Research, Society and Development, v. 9, n.1, e09911337, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1337

Dicas de resoluções práticas das razões trigonométricas com os ângulos notáveis

Practical resolution tips for trigonometric ratios with remarkable angles

Consejos prácticos de resolución para relaciones trigonométricas con ángulos notables

Recebido: 23/06/2019 | Revisado: 03/08/2019 | Aceito: 02/09/2019 | Publicado: 20/09/2019

Cícera Fernandes
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2131-4776
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Brasil
E-mail: ciceraxx@gmail.com
José Gleison Alves da Silva
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3093-0239
Instituto Federal do Ceará - IFCE, Brasil
E-mail: gleison.profmat.seduc@gmail.com
Rosalide Carvalho de Sousa
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8059-1159
Instituto Federal do Ceará - IFCE, Brasil
E-mail: rosalidecarvalho@hotmail.com
Ana Karine Portela Vasconcelos
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1087-5006
Instituto Federal do Ceará - IFCE, Brasil
E-mail: karine_portela@hotmail.com

Resumo

O presente artigo tem como objetivo demonstrar e analisar uma proposta para o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo dando ênfase aos ângulos notáveis, por meio de orientações menos pragmáticas e complexas do professor, com o intuito de gerar maior rapidez e praticidade no desenvolvimento do raciocínio do aluno ao buscar a solução da situação problema. Neste viés, foi realizado uma pesquisa bibliográfica da abordagem trigonométrica do triângulo retângulo de livros didáticos com autores renomados no Brasil, como Matemática Ciência e Aplicação de Iezzi et al., (2007), Matemática Contextos & Aplicações de Dante (2013), Matemática Completa de Giovanni e Bonjorno (2005) e Conexões com a matemática de Barroso (2010), objetivando encontrar suporte metodológico que corroborasse com a nossa pesquisa. Portanto, os procedimentos metodológicos foram divididos em duas vertentes: no primeiro momento foram realizadas as explanações do assunto proposto sobre o direcionamento da metodologia de ensino Resolução de Problemas de Polya em duas

turmas distintas, num segundo momento foram aplicadas duas avaliações, uma com o método clássico presentes em alguns livros didáticos analisados e outra segundo a proposta de nosso trabalho, numa vertente mais voltada para o estilo utilizados nos cursinhos, no qual se utilizam de dicas práticas e de fácil memorização, conhecida de modo prosaico por “Bizu”. As análises das avaliações dos alunos apresentaram os seguintes resultados: 63% de acertos na abordagem clássica e 88% de acertos na metodologia de nossa proposta, o que nos levou a fazer várias reflexões inerentes ao ensino e aprendizagem e as formas de repassar os conteúdos matemáticos, mais especificamente de razões trigonométricas.
Palavras-chave: Trigonometria; Matemática; Resolução de Problemas.

Abstract

This paper aims to demonstrate and analyze a proposal for the teaching of trigonometric reasons in the right triangle, emphasizing the remarkable angles, through less pragmatic and complex teacher's orientations, in order to generate faster and more practical thinking. of the student when seeking the solution of the problem situation. In this regard, a bibliographic research of the trigonometric approach of the rectangle triangle of textbooks with renowned authors in Brazil, such as Mathematics Science and Application by Iezzi et al., (2007), Mathematics Contexts & Applications by Dante (2013), Complete Mathematics, was conducted. Giovanni e Bonjorno (2005) and Connections to Barroso's mathematics (2010), aiming to find methodological support that corroborates our research. Therefore, the methodological procedures were divided into two strands: in the first moment the explanations of the proposed subject on the direction of the methodology of teaching Polya Problem Solving in two distinct classes were performed, in a second moment two evaluations were applied, one with the method. present in some textbooks analyzed and another according to the proposal of our work, in a strand more focused on the style used in the courses, which use practical tips and easy memorization, known prosaically as "Bizu". The analysis of the students' evaluations presented the following results: 63% of correct answers in the classical approach and 88% of correct answers in the methodology of our proposal, which led us to make several reflections inherent to teaching and learning and the ways to pass the mathematical contents. , more specifically trigonometric ratios.
Keywords: Trigonometry; Mathematics; Troubleshooting

