REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Análisis de Argumentos Producidos por Alumnos de Bachillerato al Resolver Problemas de Geometría

Víctor Larios Osorio[1], Claudia Arellano Camacho[2] y Noraísa González González[3]

1) Universidad Autónoma de Querétaro. México
2) Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro. México
3) Escuela Secundaria "Mariano Matamoros", USEBEQ. México

Date of publication: Octubre 24th, 2018
Edition period: Octubre 2018-Febrero 2019

To cite this article: Larios, V., Arellano, C. y González, N. (2018). Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(3), 280-310. doi: 10.4471/redimat.2018.2343

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2343

REDIMAT, Vol. 7 No. 3 Octubre 2018 pp. 280-310

Analysis of High School Students' Arguments when Solving Geometry Problems

Víctor Larios
Universidad Autónoma de Querétaro

Claudia Arellano
Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro

Noraísa González
Escuela de Secundaria "Mariano Matamoros", USEBEQ

(*Received: 14 October 2016; Accepted: 22 April 2018; Published: 24 October 2018)*

Abstract

This paper describes the results of a project about the analysis of the arguments provided by high school students in order to validate their answers to geometric problems. We used methodological tools as the Toulmin model and the proof schemes to classify students' arguments. Our data shows how some aspects, such as the type of problem, may influence on the type of argument provided by students. Toulmin model was useful to classify the schemes used by the students. Conclusions about a potential hierarchy of proof schemes are also show. We claim that progressing throughout the proof schemes is not a discrete process, but a continuous one.

Keywords: argumentation, problem solving, validation, proof, proof schema, Toulmin model.

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2343

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 280-310

Análisis de Argumentos Producidos por Alumnos de Bachillerato al Resolver Problemas de Geometría

Víctor Larios
Universidad Autónoma de Querétaro

Claudia Arellano
Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro

Noraísa González
Escuela de Secundaria "Mariano Matamoros", USEBEQ

(*Recibido: 14 Octubre 2016; Aceptado: 22 Abril 2018; Publicado: 24 Octubre 2018)*

Resumen

En este trabajo se describen los resultados de una investigación sobre la producción de argumentos de estudiantes de bachillerato para validar el proceso de solución de un problemas geométricos. Aprovechando herramientas metodológicas como el modelo de Toulmin y la noción de esquema de demostración se estudiaron y categorizaron los argumentos de los alumnos. Se muestra cómo algunos aspectos, como el tipo de problema, influye en el tipo de argumento que proporcionan los alumnos y cómo el uso del modelo de Toulmin puede ayudar a categorizar los esquemas utilizados por los alumnos. También se presentan conclusiones sobre una posible jerarquía en los esquemas de demostración y cómo el paso por ellos no es un proceso discreto, sino continuo.

Palabras clave: argumentación, resolución de problemas, validación, esquema de demostración, modelo de Toulmin.

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2343

La resolución de problemas es uno de los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas, ya que ésta se justifica por su aplicación y utilidad en la vida. Al resolver un problema se aplican conocimientos previos a situaciones nuevas o poco conocidas y se intenta reorganizar datos y conocimientos previos en una nueva estructura mediante un proceso secuencial. En este sentido son tan importantes los procedimientos y métodos empleados como el resultado final.

En este documento se describe una investigación mediante estudio de casos sobre la problemática a la que se enfrentan los estudiantes de bachillerato para exponer argumentos que validen sus procesos de razonamiento y soluciones al resolver un problema matemático.

El trabajo se orientó en estudiar el discurso argumentativo que realizan los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver con lápiz y papel algunos problemas de geometría euclidiana, pero también en categorizar los argumentos producidos por los alumnos con base en el trabajo de Harel y Sowder (1998) y aprovechando el modelo de Toulmin (2007) para el análisis estructural de los argumentos.

Se muestran ejemplos de los argumentos producidos por los alumnos y algunas observaciones sobre cómo las herramientas metodológicas mencionadas pueden ayudar a identificar los esquemas de demostración que usan los alumnos. Ello podría permitir auxiliar a la formulación de estrategias de intervención didáctica y de herramientas de evaluación formativa orientadas a favorecer el aprendizaje de formas de validación basadas en el razonamiento deductivo.

Sobre la Investigación

La experiencia de trabajar con alumnos de bachillerato la resolución de problemas nos ha permitido observar que aunque existen alumnos que argumentan coherentemente y con sentido lógico, mostrando conocimiento y habilidades comunicativas (simbólicas y verbales); representan minorías en los grupos y surgen las interrogantes que llevan al desarrollo de este trabajo de investigación.

El tipo de explicaciones que se observan no son encadenamientos deductivos, propios de la matemática, y por tanto se consideró necesario estudiar los razonamientos de los alumnos a través de los productos en los que evidencian su pensamiento al resolver problemas.

Los argumentos que dan los alumnos parecen indicar razonamientos intuitivos que toman como verdades universales y por sí mismos no se preguntan por qué son válidos. Si encuentran un caso que cumple la exigencia de un problema hacen extensivo el comportamiento o propiedades. Se considera importante no desestimar estas dificultades de los alumnos, sino tratar de interpretarlas y conducir estrategias que los lleven a comprender la importancia de validar procesos y resultados, no de acuerdo a creencias personales sino válidas desde la estructura interna de la matemática.

Se asume que una primera acción importante ante esta problemática es el estudio de las formas en que argumentan los estudiantes y su posible origen, en segunda instancia se situaría el impulso y diseño de propuestas tendientes a modificar las condiciones en que se enmarca el desarrollo de habilidades argumentativas. Posteriormente la puesta en marcha de esas acciones propuestas y el estudio de sus resultados. Esta investigación se sitúa en esa primera acción de análisis sistemático, mediante el estudio de casos, de los argumentos que dan los alumnos en la resolución de problemas. De tal modo que se convierta en un antecedente inmediato del diseño de propuestas didácticas.

La investigación se dirigió concretamente a cubrir los objetivos siguientes:

1. Estudiar el discurso argumentativo que realizan los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver algunos problemas de geometría euclidiana.
2. Categorizar los tipos de argumentos producidos por los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver algunos problemas de geometría euclidiana.

Marco Teórico

La Argumentación y la Demostración

La argumentación se puede utilizar para validar el conocimiento que construye un individuo, particularmente en contextos escolares que tienen una componente de interacción social muy importante:

> Argumentar es una acción específica de la interacción social que se produce en cualquier tipo de debate. Si uno o varios participantes en un debate enuncian algo, en realidad se declaran partidarios de la

> validez de este enunciado. Con su propuesta, muestran su disposición a actuar racionalmente y establecer su afirmación con más detalles, si fuera necesario. (Alcolea, 1998, pág. 135)

En este sentido el desarrollo de la argumentación aparece en los contextos institucionales de la escuela del nivel medio mexicano. En el caso de la Secundaria (Nivel Medio Básico, alumnos de 12 a 15 años) se plantea como una de las competencias a desarrollarse:

> Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal. (SEP, 2011, pág. 23)

Por su parte la documentación oficial del Bachillerato (Nivel Medio Superior, alumnos de 15 a 18 años) incluye como una de las competencias del alumno la siguiente:

> Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. (SEP, 2008, pág. 22; 2009)

En este sentido se nota que la argumentación está vinculada con la validación de procedimientos y resultados (incluyendo de problemas), con su explicación y su justificación, todo esto con una orientación definida hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

Ahora bien, es indispensable considerar que la clase de Matemáticas es un contexto muy particular en el cual los estudiantes están construyendo sus saberes de una manera continua, social y guiados por el profesor bajo ciertas directrices sociales e institucionales. Es por ello que los significados que toma la demostración en este espacio y su relación con los otros contextos es lo que ocupa y preocupa a aquellos que buscamos estrategias y respuestas para orientar la actividad didáctica.

