmaciones del tipo: “No puede ser que la pizza sea gratis” o bien “no puede ser que la pizza cueste menos que la bebida”, es decir, no cualquier precio es una buena solución.

Prácticas de Conflicto Solidario

En estas prácticas, el docente provoca que varias personas expliquen su posicionamiento y expongan sus argumentos, con el objetivo de ayudar a la comprensión de otros que no tienen el mismo nivel. Se busca, ganar en coherencia y profundidad; mejorar el nivel de expresión matemática; entender una respuesta o estrategia de solución con mayor eficiencia y originalidad; mejorar la intuición, etc.

El grupo genera reflexiones en la búsqueda de soluciones que se pueden institucionalizar en la clase, con la mediación del docente. Así, los estudiantes aprenden a reconocer la ayuda como una responsabilidad, se introduce así la norma de *ayudar a quien lo solicita y reconocer quien lo*

necesita, aunque no lo solicite. Esto es similar a lo que algunos autores llaman *responsabilizarse del aprendizaje de los otros* (Boaler, 2004) en cuanto modo de interacción.

En los debates observados, se han encontrado algunos ejemplos de este tipo de prácticas, cuando en el trabajo en pequeño grupo se genera discusión en torno a algunos algoritmos que algunos descubren y otros no. No hay mucho poder deliberativo en este caso. Sin embargo, esto si se ha generado en otras actividades de la secuencia didáctica (en las que no se centra este artículo) con las que se busca el modelo de la ecuación de segundo grado, cuando se usa de la fórmula de Rondelet (tareas de arqueología). En este caso, la dificultad matemática de aislar un valor desconocido provoca que se manifiesten las dudas de algunos grupos y la respuesta de ayuda de otros.

Prácticas de Colaboración ante los Conflictos

Estas prácticas hacen referencia a las acciones comunes en la búsqueda de acuerdos para resolver un conflicto planteado, que pide la transformación de significados mediante una forma de expresión institucional negociada. La discusión hace explícitas las respuestas de los estudiantes que asumen como norma que la construcción de significado es posible a través de la negociación de las ideas con los demás.

El papel fundamental del docente en este tipo de práctica es animar la discusión con intervenciones de tipo *análisis/síntesis*, procurando focalizar el objeto o proceso matemático que se quiere resaltar. En el ejemplo analizado el docente enfatiza en los procesos de comprobación, conjetura, refutación, control y validez. En estos momentos, se evidencian procesos duales de contextualización /descontextualización, particularización/generalización entre otros.

Encontramos evidencias de este tipo de prácticas en un tercer y cuarto debates en los que se incorpora la norma del consenso de las justificaciones, y no sólo las soluciones de una situación de ecuación indeterminada. Los estudiantes aprenden además que sólo una situación de los precios de la comida en donde aparezcan dos variables (por ejemplo, $2p + 3e = 20$), no es suficiente para entender el principio de indeterminación. Constatamos que en la discusión los estudiantes se dan cuenta que hace falta ver otros casos, como $5p + 4e = 30$ y otros más, para poder generalizar la regla. También

descubren que tampoco es suficiente tener dos ecuaciones con dos incógnitas para encontrar una solución única de precios y saber que hay un único valor desconocido. Se podría tener dos relaciones equivalentes y no una única solución.

Prácticas de Co-construcción Respetuosa

Se trata de acciones que buscan mostrar posibles organizaciones y estructuras sistémicas de objetos y procesos matemáticos, tomando como base los significados construidos a partir del reconocimiento de conflictos. En este tipo de práctica, el docente anima debates en los que se analizan diferentes tipos de propuestas para reconocer estructuras comunes, utiliza técnicas de síntesis (esquemas, mapas conceptuales, V de Gowin, etc.) para enfatizar sistemas conceptuales. Además, plantea tareas en las que se transfieren significados a contextos diferentes, entre otras.

En nuestro caso, se observa este tipo de práctica cuando se transfiere la idea de ecuación que se había asociado a cantidades y precios, a un contexto diferente relacionado con coordenadas. O bien cuando se introdujeron situaciones simbólicas de dos ecuaciones con dos incógnitas, utilizando "la representación china" (Streefland y Ameron, 1996) para identificar de un modo más abstracto el "método de reducción" o "método de Gauss" como un juego.