Resumen

Este artículo tiene como objetivo demostrar y analizar una propuesta para la enseñanza de razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, enfatizando los ángulos notables, a través de orientaciones docentes menos pragmáticas y complejas, para generar un pensamiento más rápido y más práctico. del alumno cuando busca la solución de la situación problemática. En este sentido, se realizó una investigación bibliográfica del enfoque trigonométrico del triángulo rectángulo de los libros de texto

con autores de renombre en Brasil, como Mathematics Science and Application por Iezzi et al., (2007), Mathematics Contexts & Applications por Dante (2013), Complete Mathematics. de Bonjorno et al. (2005) y Conexiones a las matemáticas Giovanni e Barroso (2010), con el objetivo de encontrar apoyo metodológico que corrobore nuestra investigación. Por lo tanto, los procedimientos metodológicos se dividieron en dos líneas: en el primer momento se realizaron las explicaciones del tema propuesto sobre la dirección de la metodología de enseñanza de la resolución de problemas de Polya en dos clases distintas, en un segundo momento se aplicaron dos evaluaciones, una con el método. presente en algunos libros de texto analizados y otros según la propuesta de nuestro trabajo, en un capítulo más centrado en el estilo utilizado en los cursos, que utilizan consejos prácticos y de fácil memorización, conocidos prosaicamente como "Bizu". El análisis de las evaluaciones de los estudiantes presentó los siguientes resultados: 63% de respuestas correctas en el enfoque clásico y 88% de respuestas correctas en la metodología de nuestra propuesta, lo que nos llevó a hacer varias reflexiones inherentes a la enseñanza y el aprendizaje y las formas de pasar los contenidos matemáticos. , más específicamente proporciones trigonométricas.
Palabras clave: Trigonometría; Matemáticas; Solución de problemas.

1. Introdução

A trigonometria desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Ela toma a sua forma atual com Euler (1707-1783) para se chegar até a trigonometria que hoje ensinamos aos nossos alunos. Neste artigo não tratamos da evolução histórica da trigonometria. Faremos um levantamento de duas formas de repassar o conteúdo de razões trigonométricas através de uma dica.

Dessa forma, veremos como as turmas se sobressaíram após a realização das aulas sobre o percurso metodológico da Resolução de Problema e a aplicação da verificação com a forma clássica adotada pela maioria dos livros didáticos e a forma menos abstrata e mais esquematizada para resolver questões de razões trigonométrica. Dessa forma, fica a reflexão ao professor para que, ao ensinar trigonometria, de alguma forma se discuta com os alunos questões que os levem a perceber que o conhecimento matemático tem formas diferentes de ser abordados e que vale apena adequar outras habilidades para explanar os assuntos, principalmente se tem respaldo para agilizar e facilitar o ensino e aprendizagem do aluno com inferências matemáticas contundentes como é o caso do que propõe este artigo com a aplicação dessa dica (“bizu”).

Infelizmente para a maioria dos discentes a matemática ainda é conhecida por ser uma disciplina muito complexa tornando-se temida antes mesmo de serem apresentados ao conteúdo. Contudo muitos estudos veem sendo realizado com o intuito de facilitarem a aprendizagem da matemática com métodos que viabilizam um melhor entendimento dos conteúdos, proporcionado um ensino e consequentemente uma aprendizagem mais significativa. Entre os conteúdos que mais causam esse medo entre os discentes se encontra a trigonometria, que segundo Lima (2013, p.1) "esse conteúdo é considerado "o bicho de sete cabeças", de difícil compreensão, para diversos alunos e professores da educação básica" pois além de seus complexos cálculos se faz necessário um alto grau de abstração, o que causa dificuldades para a fixação de tais assuntos.

Mesmo com todas essas dificuldades enfrentadas, o fato é que este conteúdo (trigonometria no triângulo retângulo) é um assunto importantíssimo e não pode passar despercebido, visto que inúmeras são as suas aplicações tanto na matemática como na física.

Além disso, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 2000) ressalta a importância do estudo da trigonometria, no qual é enfatizado o seu potencial, no que tange ao Desenvolvimento de habilidades e competências as quais estão intimamente ligadas às habilidades que devem ser desenvolvidas nos estudantes, destacando-se: selecionar informações, analisá-las e tomar as decisões a partir dos resultados obtidos.

Para facilitar a assimilação do conhecimento da trigonometria é adotada diversas abordagens por vários autores em Livros Didáticos com o intuito de facilitarem ou sistematizarem o ensino da trigonometria, mas cada professor tem seu método de repassar esse conteúdo o que pode ser uma maneira de facilitar ou se tornar um obstáculo para o entendimento do discente. Dessa forma, ter o domínio do conteúdo é bastante importante para o professor que pode criar métodos através da pesquisa que abre caminhos para melhorar o processo de construção do conhecimento trigonométrico aos discentes. Segundo Miguel *et al* (2009)

> O professor deve propor situações que conduzam os alunos a (re)descoberta do conhecimento através do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigados, através de explorações (investigações), pois nessa perspectiva metodológica espera-se que eles aprendam o "quê" e o "porquê" fazem/sabem desta ou daquela maneira, para que assim possam ser criativos, críticos, pensar com acerto, a colher informações por si mesmos face a observação concreta e usar o conhecimento com eficiência na solução dos problemas do cotidiano. Essa prática, então, dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, através da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios. (MIGUEL *et al*, 2009, p. 110).