En el contexto escolar más que las demostraciones que prueban que un hecho es verdadero, interesan las demostraciones que explican. En éstas el sujeto hace conjeturas, explora y argumenta, desarrollando conocimiento en un proceso significativo en el cual el énfasis no está en el rigor, sino en la comprensión del proceso y del resultado. En este sentido en Larios y Acuña (2009) se hace el planteamiento de que si se quiere enseñar la demostración en la escuela (básica y media), entonces "se requiere afinar una idea adecuada de demostración en el entorno escolar que considere como ejes de funcionamiento el rigor (localmente aplicado) y distinguiendo claramente la necesidad de la obtención del significado matemático también aplicado al proceso en cuestión" (2009, pág. 61). Para ello se ha propuesto una caracterización de las justificaciones que se pueden considerar en la escuela, durante el proceso de formación del individuo, que considera aspectos semánticos y sintácticos con las siguientes características:

> 1. Hacen referencia a un hecho matemático.
> 2. Tienen como función primaria el de convencerse a sí mismo y a otros para proporcionar una explicación del hecho matemático.
> 3. Las formas de comunicación utilizadas deben ser conocidas por los miembros de la comunidad escolar o, en su defecto, que puedan ser aprendidas por ellos.
> 4. Los enunciados utilizados son aceptados por la comunidad escolar, ya sea explícita o implícitamente.
> 5. La serie de argumentos está organizada con base en formas de razonamiento válidas o correctas. En particular se puede considerar el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos. (González y Larios, 2012, pág. 33)

Godino y Recio (2001, pág. 412) han abundado también en el estudio del significado de la demostración en la clase de matemáticas y sugieren que en general en la clase de matemáticas predominan las argumentaciones no analíticas, pero apuntan que éstas formas juegan un papel importante en las etapas de búsqueda y formulación de conjeturas en la resolución de problemas, por ello resulta importante reconocer que la comprensión y el dominio de la argumentación por parte de los estudiantes está mediada por la experiencia en cómo viven la argumentación dentro de los contextos sociales y culturales habituales para ellos.

Así que dentro del proceso de aprender a demostrar está el desarrollo de competencias argumentativas que pueden estar orientadas a la justificación de la solución de problemas.

El Concepto de Argumentación en Este Trabajo

Ahora bien, al interpretar la argumentación como un proceso que se genera a través de una *práctica argumentativa*, entendida como "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, pág. 71), entonces el argumento es el encadenamiento de razonamientos dados por los alumnos para explicar la validez de sus respuestas y procedimientos seguidos para darle solución a un problema propuesto en la clase de matemáticas. Después de todo, el valor que los alumnos conceden a la demostración es el que se relaciona con su poder explicativo (Ibañes y Ortega, 2005).

En ningún momento del proyecto se esperó que los alumnos proporcionaran demostraciones desde el punto de vista matemático formal y riguroso, sino más bien justificaciones en el sentido mencionado en la sección anterior del contexto particular de la clase de Matemáticas. El interés de los alumnos fue la propuesta de argumentaciones tendientes a explicar el cómo y por qué de algún hecho o actividad, consideradas como formas incipientes y por demás necesarias en el camino hacia el desarrollo de las formas deductivas del pensamiento propias del conocimiento matemático.

Fueron precisamente estos argumentos el objeto de estudio para el análisis y clasificación de las respuestas que los estudiantes dieron a los problemas propuestos y para tal efecto se tomó como base la categorización que propusieron Harel y Sowder sobre los esquemas de prueba individuales (Harel y Sowder, 1998; Harel, 2007). Ellos han relacionado la demostración con la idea de *justificación*, considerando una demostración como justificación de la verdad de una conjetura, en un proceso que implica dos aspectos: *convencimiento* o *determinación* entendido como el proceso individual para remover las propias dudas acerca de la verdad de una aserción (convencerse a uno mismo) y la *persuasión* como el proceso de remover las dudas de otros acerca de la verdad de una aserción (convencer a los demás). Con ello introdujeron la idea de esquema de demostración individual llamado *esquema de prueba*, y lo definieron en que "consiste de lo que constituyen la determinación y la persuasión para esa persona" (Harel y Sowder, 1998, pág. 244) y en un trabajo posterior lo vincularon directamente a la demostración: "una *forma de pensar* asociada con un acto de demostrar" (Harel, 2007, pág. 66).

Estos autores propusieron una clasificación de esquemas de prueba en tres grandes conjuntos y varios subconjuntos que son:

1. Esquemas de pruebas por convicción externa: Son aquellos que se presentan cuando las afirmaciones se apoyan en elementos ajenos al sujeto y se organizan en tres subcategorías:
    a. Esquemas de prueba autoritarios: Se sustentan en una autoridad, como el profesor o el libro de texto.

   b. Esquemas de prueba ritual: Se basan estrictamente en la apariencia del argumento. El ritual de la presentación hecha por la autoridad (el profesor, un libro, un experto) es en este tipo de esquemas lo que convence a alguien y le sirve para despejar sus dudas.
   c. Esquemas de prueba simbólicos no referenciales: Se apoyan en manipulaciones simbólicas donde los símbolos o las manipulaciones no poseen un sistema coherente de referentes a los ojos del estudiante.
2. Esquemas de prueba empíricos: En los cuales las conjeturas se aceptan o rechazan en virtud de experiencias sensoriales. De acuerdo al énfasis que aparezca en las mismas, pueden ser:
   a. Esquemas de prueba inductivos: Basado en la evidencia de ejemplos, de mediciones directas, de cantidades, sustitución de números específicos en expresiones algebraicas, etc.
   b. Esquemas de prueba perceptuales: Sustentado en percepciones visuales.
3. Esquemas de prueba deductivos: Que están constituidos a su vez por dos subcategorías:
   a. Esquemas de prueba transformacionales: Éstos tienen tres características esenciales: la de poseer generalidad (cuando la meta que se persigue es justificar mediante un argumento que resulte válido para todos los casos y no se aceptan excepciones), pensamiento operacional (que se manifiesta cuando un individuo concibe metas o submetas intentando anticipar resultados durante el proceso de la demostración), e inferencia lógica (cuando el individuo comprende que la justificación en matemáticas debe estar basada en última instancia sobre reglas lógicas de inferencia). La transformación de imágenes ocurre por medio de las deducciones lógicas, a diferencia de las relaciones observadas inductiva o perceptualmente, consideradas como estáticas. Las operaciones de trasformación se realizan o pueden realizarse de manera intencionada y prever sus efectos.

b. Esquemas de prueba axiomáticos: Los cuales poseen las tres características anteriores pero también incluyen el atributo de que el individuo comprende que cualquier proceso de demostración debe empezar desde términos ya definidos y aceptados (axiomas), y las entidades a las cuales se aplican son parte de la realidad matemática de uno (Harel, 2007). Si los axiomas responden a la pura intuición de la persona entonces se trata de un esquema intuitivo axiomático, pero cuando se piensa en las conjeturas como representaciones generales en diferentes modelos que comparten una estructura matemática común se reconoce un esquema axiomático estructural.