Los estudiantes están en un momento donde discuten sobre cómo a partir de dos ecuaciones con precios de snacks y bebidas y precio final es posible establecer relaciones, que les permiten igualar una de las variables, establecer deducciones y averiguar uno de los precios individuales desconocidos. Escriben en la pizarra seis ecuaciones que no todo el mundo entiende porque se empieza a usar lenguaje simbólico y de cierta manera se "pierde la referencia al contexto" de donde surgieron. Un alumno (Jordi) escribe dos relaciones que deduce de las anteriores, trata de hacer mitades de la segunda igualdad. El profesor no le dice que no puede hacerlo, pero cuestiona la validez en términos del sentido del problema. Otra alumna (Sandra) quiere ayudar y explica lo que es el proceso de generalización. Se refiere a que a partir de la equivalencia establecida hay un elemento igual que permite encontrar el precio de la bebida (insiste en la idea clave del método de reducción para la solución de sistemas de ecuaciones). Jordi, repite lo dicho por Sandra porque piensa que algunos de sus compañeros no

han entendido, e insiste en que “lo igual” son los 4 snacks. En seguida otro estudiante, Yousef, interviene, pero da una explicación equivocada. Ante esta situación el docente da valor a lo que se está diciendo, llamando la atención de toda la clase y pide que alguien reconozca donde hay una multiplicación para entender lo que Yousef quería decir.

A continuación, podemos leer una parte de este debate, donde se desarrollan algunos de los aspectos mencionados anteriormente.

Jordi: El tercero es como el primero y el cuarto es la mitad del segundo

Profesor: Andrea, ¿Es posible dividir un paquete en dos?

Andrea: Sí. ¡Y el precio también!

Sandra: En la fila siguiente, sabemos el precio de una bebida.

Jordi: En un paquete hay 4 snacks y 3 bebidas y en el otro 4 snacks y 2 bebidas. La diferencia de precio debe ser una bebida.

Yousef: En la sexta fila hay 4 snacks y 3 bebidas multiplicadas por su precio.

Profesor: ¿Qué piensas de la interpretación de Yousef?

Raquel: Es 1,5 veces 3, que es el coste de 3 bebidas.

Jordi: En la fila siguiente, 4,5 es el precio de las bebidas, es igual a 12,5 que es el precio total, y tienes 8 ...

Profesor: Esto es 8. Algunos estudiantes no entienden ... Veamos donde aparece el 8 abajo...

Laia: Viene de restar, 12,5 menos 4,5.

Andrea se alegró al constatar que el precio también puede ser dividido por el mismo número que el número de elementos en una bolsa determinada. Esto se puede realizar a partir del contexto, como la compra de un paquete de pizzas de un supermercado. Sandra llegó a la conclusión de que en la siguiente etapa podría determinar el precio de una de las dos incógnitas aplicando el método de reducción. Yousef (que normalmente no participan en absoluto en la clase de matemáticas), se animó a interpretar una de las filas, con un comentario exitoso. Raquel identifica la relación inversa. Las intervenciones de Jordi se muestra un interés en “bajar el nivel” para facilitar la comprensión de sus compañeros, utilizando el contexto. Observamos en este diálogo, más que un ambiente de autoestima y respeto mutuo. Los estudiantes se sienten cómodos de participar en la actividad de aula y el docente guía una comunidad en la que todo el mundo asume una función común. Hemos observado algunos otros diálogos en los

cuales estudiantes como Yousef, se sienten cómodos y libres de hacer interpretaciones matemáticas, sin preguntar a los demás como resolver las actividades propuestas.

Prácticas de Solidaridad en la Co-Construcción

En este tipo de prácticas se consideran las acciones en las que se busca el apoyo del grupo para conseguir recapitular o transferir de forma consistente acuerdos sobre los objetos y procesos matemáticos que se están estudiando para estructurarlos. Con ello, se busca que todos puedan tener oportunidad de reconocer los aspectos esenciales de las estructuras abordadas. Estas acciones, posibilitan que se incorpore la norma en *la clase de matemáticas es importante buscar o proporcionar ayuda a otros para superar dificultades en la síntesis, recapitulación y generación de nuevas hipótesis*. El docente es protagonista especial en este momento, con intervenciones en las que busca, repetir ideas y mejorar las formas de expresión, ayudar a clasificar y organizar informaciones, facilitar la asunción de roles en el grupo, gestionando emociones y considerando las potencialidades de cada alumno. En efecto, no todos los estudiantes son igualmente hábiles en la formulación de conjeturas, en hacer una buena síntesis, en construir una buena definición, en recoger información y hacer un buen resumen, en elaborar una presentación, sacar una buena imagen o foto de lo que se ha desarrollado para mostrar a los demás, etc.