Neste contexto, este trabalho tem-se como uma proposta prática e sistêmica para o

Research, Society and Development, v. 9, n.1, e09911337, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1337

ensino de trigonometria no triângulo retângulo que será feito através de um percurso metodológico baseado na Resolução de Problemas de Polya (2006) e de uma pesquisa de campo. O público alvo foram alunos do 1° ano do ensino médio.

Diante disto, têm-se o propósito de responder a seguinte indagação: Será se vale a pena o professor inovar seus métodos de ensino proporcionando uma apropriação do aluno com os assuntos matemáticos de forma mais eficaz, simples e gratificante?

Para isso tem-se como objetivo apresentar dicas de resoluções práticas das razões trigonométricas com os ângulos notáveis com base na metodologia de ensino resolução de problemas e com o propósito de atingir nosso objetivo realizaremos um levantamento das abordagens de ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo apresentado por outros autores em livros didáticos do Ensino Médio, sistematizando os conceitos de forma mais prática para o entendimento do aluno e Implementando-o para a aplicação em sala de aula.

2. Metodologia

De início realizamos uma escolha aleatória dos alunos e dividimos em duas salas de aulas, onde foram feitas as exposições do assunto proposto (razões trigonométricas e ângulos notáveis) sobe o percurso metodológico da Resolução de Problemas. Após a explanação do assunto com sobre o olhar de duas vertentes: a clássica adotada na maioria dos livros didáticos e outra uma generalização das definições de razões trigonométricas com os ângulos notáveis, onde se formulou uma dica de resolução rápida. Em seguida foi aplicado um teste para identificar como estão os conhecimentos dos discentes em relação ao conteúdo e para saber qual maneira repassar o conteúdo terá mais êxito na compreensão e resolução das questões propostas. Esta pesquisa de campo foi realizada com os alunos da escola EEEP Governador Waldemar Alcântara, uma escola do eixo profissionalizante do Estado do Ceará, ela está situada no município de Ubajara, localizada à 326 km de Fortaleza, O teste foi aplicado para 66 educandos (todos do 1º ano) iguais para ambos os grupos, sendo que as aulas e os testes foram aplicados no mesmo horário e sobre as mesmas condições, vale ressaltar que todos os alunos já tiveram contato com o ensino da trigonometria no ensino fundamental.

Para a análise proposta por este trabalho, as atividades realizadas foram divididas em três partes: levantamento da abordagem trigonométrica do triângulo retângulo de ângulos notáveis apresentados por outros autores (Iezzi et al., (2007) e Giovanni e Bonjorno (2005) levantamento da proposta que facilita a compreensão dos alunos apresentado no livro de

Dante (2013) e Barroso (2010); estudo da assimilação do conhecimento sobre a trigonométrica do triângulo retângulo (ângulos notáveis) por parte do educando sobre a influência do método proposto e dos convencionais.

Desta forma, foi realizado um levantamento literário de acordo com os recomendados por Gil (2002), seguindo as seguintes etapas: escolha do tema, levantamentos literários preliminares, formulação do problema, elaboração do plano provisório de assunto, buscas das fontes, leitura do material, fichamento, organização lógica do assunto e redação do texto.

A pesquisa bibliográfica tem como ponto inicial a escolha de um tema e deve estar relacionada aos interesses do estudante. É preciso dispor de bons conhecimentos na área de estudo, para que as próximas etapas sejam adequadamente desenvolvidas (NEVES *et al*, 2002). O trabalho de revisão bibliográfica se apresenta como uma ferramenta de grande utilidade, reunindo informações dispersas em diversos periódicos, livros, revistas e outras fontes de pesquisa.

No desenvolvimento desse trabalho foram utilizados como base de análise os livros:

- “Matemática Ciência e Aplicação” de Iezzi et al., (2007),
- “Matemática Contextos & Aplicações” de Dante (2013)
- “Matemática Completa” de Giovanni e Bonjorno (2005)
- ”Conexões com a matemática” de Barroso (2010).

Para uma coerência textual foi escolhido criteriosamente a ordem dos autores citados, além do texto de ligação entre uma citação e outra, respeitando as normas da ABNT. O levantamento da proposta mais reduzida é a abordada por Dante e Barroso que será verificada sua aprovação pelos alunos com o auxílio da aplicação de um teste (lista de exercício com vários níveis de dificuldades entre fáceis, medianas e difíceis). Dante (2013) e Barroso (2010) trazem a explanação clássica, mas fazem a generalização com as definições das razões trigonométricas com os ângulos notáveis, resultando nesta nova proposta (dica prática) de resolução imediata nas situações problemas com ângulos notáveis ao iremos saber pelo resultado da pesquisa se proporciona uma maior compreensão na resolução dos problemas propostos.