Harel y Sowder hicieron este trabajo de análisis considerando las demostraciones matemáticas y aunque en este trabajo no se consideran en sí demostraciones, se tomará en cuenta esta clasificación de esquemas para el análisis porque las demostraciones en sí se pueden considerar como un tipo particular de problemas en los que se llega a un resultado mediante deducciones y razonamientos que convencen a quienes conocen el tema, lo que para una comunidad es verdad. Es por ello que podemos inscribir el estudio de la argumentación ante la resolución de un problema desde sus aportes teóricos, reconociendo que las explicaciones que los sujetos dan a sus procedimientos y respuestas de los problemas están determinadas precisamente por los esquemas de prueba que utilizan para la justificación de lo que hacen.

En particular Flores y sus colegas (Flores, 2007; Flores, Gómez y Flores, 2010) tomaron la propuesta anterior y la aplicaron al estudio de los argumentos proporcionados por profesores de bachillerato para justificar sus soluciones a problemas geométricos. Lo que observaron es que existen similitudes en las maneras de argumentar entre las dos poblaciones consideradas, pero le han llamado *esquemas de argumentación* porque los entienden como “el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema” (Flores, 2007, pág. 71), es decir, no necesariamente ligados a la demostración de teoremas, sino también a la validación de resultados de problemas. Es importante mencionar que si bien estamos de acuerdo con la diferencia en la nomenclatura, se continuará utilizando la propuesta de Harel y Sowder porque con ella se realizó el proyecto original.

Una Herramienta para el Análisis: el Modelo de Toulmin

Pedemonte (2007) ha planteado como conclusión de sus investigaciones la existencia de una continuidad cognitiva entre la argumentación y la demostración (bajo ciertas condiciones), pero también evidenció la necesidad de tener una herramienta que ayudara a analizar las formas o la estructura de las argumentaciones y las demostraciones y así establecer relaciones cognitivas. Esta herramienta puede ser el llamado *modelo de Toulmin* (Toulmin, 2007), el cual fue propuesto para el estudio funcional de los argumentos a fin de determinar si un argumento en particular era válido a partir de su estructura y de las relaciones entre los elementos que intervienen.

El esquema más sencillo propuesto en el modelo considera cuatro elementos: los datos (D), las garantías (G) que proporcionan un soporte al argumento, la conclusión (C) y el respaldo (R) que corresponde a la parte de la teoría que respalda a las garantías. Adicionalmente se pueden considerar elementos como los modalizadores (M), que permiten matizaciones en el argumento, y las condiciones excepcionales (E) que pueden servir para aceptar o rechazar las conclusiones dependiendo de la situación. Todos estos elementos se pueden vincular esquemáticamente como sigue:

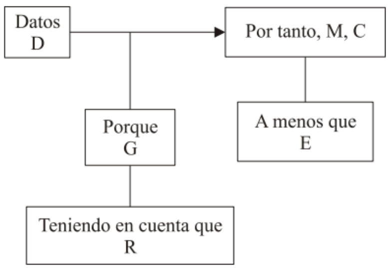

Figura 1. Diagrama del esquema básico del modelo de Toulmin (Toulmin, 2007, pág. 141)

Abderdein (2005; 2006) ha estudiado la manera de aplicar el modelo a argumentos en Matemáticas, particularmente para el caso de la demostración. Para ello ha mostrado cómo es posible ampliar y combinar diagramas o esquemas, como los que se muestran en la Figura 2, al considerar los siguientes cuatro principios:

> I Tratar los datos y la conclusión como los nodos en una gráfica o red.
> II Permitir a los nodos contener proposiciones múltiples.
> III Cualquier nodo puede funcionar como los datos o la conclusión de un nuevo diagrama.
> IV La red completa puede ser tratada como dato en un nuevo diagrama. (Aberdein, 2006, pág. 213)

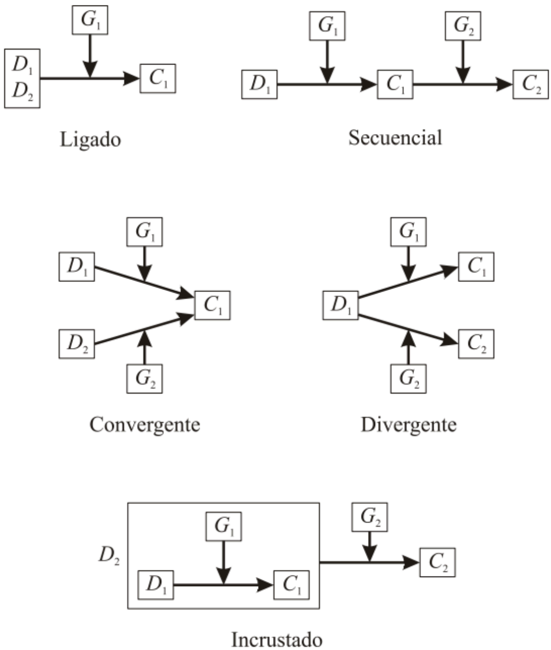

Figura 2. Tipos de diagramas combinados propuestos por Abderdein (2006, pág. 214).

Entonces, si bien es posible utilizar el modelo para analizar argumentos sobre las Matemáticas (metamatemáticos), como el caso de Alcolea (1998), o extramatemáticos, en nuestro caso el interés es aplicarlo a argumentos matemáticos tal como se han caracterizados en la primera parte de esta sección.

En este sentido consideramos que se debe tomar en cuenta que los alumnos no comienzan la escuela sabiendo demostrar, sino que lo aprenden en un proceso continuo y constructivo. Es por ello que si se requiere analizar los argumentos propuestos por alumnos de cualquier nivel educativo cuando validan su conocimiento matemático, no es posible considerar exclusivamente los esquemas axiomáticos y formales, sino otros. En este sentido la propuesta de Toulmin aparece como una posibilidad metodológica adecuada para el análisis de los argumentos proporcionados por los alumnos.

Considerando las limitantes del modelo, como es el nivel de local que maneja o que no estaba originalmente orientado a analizar argumentos matemáticos (Knipping, 2008), hemos considerado que es posible utilizarlo y complementarlo para analizar las justificaciones producidas por los alumnos durante este estudio. Al mismo tiempo vincularlo con los esquemas de demostración que ya han sido mencionados al tomar en cuenta consideraciones como las que Larios (2015, pág. 405) hace “considerando la naturaleza de los datos (D), las garantías (G) y el respaldo (R), así como los modalizadores (M) y las excepciones (E), para así identificar un cierto argumento o justificación en el esquema correspondiente”.

En las siguientes secciones de este trabajo mostraremos cómo se incorporó esta herramienta en el proceso de análisis realizado.

Método

El Experimento de Enseñanza

El experimento de enseñanza diseñado consideró el paradigma cualitativo mediante el estudio de casos para dar un seguimiento al trabajo de parejas de alumnos cuando resuelven problemas de geometría con lápiz y papel. En específico se analizó el proceso de cómo argumentan, la forma en que dan cuenta del cómo y el por qué de los procesos que siguen para llegar a formular sus conclusiones y respuestas a los problemas planteados.

Se determinó que la resolución de los problemas propuestos fuera realizada en parejas porque con eso se da la oportunidad de interacción entre pares y con ello se da la oportunidad de observar los dos elementos que permiten expresar lo que para alguien representa la certeza y validez de algo: primero frente a sí mismo (convencimiento) y luego ante otros (persuasión).