En la propuesta algebraica que discutimos, consideramos que el impacto intrínseco del tercer debate dio lugar a fomentar autonomía, autosuficiencia, perseverancia, y reconocer la relevancia de ser solidario con los demás. En otros debates, los estudiantes tuvieron la oportunidad de solicitar la ayuda de otro compañero (aquel con el que se tiene más confianza). En el diálogo descrito en el apartado anterior, algunos estudiantes revelan una necesidad de contextualización para mejorar su comprensión. En otros casos, la demanda es para entender un ejemplo concreto. Constatamos en las entrevistas que los estudiantes reconocen la importancia del desarrollo de este tipo de prácticas, en tanto afirman que *"con estos métodos, podemos entender las situaciones algebraicas, ya que podemos cometer errores...y podemos aprender de los demás"*.

Prácticas de Co-Construcción Colaborativa

Se refieren a las acciones en las que se busca compartir y verificar consensos sobre las ideas matemáticas, más allá de la simple yuxtaposición de las mismas. Por otro lado, se busca reconocer y definir estrategias de acción común para interpretar el valor social de la construcción matemática como forma de generar significados matemáticos a través del intercambio.

Se busca que el estudiante identifique la práctica matemática como conservación de la cultura matemática del grupo (patrimonio colectivo). El docente, adopta el papel de moderador y animador de debates dialógicos con los que se pretende que los estudiantes reconozcan el valor de realizar síntesis.

Consideraciones Finales

En este artículo se propone el constructo integrador “práctica matemática democrática”, como forma de interpretar las interacciones en las que se desarrolla la ética del diálogo democrático, que tienen un papel fundamental en la construcción y transformación de significados algebraicos. Se muestra que este tipo de prácticas se pone en evidencia en los debates algebraicos desarrollados en la clase de 12-13 años. Hemos caracterizado nueve subtipos de prácticas matemáticas democráticas, que integran las que fueron identificadas de forma aislada por autores como Boaler (2004), Skovsmose y Valero (2002), entre otros.

El análisis realizado, ha permitido reconocer, como emergen ciertas normas epistémicas e interaccionales en cada una de estas prácticas en la clase de matemáticas, así como elementos del poder conseguido por el alumnado. En los ejemplos, se muestra que a lo largo de dichas prácticas se construye el valor del lenguaje simbólico de las ecuaciones, la multiplicidad de soluciones, la idea de ecuaciones equivalentes y el planteamiento de situaciones de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Se constata el desarrollo de procesos matemáticos duales, como generalización/particularización y contextualización/descontextualización.

No todos los nueve tipos de prácticas aparecen en cada debate, por ejemplo, se constata que se evidencian más prácticas de articulación en los primeros debates, mientras que en los últimos podemos reconocer más prácticas de co-construcción. Pero, es importante resaltar que los conflictos

están presentes en todos los debates, estimulando el razonamiento de los alumnos, el descubrimiento y la crítica, y generando espacios para superar los conflictos epistémicos. La actividad matemática conjunta que se construye en este tipo de prácticas, pone de relieve tal y como lo plantea Planas (2017), la generación de oportunidades de aprendizaje matemático importantes para la construcción de significados y la resolución de las tareas propuestas. Se sabe que dichas prácticas están disponibles para todos los alumnos y que la manera cómo el propio discurso se permite y legitima orientará cada práctica, así como el rol y posicionamiento de unos y otros en ellas.

El papel del docente en este tipo de prácticas implica: planificar secuencias organizadas a partir de contextos motivadores, regular el respeto en el discurso de aula, considerar la naturaleza de las preguntas que provocan conflicto, gestionar sistemas de ayudas responsables y generar oportunidades para la participación colaborativa de los alumnos. En este tipo de prácticas, el alumnado construye una identidad de grupo al desarrollar estrategias interactivas basadas en el respeto, la solidaridad y la colaboración. Disponemos de evidencias de cómo las prácticas de solidaridad responsable hacen que el grupo aumente su confianza y disposición para mejorar el cuestionamiento y la indagación en otras actividades no descritas aquí. Este tipo de aprendizaje promueve retención y procesamiento en profundidad asociado con la manipulación cognitiva de información.