2.1 Método de Polya – Resolução de problemas

O Método de Polya é uma das metodologias de ensino mais prática, espontânea, intuitiva e pontual para ser aplicada nas aulas de matemática. Esse método possibilita ao aluno uma sequência lógica para proceder da melhor forma possível a resolução de uma situação problema e acelerar o processo de compreensão dos estudantes. Segundo Polya (2006), a Resolução de Problema é uma arte prática de fazer Matemática, capacitando o discente na resolução de problemas rotineiros, assim como outros que requerem algum grau de originalidade e criatividade.

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (PÓLYA, p.4, 2006)

O Método de Polya é consequência de estudos desenvolvidos por George Polya no ano de 1944. Contudo seu estudo iniciou nos anos 60, nos Estados Unidos, limitando-se a solucionar e treinar problemas. De antemão nos anos 70, a Resolução de Problemas obteve espaço no mundo todo operando a mesma como uma ferramenta de estudo da matemática com estratégias para solucionar problemas.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, p. 40, 2000)

As aulas foram administradas sobre a perspectiva do Método de Polya como percurso metodológico com suas quatro etapas: i) Compreender o Problema; planejar sua Resolução; ii) executar o Plano; iii) Examinar a Solução. Vejamos cada uma delas

> I. Compreensão do problema - Ler cuidadosamente e compreender o problema; encontrar a (s) incógnita (s); reescrever o problema; identificar, claramente, as informações de que necessita para o resolver.
> II. Elaboração de um plano - identificar a conexão entre os dados e a incógnita com o objetivo de definir uma estratégia / plano de resolução; pensar problemas auxiliares ou particulares. O importante é a concepção do plano.
> III. Execução do plano – examinar e compreender todos os detalhes do plano, executar o plano até chegar à solução, verificar a correção de "cada passo". Se não chegar ao desejado, volta-se à fase de planificação.
> IV. Verificação dos resultados - avaliar o trabalho realizado, ajudar o aluno a organizar o seu processo de resolução de um dado problema, colocar a si próprio uma série de questões que têm como objetivo organizar o seu pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz, procurar utilizar o resultado ou o método em outros

> problemas. (Fernandes, Alves & Souza, 2019 p. 9)

Segundo Polya (2006), ao resolve-se um problema matemático é preciso compreendê-lo, estabelecer e executar um plano que o autor chama de princípio da aprendizagem ativa, no qual o aluno põe em prática o seu conhecimento matemático elaborando uma hipótese para uma resolução significativa. O agradável é solucionar várias questões com uma mesma estratégia e aplicar diferentes recursos para resolver um mesmo problema. "Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo‖" (DANTE, 2009, p.62).

> Toda a matemática se relaciona com a resolução de problemas. Alguns problemas são teóricos e muitos são ―práticos‖. Problemas de vários tipos ocorrem, obviamente, ao longo de toda a matemática. No entanto, há certas estratégias gerais e métodos que são úteis em todos os tipos de problemas (KRULIK, 1997, p.9).

Ao analisar a resolução de problemas como habilidade básica, somos submetidos a considerar especificidades do conteúdo de problemas e dos métodos de solução. É essencial rever o que deve ser ensinado no conteúdo. O estímulo dos docentes ao adotam a resolução de problema como metodologia de ensino é romper a lógica de que a prática mais frequente nas aulas de Matemática consiste em ensinar um conceito. Não obstante, aluno deverá aprender a interpretar além dos conceitos matemáticos na resolução de problemas.

No tópico seguinte apresentamos as análises dos livros citados acima em relação as abordagens feitas por cada autor relacionada ao conteúdo a ser ensinado (trigonometria no triângulo retângulo).

3. Abordagem dos livros didáticas

A abordagem do conteúdo sobre os triângulos vem sendo realizada de diversas formas e em diversos períodos do ensino médio, porém, normalmente é trabalhado com maior ênfase no primeiro ano, dando sequência ao conhecimento adquirido no ensino fundamental com o desenvolvimento de atividades com o Teorema de Pitágoras e da relação entre triângulos.

3.1 - Matemática Ciência e Aplicações, Iezzi et al., (2007)

Na análise feita no livro didático do autor Iezzi et al (2007) que aborda o conteúdo sobre os triângulos retângulos com ângulos notáveis no último capítulo de seu livro (Cap. 13). Inicia-se com um contexto histórico fazendo uma contextualização do conteúdo abordado.

Posterior a esta contextualização histórica onde os autores iniciam com uma exemplificação através do uso da trigonometria no contexto social, os autores optaram por uma abordagem da relação trigonométrica utilizando seno, cosseno e tangente e sem fazer referência aos ângulos notáveis ou aos valores fixos dessas relações. Abaixo verificamos sua abordagem apresentada pelos autores.