Se seleccionaron tres problemas para que los alumnos resolvieran. Éstos fueron buscados de tal manera que su planteamiento permitiera a los alumnos encontrar una solución y justificarla argumentando cada paso realizado haciendo referencia a las propiedades geométricas necesarias y suficientes en cada caso. Los problemas propuestos contienen nociones consideradas elementales para su nivel y por tanto era factible la argumentación en su función explicativa y de validación. Se consideraron problemas con los cuales los alumnos pudieran dar cuenta del cómo y por qué de sus procesos de solución. Son problemas que ofrecen la posibilidad de probar con ejemplos, formular conjeturas y experimentar con ellas para realizar justificaciones lógicas apoyándose en teoremas o proposiciones conocidas haciendo uso de su capacidad de generalización y simbolización.

La razón por la que utilizaron problemas geométricos y no de otra rama matemática obedece a la benevolencia de la Geometría para llegar de modo relativamente rápido a la formulación de argumentos, ya que su carácter visual facilita la experimentación como auxilio para la generalización y favorece con ello la confianza de los alumnos que resuelven los problemas. Históricamente la Geometría fue el terreno sólido que permitió el surgimiento de la demostración y esta se construyó justo a partir de principios evidentes que nos entran por los ojos y que luego se someten a las pruebas de la razón.

A continuación se presentan los problemas seleccionados.

Problema 1

Berrondo-Agrell (2006, pág. 31) propuso este problema:

> En el triángulo ABC se han trazado las bisectrices por B y C cortándose en D. Si al ángulo BDC le restamos la mitad del ángulo A, ¿qué quedó?

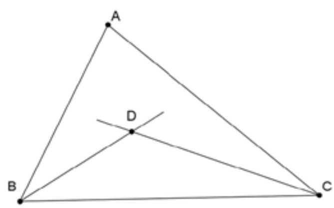

Figura 3. Problema 1.

Problema 2

Este problema también está propuesto en Berrondo-Agrell (2006, pág. 56):

> ABC es un triángulo rectángulo isósceles de 10 cm^2 (ángulo recto en A). El círculo con centro en O es circunscrito al triángulo ABC. El círculo tangente al triángulo en B a AB y en C a AC, tiene centro en I. ¿Cuál es el área de la luna formada por la parte del círculo pequeño O que queda fuera del círculo grande I?

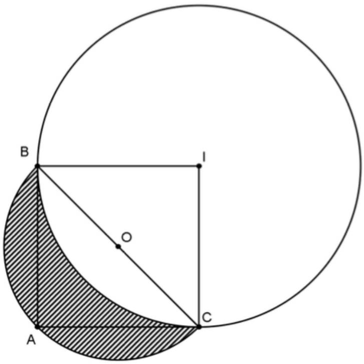

Figura 4. Problema 2.

Problema 3

Este problema fue tomado del problemario para la 14.a Olimpiada Nacional de Matemáticas (Antolín et al., 2000):

> En la figura tenemos que AC = AB y $\angle b = \angle c$. Probar que MP = NP y AM = AN.

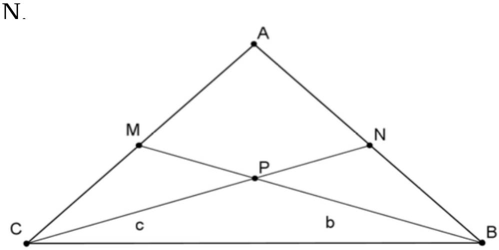

Figura 5. Problema 3.

La Implementación

Los problemas se le plantearon a un grupo de tercer semestre de bachillerato (34 alumnos de 16 ó 17 años) en un plantel de una escuela pública que recibe estudiantes provenientes de localidades urbanas, semiurbanas y rurales. Los problemas se abordaron en parejas y se les explicó en qué consistiría la actividad y su propósito. La tarea se realizó en tres horas de trabajo.

Durante la actividad se permitieron preguntas relativas a la clarificación del planteamiento de los problemas y sobre conceptos, ya que el objetivo no fue ver cuántas Matemáticas sabían sino cómo utilizaban el conocimiento que tenían ante situaciones que demandan su aplicación. Se realizaron algunas preguntas orientadoras durante la resolución para que ampliaran e hicieran precisiones en sus argumentos.

El principal material recopilado fueron las respuestas escritas por los alumnos y como material auxiliar algunas entrevistas no estructuradas orientadas a ampliar o aclarar argumentos sobre su respuesta y estrategia de solución para llegar a la misma. Las entrevistas se realizaron en el momento de la resolución con los alumnos o inmediatamente después. Se puso especial atención a las parejas cuyas respuestas aparecían correctas, pero en que la argumentación era escasa, con los que requerían aclaraciones para continuar la resolución o bien con quienes no llegaron a la respuesta a fin de buscar cuáles fueron sus obstáculos y tomar esto como parte importante de las conclusiones que derivaron de este experimento.

Análisis y Resultados. Los Esquemas Evidenciados.

Para presentar las soluciones, primero se muestra la organización de las mismas en un concentrado que señala de qué problema se trata, qué esquema(s) evidencia y qué pareja lo resolvió; luego aparece la descripción de las soluciones dadas por problema y los esquemas de prueba detectados en cada una, así como las observaciones que permiten tal clasificación. Posteriormente se expone el análisis de cada categoría de los esquemas de prueba mismo que se apoya con la exposición de algunos casos significativos, haciendo inferencias y formulando las conclusiones pertinentes. En esta parte se hacen también algunas anotaciones sobre la función que para los alumnos puede tener la argumentación, más allá del cumplimiento con la exigencia que se impone ante el planteamiento de un problema matemático con texto.

No todos las parejas de alumnos resolvieron todos los problemas propuestos y como el objetivo de este trabajo es estudiar cómo argumentaron los alumnos, entonces sólo se consideraron las respuestas proporcionadas por los alumnos. Así que se analizaron en total 19 respuestas, correspondientes al trabajo de 17 parejas de alumnos, de las cuales cinco respondieron el problema 1, ocho el problema 2 y seis el problema 4. Con base en los descriptores de las categorías de esquemas propuestos por Harel y Sowder se hizo una siguiente clasificación de las justificaciones de los alumnos que se sintetizan en las siguientes tablas (una por problema):

Tabla 1.
Esquemas identificados en las respuestas de los alumnos al problema 1.

Categoría	Subcategoría	Parejas (identificación)				
		4	6	7	16	17
Esquemas por convicción externa	Autoritario					
	Ritual	x				
	Simbólico no referencial	x			x	x
Esquemas empíricos	Inductivo					
	Perceptual	x			x	x
Esquemas deductivos	Transformacional		x	x		
	Axiomático					

Tabla 2.
Esquemas identificados en las respuestas de los alumnos al problema 2.

Categoría	Subcategoría	Parejas (identificación)							
		3	5	8	9	13	14	15	19
Esquemas por convicción externa	Autoritario								
	Ritual								
	Simbólico no referencial								
Esquemas empíricos	Inductivo					x			
	Perceptual								
Esquemas deductivos	Transformacional	x	x	x	x	x	x	x	X
	Axiomático	x							

Tabla 3.
Esquemas identificados en las respuestas de los alumnos al problema 3.