A partir de nuestras observaciones, consideramos que los debates matemáticos democráticos sean largos o cortos, promueven oportunidades para ejercitar autoregulación, autodeterminación, y deseos de perseverar con las tareas (Matsumura, Slater y Crosson, 2008). Las prácticas matemáticas democráticas contribuyen a potenciar la equidad en grupos heterogéneos, mediante el desarrollo de debates que sirven como experiencia y ejemplo de lo que deseamos se dé en la vida futura de nuestros estudiantes.

Desde una perspectiva metodológica y también de la formación de profesores se constata que la reflexión realizada por el equipo de investigadores con el docente permite que se lleven a cabo análisis paralelos y rigurosos, que contribuyen a encontrar pistas sobre el camino a seguir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (Weber, Maher, Powell, Lee, 2008). En particular, el análisis didáctico realizado por el

equipo de investigación ayuda a explorar: las experiencias de construcción de significado, los conflictos, y las formas de resolución pública de los mismos, desde la perspectiva de las normas interaccionales y epistémicas involucradas.

La experiencia descrita, unida a la reflexión sobre la misma, se constituye en un ejemplo potente a seguir por futuros docentes con grupos heterogéneos multiculturales, ya que en la clase de matemáticas se suele “cortar” el discurso de los estudiantes y no se fomentan la igualdad en el diálogo cuando se discuten ideas matemáticas. Además, reconocer este tipo de ejemplo de investigación colaborativa, posibilita desarrollar competencias en el análisis de prácticas reflexivas, especialmente, en el caso de futuros docentes que no tienen experiencias propias como docentes.

A partir de este estudio, nuestro paso siguiente es la construcción de tareas profesionales adecuadas (tanto para la formación inicial como permanente), que tengan en cuenta el análisis didáctico-matemático conectado con la componente ética profesional en donde se analice la complejidad y se desarrollen prácticas matemáticas que respondan a estas expectativas.

Reconocimiento

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los proyectos: EDU2015-65378-P / EDU2015-64646-P, del Ministerio de Economía y Competitividad y SGR2017-101/SGR2017-1181, de la Generalitat de Catalunya.

Notas

¹ Adler y Confer las llamaban prácticas investigativas, e incluían el valor de construcción colaborativa de significados, aunque se formulaban desde un enfoque sociocognitivo.

Referencias

- Alrø, H.; Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and Learning in Mathematics Education. Intention, reflection and critique*. Dordrecht. Kluwer.
- Boaler, J. (2004). Promoting equity in mathematics classrooms—Important teaching practices and their impact on student learning. In M. Niss (Ed.) *Proceedings International Congress for Mathematics Education*, Copenhagen, Denmark.

- Civil, M.; Planas, N. (2011). Language policy and the teaching and learning of mathematics. In M. Setati, T. Nkambule & L. Goosen (Eds.) *Proceedings of the ICMI Study 21: Conference, Mathematics Education and Language Diversity* (pp.38-45). Sao Paulo.
- Coll, C.; Rochera, M. J. (2000). Actividad conjunta y traspaso del control en tres secuencias didácticas sobre los primeros números de la serie natural. *Infancia y Aprendizaje*, 23(92), 109-130. doi: [10.1174/021037000760087801](https://doi.org/10.1174/021037000760087801)
- Colomina, R.; Onrubia, J.; Rochera, M. J. (2001). Interactividad, mecanismos de influencia educativa construcción del conocimiento en el aula. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación*, 2. *Psicología de la educación escolar* (pp. 437–458). Madrid: Alianza.
- Crook, C. (1994). *Computers and the collaborative experience of learning*. London. Routledge.
- Darling-Hammond, L. (1996). The right to learn and the advancement of teaching: research, policy, and practice for democratic education. *Educational Researcher*, 25(6), 5-17. doi: [10.3102/0013189X025006005](https://doi.org/10.3102/0013189X025006005)
- D'Ambrosio, U. (1984). *The intercultural transmission of mathematical knowledge: Effects on mathematical education*. Campinas: UNICAMP.
- D'Ambrosio, U. (1990). The role of mathematics education in building a democratic and just society. *For the learning of mathematics*, 10(3), 20-23.
- D'Ambrosio, U. (2011). *Educação para uma sociedade em transição*. Porto Alegre: Cortez.
- D'Amore, B.; Godino, J.; Font, V. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.
- Donato, C. (1994). Collective scaffolding. In J. P. Lantolf & G. Appel (Eds.), *Vygotskian approaches to second language research* (pp. 33-56). Norwood, NJ: Ablex Publishers.
- Ellis, M. ; Malloy, C. E. (2007). Preparing teachers for democratic mathematics education. In *Proceedings of the ninth international conference: Mathematics education in a global community* (pp. 160-164).