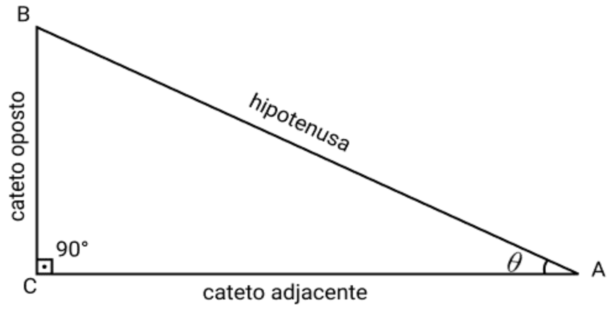

Figura 1 – Triângulo retângulo.
Fonte: Iezzi et al., (2007).

$$tg\ \theta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \theta}$$

$$sen\ \theta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$cos\ \theta = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Desta forma, essa abordagem emprega o uso de atividades para a assimilação do conteúdo seguido pelo aprofundamento do conhecimento com a utilização das relações entre o Seno, Cosseno e Tangente como a indicado na equação abaixo.

$$sen^2 x + cos^2\ x = 1$$

Esta abordagem é pouco utilizada por livros didáticos do ensino médio. Nesta mesma sequência eles apresentam uma breve referência aos ângulos notáveis de uma página sendo que boa parte são referente a deduções dos valores dos ângulos notáveis a partir de um triângulo equilátero.

A altura *AH* coincide com a mediatriz relativa ao lado *BC*; assim, *HC* mede $\frac{l}{2}$.

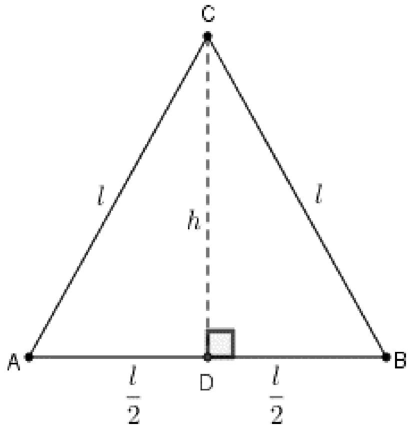

Figura 2 – Triângulo equilátero.
Fonte: Iezzi et al., (2007).

Além disso, *AH* mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Como vimos no capítulo anterior. Sendo assim temos:

$$\text{Sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} = \text{Cos } 60°$$

$$\text{Cos } 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sen } 60°$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e tg } 60° = \sqrt{3}.$$

Com isso é criada uma tabela dos ângulos notáveis, os quais devem ser assimilados de forma mecânica através da memorização pelos discentes.

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Figura 3 – Tabela dos ângulos notáveis.

Fonte: Iezzi et al., (2007).

3.2 - Matemática Contexto & Aplicações, Dante (2013)

Na análise realizada no livro didático do autor Dante (2013) ele aborda o conteúdo sobre a trigonometria no triângulo retângulo no capítulo 11 posteriormente ao capítulo que abrange Matemática Financeira e anterior ao de Geometria plana. O que poderia se tornar mais relevante para o ensino do conteúdo de trigonometria seria se capitulo sobre Geometria Plana viesse anteriormente para que o discente o trouxesse conhecimentos prévios sobre o triângulo retângulo. No início do capítulo este autor apresenta um histórico do primeiro matemático a construir a primeira tábua trigonométrica seguido de uma explicação da etimologia da palavra trigonometria. Para exemplifica-lo contextualizando ao cotidiano o autor usa uma definição de ângulo de subida, que relaciona altura, afastamento e percurso o que se aproxima de uma definição de semelhança de triângulos.

A partir desse ponto Dante (2013) começa a apresentar uma abordagem, bem próxima a utilizada por Iezzi et al., (2007) inserindo o contexto do Seno, Cosseno e Tangente. Vejamos abaixo a sua demonstração.

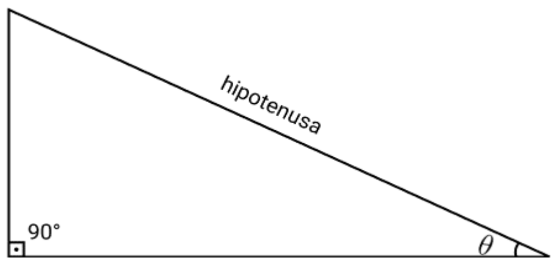

Figura 4 – Triângulo retângulo.
Fonte: Dante (2013).

$$tg\ \alpha = \frac{Altura}{afastamento}$$

$$sen\ \alpha = \frac{altura}{percurso}$$

$$cos\ \alpha = \frac{afastamento}{percurso}$$

Dante (2013) relata as relações trigonométricas através da semelhança de triângulos, chegando à conclusão que o Seno, Cosseno e a Tangente só dependem do ângulo. Posterior a isso, esse autor apresenta a relação entre seno, cosseno e tangente de modo semelhante aos outros tantos autores, como segue abaixo tal relação

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Desta forma o autor não apresenta a dedução dos ângulos notáveis (30, 45 e 60°) a partir do triângulo retângulo como outros autores, mas ele faz um apanhado de questões bem mais abrangentes com três páginas de questões contextualizadas, ou seja, número maior que os outros autores. Outro ponto de significativa importância na abordagem é o uso da tabela trigonométrica com os valores de Seno, Cosseno e Tangente do ângulo 1° até ao 89°.