Categoría	Subcategoría	Parejas (identificación)					
		2	5	16	18	20	21
Esquemas por convicción externa	Autoritario						
	Ritual						
	Simbólico no referencial					x	x
Esquemas empíricos	Inductivo						
	Perceptual				x	x	x
Esquemas deductivos	Transformacional	x	x	x			
	Axiomático	x	x	x			

A continuación, se amplía este análisis con más detalle en los esquemas de evidenciados por los alumnos.

Esquemas de Prueba por Convicción Externa

Resulta interesante la observación de que esta no es la categoría de esquemas más detectada en las respuestas. Esto indica que los estudiantes del experimento asumen a cierto nivel la responsabilidad de justificación de sus conjeturas y estrategias. Incluso cuando sus argumentos plasmados son escuetos, en la mayoría de los casos no se sustentan en la autoridad. Sin embargo, resulta preocupante que diez alumnos de un total de 40 son quienes justificaron sólo desde este esquema y no trascienden esquemas sensoriales y de autoridad externa.

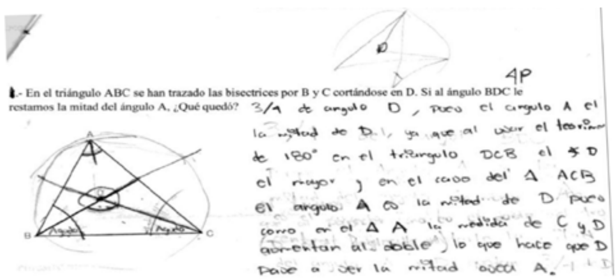

Figura 6. Argumento producido por la pareja 4P para el problema 1.

Un caso particular de los subesquemas rituales es el que proporciona la pareja 4 cuando resolvió el primer problema (Figura 6). El análisis utilizando el modelo de Toulmin muestra su estructura (Figura 7), la cual presenta cinco relaciones entre los diferentes datos y conclusiones. Sólo una de las relaciones tiene una garantía pero la cual no tiene una función adecuada, sino ritual. Además los elementos que aparecen (los datos-conclusiones) son repetitivos en diferentes momentos (están agrupados en un rectángulo) y no llevan a una conclusión válida.

Además ocurrió que otros alumnos mostraron argumentos que se podrían clasificar como esquemas incluso inductivos, pero que esperaban la confirmación por parte de la profesora de que lo escrito estuviera correcto. Tal es el caso de la pareja 3 al resolver el problema 2: Cuando se les pidió que clarificaran el proceso de resolución que habían escrito se limitaron a leerlo y pedir que les dijera si "todo estaba bien" porque estaban seguros de su respuesta, pero faltaba que la profesora diera la aprobación. Con ello mostraron dos creencias al respecto: los problemas son para resolver, no para ser validados, y que en todo caso la validación la da el profesor.

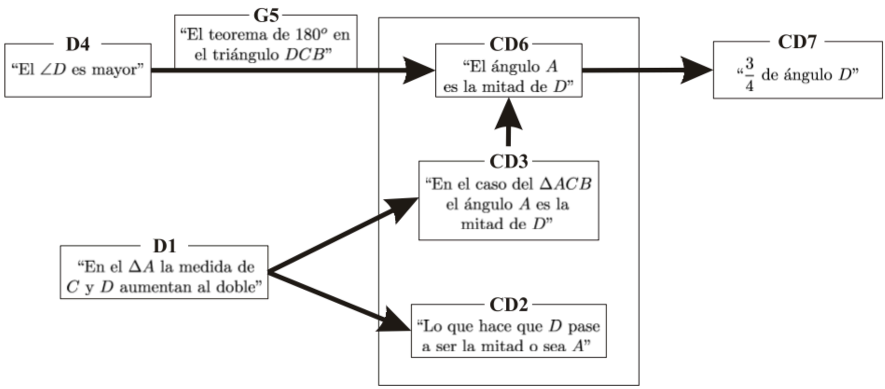

Figura 7. Estructura del argumento producido por la pareja 4P para el problema 1.

Esquemas de Prueba Empíricos

En esta categoría se incluyen las respuestas de siete parejas, pero cinco de ellas utilizaron también los esquemas de prueba por convicción externa.

Solo la pareja que lo usa para el problema 2 utiliza el subesquema inductivo, mientras que los otros cuatro usan el subesquema perceptual; en todos los casos existen combinaciones con esquemas por convicción externa o deductivos. En la utilización de los esquemas empíricos se aprecia que los alumnos asumen de alguna manera la responsabilidad de la resolución desde sus conocimientos y estrategias. Intentan probar sus conjeturas pero sigue siendo fuerte el uso de ejemplos, casos, mediciones y hasta percepciones visuales. Es posible aquí la pregunta de si puede ser la combinación del uso de estos esquemas un antecedente necesario hacia el desarrollo de la capacidad de argumentación utilizando esquemas de prueba deductivos.

13P

2.- En la figura que se muestra enseguida, ABC es un triángulo rectángulo isósceles de 10 cm² (ángulo recto en A). El círculo con centro en O es circunscrito al triángulo ABC.

El círculo con centro en I es tangente al lado AB del triángulo en B y al lado AC con punto de tangencia en C. ¿Cuál es el área de la luna formada por la parte del círculo pequeño O que queda fuera del círculo grande I?

90° angulo

Para sacar el area de la esfera 1° saque el area del circulo pequeño multiplicando πr^2

3.14 x 100
314.00

100 salio de el triangulo rectangulo su altura es el radio del circulo 10 cm y se eleva al cuadrad por que es r^2

A = 314 m²

Despues saque el area de un triangulo $A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{(20)(10)}{2}$ $A = \frac{200}{2} = 100$

A=100 m²

20 por que el radio de la esfera era 10 entonces el diametro seria 20.

Multiplique por 2 el area de el 1° triangulo por que hay 2 triangulos iguales

100 m² x 2
200 m²

Estos 2 triangulos forman el cuadrado el valor del cuad seria 200 m²

Despues al area del circulo le quite la del cuadr

314 m²
− 200 m²
114 m²

al resultado lo divido entre 4 porque eran 4 parte iguales que sobraron como ó x y z. y para form la luna solo se necesitan 2 sumo 2 veces lo q salio de la multiplicacion

28.5
4|114
34
20
0

28.5
+ 28.5
57.0

y por ultimo sume lo de el angulo recto 90°

57
+ 90
147

entonces la esfera mide = 147 m²

Figura 8. Respuesta al problema 2 por parte de los alumnos de la pareja 13P (su estructura está en la figura 9).

Como ejemplo se muestra la producción de la pareja 13P en el problema 2 (Figura 7) y que analizaremos más profundamente en el siguiente apartado para considerar dicha mezcla de elementos de los esquemas que se evidencia también en su estructura (Figura 10).

Esquemas de Prueba Deductivos

Este tipo de esquemas fue el que más frecuentemente se identificó en las respuestas de los alumnos, pero hay que notar que de las trece parejas que la utilizan, ocho lo hacen en el problema 2. Este problema tiene la característica de incluir información de medidas concretas que se restringe a un caso y así permite a los alumnos sentirse seguros para resolverlo y argumentar ampliamente su respuesta, dejando ver con ello el aspecto transformacional de este esquema. Las deducciones que implica no son únicamente a partir de teoremas o postulados como en los otros problemas y es probable los alumnos se sienten más seguros al resolver ese tipo de problemas porque es a los que están más habituados.