- Engeström, Y. (1994). The working health center project: Materializing zones of proximal development in a network of organizational learning. En T. Kauppinen & M. Lahtonen (Eds.) *Action research in Finland* (pp. 233-272). Helsinki: Ministry of Labour.
- Font, V.; Godino, J. D.; Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124. doi: [10.1007/s10649-012-9411-0](https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0)
- Freire, P. (1988). *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- Giménez, J.; Diez-Palmar, J.; Civil, M. (2007). *Educación Matemática y Exclusión*. Barcelona: Editorial Graó.
- Giroux, H.; McLaren, P. (1989). *Critical pedagogy, the state and cultural struggle*. Albany: State University of New York Press.
- Godino, J.; Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M.; Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, Barcelona*, 27 (1), 59-76.
- Lantolf, J.; Thorne, S. L.; Poehner, M. (2015). Sociocultural Theory and Second Language Development. In B. van Patten & J. Williams (Eds.), *Theories in Second Language Acquisition* (pp. 207-226). New York: Routledge.
- Martino, A. M.; Maher, C. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 53-78. doi: [10.1016/S0732-3123\(99\)00017-6](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00017-6)
- Matsumura, L. C.; Slater, S. C.; Crosson, A. (2008). Classroom climate, rigorous instruction and curriculum, and students' interactions in urban middle schools. *The Elementary School Journal*, 108(4), 294-312.
- Planas, N. (2017). Aprendizaje matemático multilingüe: qué se sabe y desde qué teorías. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 91 -105). Zaragoza: SEIEM.

- Planas, N.; Edò, M. (2008). Dificultades de aprendizaje matemático asociadas al aula multicultural. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática*, 52, 11-28.
- Pochulu, M.; Font, V. (2011). Análisis Del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa - Relime*, 14 (3), 362-394.
- Ramos, E., Flores, P. (2016). Reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas en un curso de formación continua. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 71-89.
- Serradó, A. Vanegas, Y.; Giménez, J. (2015). Facilitating deliberate dialogue in mathematics classroom. In U. Gellert, J. Giménez, C. Hahn and S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp. 289-303). Cham: Springer.
- Skovsmose, O., Valero, P. (2002). Democratic access to powerful mathematics in a democratic country. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. (pp. 383-408). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.
- Streefland, L., Amerom, V. (1996). Didactical phenomenology of equations. In R. Lins & B. Gomez (Eds.) *Arithmetic and Algebra education. Searching for the future*. (pp. 138-146). Tarragona: Universitat Rovira i Virgili.
- Vilella, X.; Giménez. (2008). Teacher-researchers and encultured negotiation of meanings. In B. Czarnocha, (Ed.). *Handbook of Mathematics Teaching Research*. Cracòvia: University of Rzeszów.
- Weber, K., Maher, C., Powell, A.; Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3), 247-261. doi: [10.1007/s10649-008-9114-8](https://doi.org/10.1007/s10649-008-9114-8)

Yuly Vanegas es profesora asociada del Departamento de Educación Lingüística y Literatura, i Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática, de la Universitat de Barcelona, España.

Ubiratan D'Ambrosio es profesor emérito de la Universidade de Sao Paulo, Brazil.

Joaquim Giménez Rodríguez es catedrático del Departamento de Educación Lingüística y Literatura, i Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática, de la Universitat de Barcelona, España.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal:** Campus Mundet, Paseo de la Vall d'Hebron, 171, 08035 Barcelona, España. **Email:** ymvanegas@ub.edu