3.3 - Giovanni e Bonjorno (2005)

Na análise do livro didático de Giovanni e Bonjorno (2005) onde é o único entre os estudados que aborda a trigonometria no início do livro logo depois de apresentar a Geometria métrica plana, conteúdo que dá subsidio ao estudo da trigonometria, esse sendo abordado no Capitulo 1, seguido pela trigonometria dos triângulos.

Como esse autor já aborda os conceitos de semelhança de triângulo no primeiro capítulo ele pode assumir uma postura mais direta no estudo da trigonometria iniciando as discussões com relação entre triângulos, posterior a isto, é apresentado uma abordagem tradicional, contudo ele utiliza uma visão mais ampla do triângulo exemplificando as relações trigonométricas através dos dois ângulos não retos do triangulo retângulo, o que pode facilitar a aprendizagem discente.

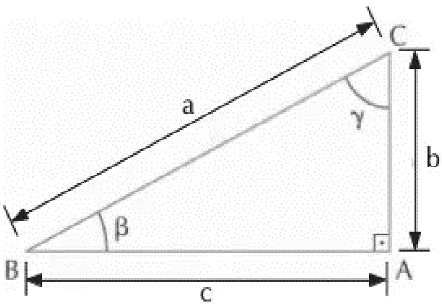

Figura 5 – Triângulo retângulo.
Fonte: Giovanni e Bonjorno (2005).

$$sen\ \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ opoto\ a\ \hat{B}}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$sen\ \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{medida\ do\ cateto\ opoto\ a\ \hat{C}}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Posteriormente a estas relações o autor já apresenta a tabela trigonométrica com Seno, Cosseno e Tangente de 1° a 90° finalizando o tema com um breve histórico sobre a trigonometria e uma pequena sequência de atividades.

No próximo ponto sobre o tema Giovanni e Bonjorno (2005) faz um resumo da tabela de seno, cosseno e tangente com os ângulos notáveis seguido da dedução dos ângulos notáveis a partir da decomposição do triângulo retângulo.

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Figura 6 – Tabela dos ângulos notáveis.
Fonte: Giovanni e Bonjorno (2005).

Para a complementação do ensino Giovanni e Bonjorno (2005) apresenta o tema de seno e cosseno de ângulos suplementares e leis dos cossenos e senos, finalizando o conteúdo com a aplicação da área de um triângulo qualquer, completando um total de 64 páginas com discussões relevantes ao estudo dos triângulos.

3.4 - Levantamento da nova abordagem iniciada por Dante (2013) e enfatizada por Barroso (2010)

Ela segue a mesma metodologia de Dante (2013) mas enfatiza no resumo do capítulo que o livro aborda uma dica prática que facilita a resolução da questão sem a necessidade, na maioria das vezes, de se fazer cálculo. Mas enquanto isso, ficamos limitados às dicas que o livro "Conexões com a Matemática" aborda, sendo insuficientes para resolver as questões de trigonometria no triângulo retângulo com os ângulos notáveis.

3.5 - Vejamos como fica essa nova abordagem para Seno, cosseno e tangente de 45°:

Este triângulo retângulo parte de um quadrado (dois ângulos de 45° e o ângulo de 90°, fechando a somatória dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano), ou seja, os catetos são iguais (mesma medida) e a hipotenusa vale o cateto vezes a raiz de dois, sendo a própria diagonal do quadrado.

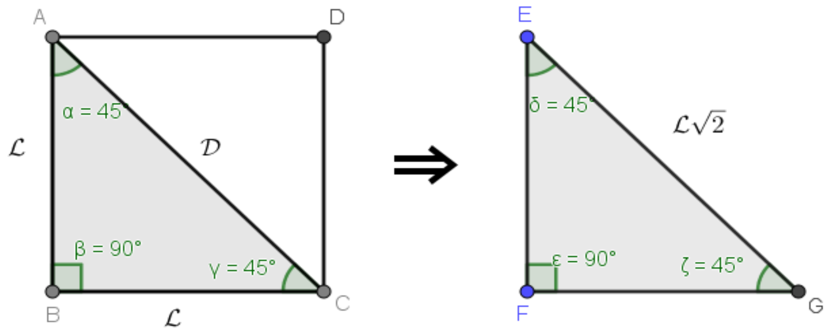

Figura 7 – Um quadrado e um Triângulo retângulo isósceles.
Fonte: Elaboração dos autores.