En este problema la mayoría de los estudiantes que utilizan el subesquema transformacional al mostrar subtareas y procesos operacionales al relatar paso a paso cómo lo han hecho. Sin embargo no llegan a enunciar como generalidades las relaciones entre los lados de las figuras del problema, se limitan a trabajar con los datos numéricos que se dan ya que con ello se responde la pregunta planteada. Por esto último se mencionó en la sección anterior que aún está presente un componente “fáctico” del esquema empírico y como ejemplo se muestra la Figura 8, cuya estructura se muestra la Figura 10. En este sentido se hace evidente que todas las relaciones entre los datos y las conclusiones poseen garantías que en su mayoría son operaciones, pero que aparecen referencias a fórmulas bien aplicadas que, finalmente, son teoremas y propiedades.

Otro señalamiento especial merecen las respuestas que alcanzan a dar muestras del uso de un subesquema axiomático. Con base en los problemas seleccionados se esperaba que apareciese principalmente en los problemas 1 y 3, ya que demandan de manera más explícita el razonamiento deductivo. No obstante, sólo dos de cinco parejas que resolvieron el primer problema dan muestras de razonamiento deductivo pero únicamente en el aspecto transformacional sin alcanzar el carácter axiomático. Éste sólo aparece de manera clara en tres de seis respuestas para el problema 3.

Un caso ilustrativo es la pareja 2P que entregó lo que se muestra en la Figura 9:

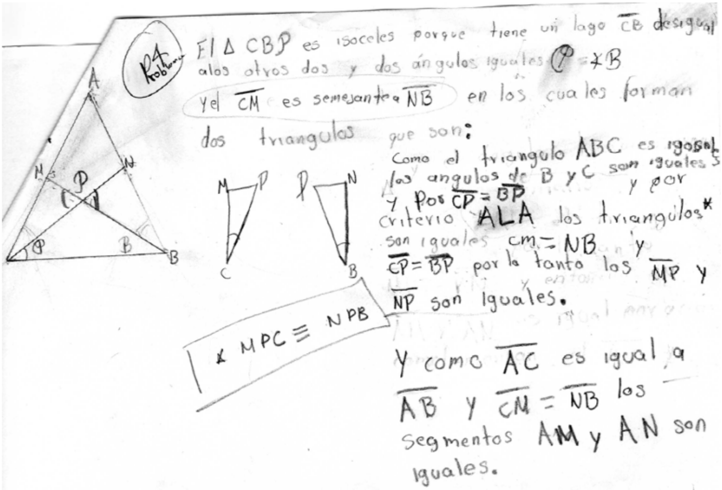

Figura 9. Respuesta de la pareja 2P al problema 3 (su estructura aparece en la figura 11).

Cuando se les pidió que explicaran lo que habían escrito se dio el siguiente diálogo (los énfasis han sido añadidos):

Investigador: ¿Cómo es eso de que CM es semejante a NB? ¿Qué significa semejante?

Alumno: Miden igual

Investigador: ¿Y cómo sabemos que CB es desigual a los otros lados del triángulo CBP? ¿Por qué afirman eso?

Alumno: Es que dice que ∠C = ∠B y si esos ángulos son iguales entonces los lados CP y BP son iguales y como un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual, el diferente es ese CB.

Investigador: Luego mencionan que el triángulo ABC es también isósceles. ¿Por qué es isósceles?

Alumno: Aaaah, sí… Porque los ángulos B y C iguales…

Investigador: ¿Y cómo sabemos eso, que ∠B = ∠C?

Alumno: Ya lo sabíamos… [Pensativos]. ¿O no? Sí, acá dice [señalando el texto del problema] que estos lados AB = AC.
Investigador: ¿Y sí atendieron ese dato cuando escribieron que ABC es isósceles, es decir que AB = AC?
Alumno: Sí, si no cómo iba a ser isósceles.
Investigador: No sé, tal vez “vieron” que era isósceles.
Alumno1: No, bueno, se ve casi equilátero, pero dice que AB = AC.
Alumno2: Y ya sabiendo esto, no estuvo tan complicado, pero sí nos costó trabajo este problema…
Investigador: En pocas palabras, ¿fue un problema para ustedes? ¿Recuerdan que hemos hablado de eso en clase de cuándo un planteamiento es problema para alguien?
Alumno: Sí, si nos costó. **No está tan fácil de ver que los triángulos chiquitos son iguales**…
Investigador: ¿Cuáles triángulos chiquitos?
Alumno: Esos del centro… CMP y BNP.
Investigador: En algún momento tenían que ver eso.
Alumno: Sí, este problema estuvo interesante, **si no vemos eso a lo mejor no acabamos**… ¿Cómo íbamos a encontrar que MP = NP?
Investigador: No sé, tal vez hay otro camino…
Alumno: No, pensamos que no… habría que buscarle mucho a ver si hay otra solución… Pero lo importante es que acabamos ya… Y no fue muy fácil…

Estas respuestas hacen notar que los estudiantes no dan mucha importancia a la justificación de sus afirmaciones, sino que las hacen cuando se les piden de manera explícita. Finalmente, solo buscan dar una respuesta para que alguien más diga si es correcta o no.

Veamos también el error conceptual al definir triángulo isósceles que los hace concluir y ocuparse innecesariamente de que el lado *CB* sea distinto a *CP* (y a *BP*), cuando bastaría decir que $CP = BP$ porque $\angle C = \angle B$ y con ello los triángulos *MPC* y *NPB* son congruentes entre sí. Así que manejan correctamente el concepto de congruencia aunque no usan el término para referirse al mismo. Usan como sinónimos los términos “semejante”, “congruente” e “igual”, pues cuando dicen “y el *CM* es semejante a *NB*” en realidad quieren expresar que se trata de segmentos congruentes.

En la Figura 11 aparece la estructura del argumento y se observa que sólo un tercio de las relaciones datos-conclusión poseen garantías, aunque todas ellas hacen alusión a propiedades geométricas previamente vistas por los alumnos. Así que a pesar de los errores señalados, este par de alumnos formula inferencias lógicas que los conducen al resultado esperado y se ven en la necesidad de ir relacionando propiedades del triángulo isósceles y de congruencia de triángulos, respondiendo desde un esquema de prueba deductivo axiomático.

Conclusiones

En esta parte del trabajo presentaremos de inicio algunas conclusiones un poco más específicas sobre los resultados obtenidos, para después mostrar reflexiones y conclusiones vinculadas con el uso explícito de dos herramientas metodológicas consideradas así orientar a posibles continuaciones del trabajo investigativo.

Cinco parejas no comprendieron los planteamientos de los problemas y no consiguieron siquiera formular preguntas para comprender qué se pedía. Los problemas no estuvieron a su alcance, no significaron un reto y no resolvieron ninguno. Es importante incluir esta observación porque es algo que probablemente ocurre en muchas aulas de matemáticas y se vuelve necesario plantear la necesidad de la intervención didáctica para manejar esta problemática.

También se observó que la mayoría de estos estudiantes no establecieron una estrategia general para resolver los problemas. Ellos aprendieron a ir realizando por pasos la resolución antes de plantear un análisis inicial completo, es decir, están acostumbrados en tratar de resolver lo que ven que se puede resolver y dejan los datos que obtienen como para ver si más adelante tienen alguna utilidad, todo ello sin hacer un análisis general del planteamiento.

Ahora bien, uno de los puntos centrales del proyecto realizado fue sobre el proceso argumentativo y en ese sentido se observó que los estudiantes

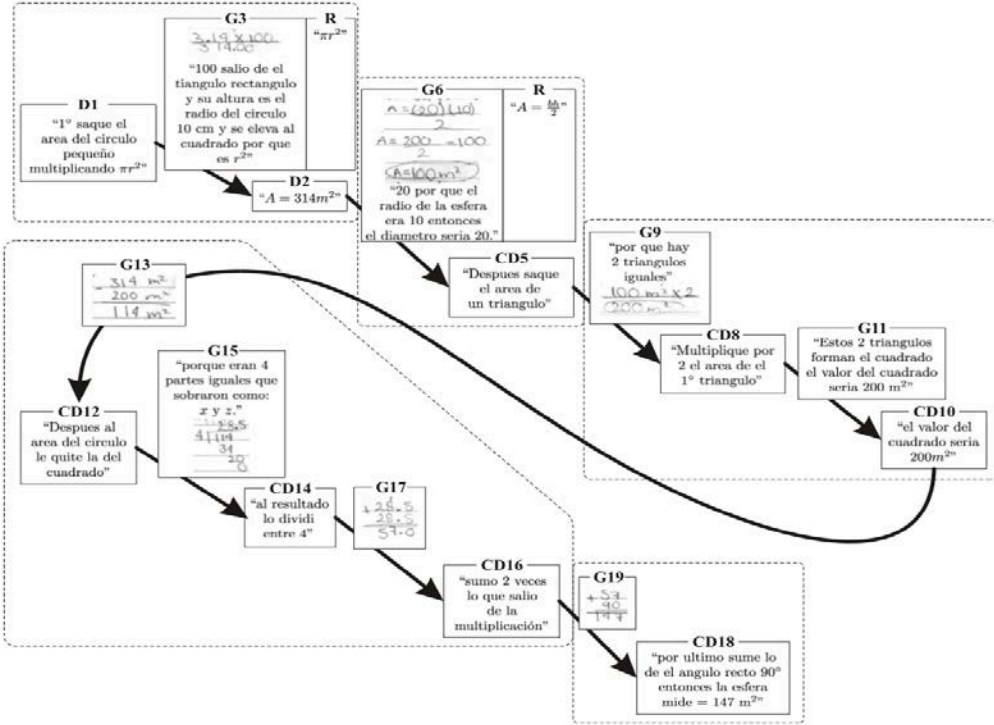

Figura 10. Estructura del argumento de la pareja 13P en el problema 2 (vv. Figura 8). Las agrupaciones indican las sub-metas planteadas por los alumnos.

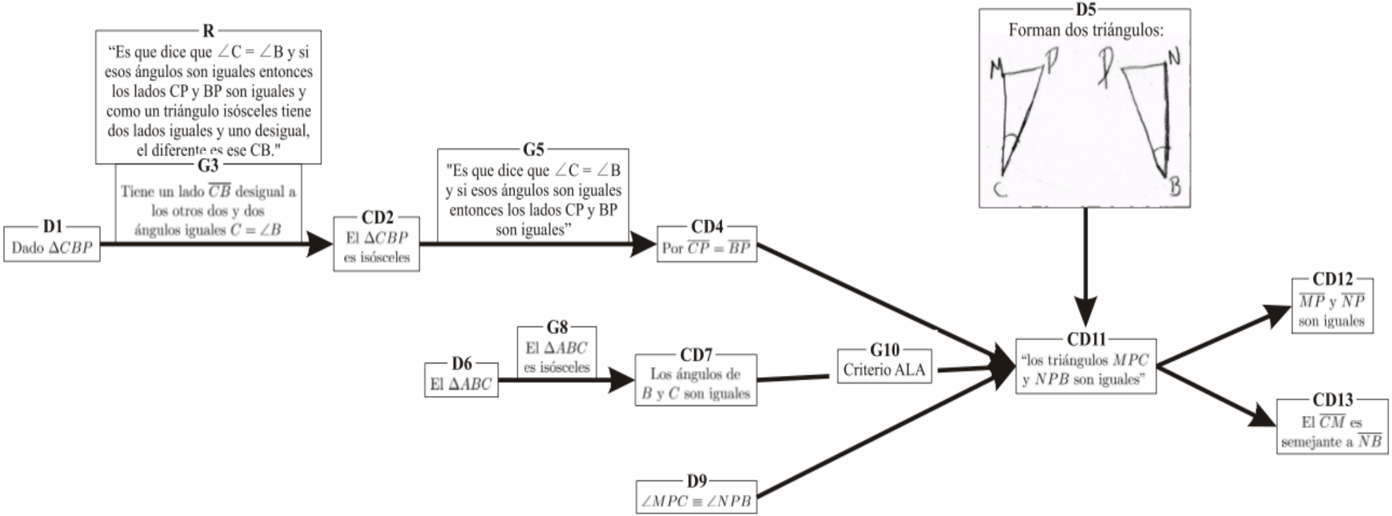

Figura 11. Estructura del argumento proporcionado por la pareja 2P en el problema 3 (vv. Figura 9).

no argumentan con facilidad. Hay que solicitar explícitamente que proporcionen una explicación e incluso dirigirla. Esto plantea un interrogante importante: ¿podemos atribuir esto al hecho de que durante su experiencia escolar previa los problemas les han sido presentados para hallar una respuesta y no para validarla, ni para convencer a otros ni a sí mismos? De manera implícita esperan que la validación la haga el profesor y ellos confían en lo que éste considera como verdad, en lo que diga que está bien. Esta conducta denota la presencia de los esquemas de prueba por convicción externa en los estudiantes, donde lo que despeja sus dudas es el ritual de la presentación que hace el experto (el profesor).

Schoenfeld (2011) señala este fenómeno y comenta que es preocupante. Trata además de explicarlo considerando las creencias de los estudiantes y los maestros sobre lo que significa aprender matemáticas. Concluye que la argumentación se revela como un componente innecesario desde el punto de vista de los alumnos, sea por considerar que es evidente y no tiene caso explicar-demostrar-argumentar (algo similar a mostrado en investigaciones como la de Chazan, 1993, y la de González y Larios, 2012); o bien porque hay alguien que ya lo sabe (el propio profesor que se lo está demandando) y no tiene sentido justificar ni la respuesta ni el cómo llegaron a ella. Se percibe, pues, la necesidad de impulsar prácticas que lleven a los alumnos a desarrollar la autoconfianza en lo que saben y en la forma en que lo expresan para otros.

Por otro lado, cuando se identificaron los esquemas de argumentación utilizados por los alumnos no sólo se consideró el más "avanzado" en cada una de las parejas, sino también otros previos. Se observó una posible jerarquía en los esquemas y los alumnos que utilizaron un esquema de cierto nivel también utilizaron esquemas de niveles previos. En este sentido se puede considerar que cuando los individuos echan mano de un cierto esquema de demostración, será posible que simultáneamente utilicen estrategias de esquemas previos. También se esperaría que conforme se utilicen esquemas más avanzados se vayan abandonando los esquemas más básicos (de convicción externa), en parte porque se le da sentido a las estrategias de los esquemas más avanzados y en parte porque éstos entran en conflicto con las estrategias de los iniciales.

Precisamente se observó que los esquemas de demostración más avanzados fueron utilizados en los problemas que contienen datos numéricos y que demandan información de ese tipo. Esto lleva a pensar que si el profesor quiere que los alumnos trabajen con problemas que no incluyan datos numéricos, el trabajo didáctico deberá ser más específico al respecto.