3.6 – Vejamos também essa dica para Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°

Observe: se a hipotenusa tem medida L o lado oposto ao ângulo de 30° será metade da hipotenusa e o lado oposto ao ângulo de 60° será metade da hipotenusa raiz de três.

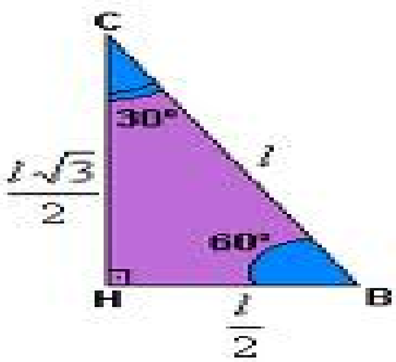

Figura 8 – Triângulo retângulo.
Fonte: Elaboração dos autores.

4. Resultados e discussões

Assim torna simples resolver as questões de trigonometria no triângulo retângulo com esses ângulos notáveis, visto que não precisamos de fórmulas ou tabelas, e com essas generalizações da definição das razões trigonométricas com os ângulos notáveis conseguimos solucionar as questões sem realizar cálculos, apenas através da forma intuitiva.

A sugestão é que o professor aborde essa dica com resolução rápida para os alunos só depois de ter trabalhado bem o método tradicional, assim a garantia de sucesso deste método será maior.

De acordo com a proposta de nossa pesquisa, foi realizada uma abordagem quantitativa para a análise dos dados colhidos durante a aplicação da atividade, objetivando verificar qual metodologia aplicada resultam melhores resultados de aprendizagem. Isto os remete a Godoy (1995) ao ressaltar que

> [...] num estudo quantitativo o pesquisador conduz seu trabalho a partir de um plano estabelecido a priori, com hipóteses claramente especificadas e variáveis operacionalmente definidas. Preocupa-se com a medição objetiva e a quantificação dos resultados. Busca a precisão, evitando distorções na etapa de análise e interpretação dos dados, garantindo assim uma margem de segurança em relação às inferências obtidas (Godoy, 1995a, p. 58).

Assim foram realizadas questões objetivas e instrumentos padronizados, pretensamente neutros, assegurando, assim, generalizações com precisão e objetividade. Foi aplicado concomitantemente a mesma avaliação nas duas salas. Segundo Vergara (1997) e Gil 1999) a nossa amostra é considerada probabilística, baseada em procedimentos estatísticos na pesquisa de natureza quantitativa. Esta pesquisa de caráter quantitativo os processos de coleta e análise de dados são separados no tempo, a coleta antecede à análise.

Assim a exposição do conteúdo matemático e o teste foram aplicado para 66 estudantes do 1º ano, em que se dividindo os alunos em duas salas diferentes de forma aleatória e impessoal. Após a exposição do assunto sobre o percurso metodológico da Resolução de Problema tanto na abordagem clássica como na abordagem da dica prática.

Após a realização do teste sobre as duas visões (clássica e "bizu) foi realizada a coleta dos dados (correção da verificação realizada evidenciando a comprovação de uma porcentagem de 88% de acerto dos os alunos se sobressaindo melhor com a utilização da proposta mais simples ("bizu"). Já os alunos que utilizaram a proposta clássica obtiveram 37 % em acertos. Assim constatou-se, que a proposta mais simples possibilita uma melhor assimilação do conteúdo e proporciona um aprendizado mais eficaz aos discentes.

Vejamos a tabela abaixo:

Dados da avaliação aplicada nos primeiros anos da E.E.E.P. Governador Valdemar Alcântara Ubajara-CE

Research, Society and Development, v. 9, n.1, e09911337, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1337

Método clássico			**Método mais simples ("bizu")**		
Número de questões Erradas	**Número de questões Certas**	**Total**	**Número de questões Erradas**	**Número de questões Certas**	**Total**
59	101	160	20	150	170
37%	63%	100%	12%	88%	100%

Tabela 1 – Dados e porcentagens do resultado da avaliação proposta.
Fonte: Elaboração dos autores.

A sala do 1° ano com 34 discentes realizou o teste através da dica de fácil resolução e garantiu 22 notas máximas, enquanto que na outra turma, de 32 discentes apenas 5 Pode-se observar que esse teste com 5 questões (sendo 2 simples, 2 medianas e 1 difícil comprova que esse método obtém um melhor aproveitamento entre os discentes. Desse modo conclui-se que se o professor inovar através de um recurso metodológico que busque facilitar o aprendizado dos discentes os resultados serão promissores acarretando um percentual de aprendizagem cada vez maios.