Otra observación importante es que al parecer el avance de los alumnos entre los diversos esquemas no es discreto, sino de una manera continua. En efecto, esto se hace evidente por la aparición de elementos mezclados de esquemas en niveles adyacentes al momento de las respuestas de los alumnos. Esto puede dificultar una identificación por parte del profesor o del investigador, pero es una situación inherente al desarrollo de los alumnos.

Otra de las herramientas metodológicas utilizadas para el análisis fue el modelo de Toulmin. Este modelo permitió identificar las partes y la estructura de los argumentos facilitando la identificación de los esquemas utilizados considerando que el objetivo del estudio no estuvo centrado únicamente en ver si proporcionaba la respuesta "correcta" a los problemas, sino cómo la proporciona y cuál es el tipo de argumentación que la sustenta. Así se observó que no sólo el tipo de contenido de los elementos que intervienen en los argumentos (datos, garantías, respaldo, modalizadores y excepciones) es un criterio para determinar el esquema utilizado, sino que también es la estructura misma del argumento, las presencia o ausencia de dichos elementos y las relaciones que se establecen entre ellos.

Tabla 4.
Consideraciones sobre el contenido y la estructura de los argumentos de acuerdo con los esquemas de demostración

Esquema de demostración propuesto	Consideraciones en el contenido de los elementos del argumento	Consideraciones en la estructura del argumento
Esquemas autoritarios	Las garantías (G) está basada en afirmaciones como "el profesor dijo…" o "en el libro dice…" entonces hay indicativos de que dicha justificación corresponde a un esquema autoritario.	Es posible que se omitan datos y garantías porque se ignoran deliberadamente y los modalizadores (M) y las excepciones (E) pueden omitirse por innecesarios.

Tabla 4.
(…/…)

Esquema de demostración propuesto	Consideraciones en el contenido de los elementos del argumento	Consideraciones en la estructura del argumento
Esquemas rituales	La relación entre las garantías (G), los datos (D) y las conclusiones (C) parecen no tener sentido.	Es posible que los datos (D) y las conclusiones (C) se repitan en diferentes momentos o se tengan “cadenas” de relaciones no vinculadas entre sí.
Esquemas simbólicos	La garantía (G) está basada en el manejo de símbolos de una manera poco clara a partir de los datos (D) existentes. Las garantías (G) pueden apelar a “propiedades” inventadas.	Al igual que en el caso anterior, es posible que los datos (D) y las conclusiones (C) se repitan en diferentes momentos o se tengan “cadenas” de relaciones no vinculadas entre sí.
Esquemas fácticos o inductivos	Las garantías proporcionadas hacen referencia directa a las construcciones o algoritmos utilizados. Es posible que el respaldo (R) aparezca de manera explícita, pero tanto ésta como G pertenecen a, como se dijo, algoritmos o pasos realizados.	Pueden estar presentes los modalizadores (M) y las excepciones (E) por las limitantes de los algoritmos, de los procedimientos y de las herramientas utilizadas (calculadoras, papel, computadoras, etcétera).
Esquemas empíricos o perceptuales	Los datos (D) son considerados como casos particulares y la garantía (G) utilizada hace referencia tales casos particulares. Algunos tipos de justificaciones podrían considerar el caso de razonamientos abductivos.	

Tabla 4.
(…/…)

Esquema de demostración propuesto	Consideraciones en el contenido de los elementos del argumento	Consideraciones en la estructura del argumento
Consideraciones en el contenido de los elementos del argumento	Consideraciones en la estructura del argumento	La estructura consta de una cadena (o varias cadenas que convergen) de elementos tipo datos-conclusiones (D-C). Idealmente aparecen garantías (G) en cada una de estas relaciones.

De esta manera se ha podido ampliar las consideraciones que ha señalado Larios (2015, pág. 405), en donde el énfasis es hacia el contenido de los elementos de los argumentos, y se proponen de manera resumida en la Tabla 4.

Con esto consideramos que esta información puede servir como antecedente para la realización de propuestas didácticas, con secuencias específicas que acerquen a los alumnos desde los niveles básicos a la importancia y necesidad de argumentar, de probar, persuadir, como parte del proceso de aprendizaje y de construcción del conocimiento. Esto es considerando el hecho de que el aprendizaje de las matemáticas, y en particular de la demostración, es un proceso continuo a lo largo del desarrollo del individuo y está influenciado socialmente por el entorno donde se desenvuelve la persona. Este entorno incluye el nivel educativo y, evidentemente, las demás personas que participan en la escuela como sus compañeros y los profesores, por lo que los salones de clase bajo la dirección de éstos últimos pueden funcionar como una "plataforma" para que los alumnos desarrollen sus habilidades de investigación, de curiosidad, de búsqueda y argumentativas en matemáticas.

Bibliografía

Aberdein, A. (2006). Managing informal mathematical knowledge: Techniques from informal logic. En J. M. Borwein y W. M. Farmer (Eds.), *Mathematical Knowledge Management 2006. Lecture Notes in Computer Science* (pp. 208-221). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation, 19*(3), 287-301. doi: 10.1007/s10503-005-4417-8.

Alcolea B., J. (1998). L'argumentació en matemàtiques. En E. Casaban i Moya (Ed.), *XII'e Congrés Valencià de Filosofia* (pp. 135-147). Valencia, España: Societat de Filosofia del País Valencià.

Antolín, O., Bagnoli, F., Bulajich Manfrino, R., Gómez, J. A. y Rechtman, A. (2000). *Problemas para la 14a Olimpiada Mexicana de Matemáticas (Problemas Introductorios).* México, México: Sociedad Matemática Mexicana.

Berrondo-Agrell, M. (2006). *100 Enigmas de geometría.* México, México: Ediciones Ceac.

Chazan, D. (1993). High school geometry stundents' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-388. doi: 10.1007/BF01273371

Flores E., C., Gómez R., A. y Flores S., Á. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae, 12*(2), 22-42.

Flores S., Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática, 19*(1), 63-98.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias, 19*(3), 405-414.

González G., N. y Larios O., V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria.* Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 65-78). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky

(Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). EEUU: AMS.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración en Bachillerato. *Números, 61*, 19-40.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 427-441. doi: 10.1007/s11858-008-0095-y.

Larios O., V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. En P. Scott y Á. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2015* (pp. 399-412). Santo Domingo, Rep. Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Larios O., V. y Acuña S., C. M. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna y M. De Villiers (edits.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 59-63). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41. doi: 10.1007/s10649-006-9057-x.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* Nueva York, EEUU: Routledge.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (21 de octubre de 2008). Acuerdo 444. *Diario Oficial de la Federación* , pp. 18-28 (Primera sección).

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (30 de abril de 2009). Acuerdo 486. *Diario Oficial de la Federación* , pp. 74-77 (Primera sección).

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México, México: Secretaría de Educación Pública (DGDC/DGFCMS).

Toulmin, S. E. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona, España: Ediciones Península.

Víctor Larios Osorio es profesor de didáctica de las matemáticas, de la Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Claudia Arellano Camacho es profesora de matemáticas en el Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro, México.

Noraísa González González es profesora de matemáticas en la Escuela Secundaria "Mariano Matamoros", USEBEQ, de México.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. Dirección Postal: Cerro de Las Campanas, s/n, Centro Universitario, Edificio F, Facultad de Ingeniería, Santiago de Querétaro, Querétaro C.P. 76010. **Email:** vil@uaq.mx