Com a aplicação de problemas envolvendo trigonometria no triângulo retângulo com ângulos notáveis por meio dessa fácil resolução pode-se tornar a assimilação mais eficaz, simples e gratificante, motivando o discente ainda mais para a resolução de situações problemas em diferentes contextos que envolva este conteúdo.

Assim pode-se constatar através do gráfico 1 logo abaixo, as informações sobre erros e acertos entre a exposição clássica e a exposição com a nova proposta (as dicas de resolução rápida).

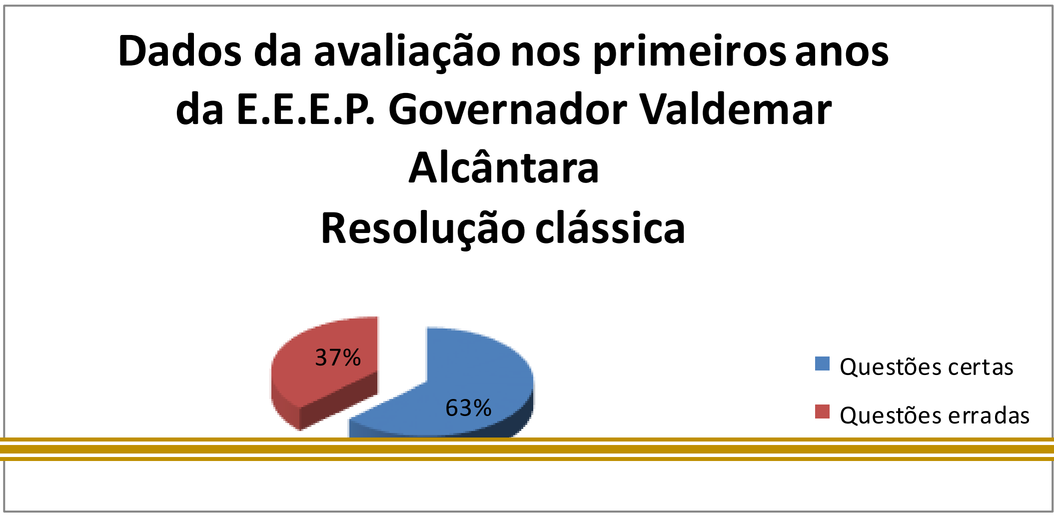

Gráfico 1 – Dados da avaliação com a exposição clássica.
Fonte: Elaboração dos Autores

Gráfico 2 - Dados da avaliação dos alunos com a dica (nova proposta de resolução das razões trigonométricas).
Fonte: Elaborado pelos Autores

5. Conclusão

Conforme os dados apresentados podem-se comprovar no resultado das avaliações que a turma que utilizou a nova proposta de ensino através com as dicas de resoluções práticas (“bizu”) obteve um aproveitamento superior em relação à turma que resolveu com a abordagem clássica proposto por Iezzi et al. (2007) e Giovanni e Bonjorno (2005). Garantindo que o professor pode inovar e buscar novas estratégias de ensino que aprimore e proporcione um aprendizado mais eficaz aos alunos.

Não podemos deixar de informar que a metodologia utilizada (Resolução de Problema) foi evidencia com maior ênfase durante a explanação dos assuntos nas duas salas de aulas com a resolução de situações-problema e durante as aplicações das avaliações percebemos uma passagem rápida nos passos da Resolução de Problema com a turma que usou as dicas de resolução rápida, pois sua resolução era mais intuitiva e rápida, deixando subtendida com passagens rápidas pelos passos do Método de Polya e na turma que usou a resolução clássica foi possível evidenciar com mais clareza os passos dessa metodologia utilizada, pois era perceptível o grau de dificuldades de alguns alunos para resolver as questões proposta.

Foi perceptível que os alunos que usaram as dicas da nova abordagem as questões difíceis se tornaram fáceis e medianas enquanto para a outra turma que resolveram fundamentados na proposta clássica as questões medianas se tornaram difíceis para uma grande parte dos discentes. Isso, nos deixou bem reflexivo e ao mesmo tempo deixou mais evidência que o incremento das dicas de resolução rápida dos ângulos notáveis podem contribuir para que os alunos não tenham tantas dificuldades epistemológicas durante a resolução de problemas, pois se ambos tiveram as mesmas quantidades de horas aulas com os mesmos exercícios aplicados durante as aulas e provas se não fosse importante ressaltar essas dicas não seria tão discrepante a diferença que foi constatado em números pelas porcentagens de erros e acertos .

Portanto, sabemos das dificuldades que a grande maioria dos estudantes têm ao aprender matemática, devido isso o professor necessita criar estratégias que amenizem essas dificuldades de forma mais eficiente e gratificante o uso do incremento dessa nova abordagem, possibilitando aos alunos uma dica de resolução rápida foi crucial para driblar boa parte dos obstáculos e ganhar tempo nas tentativas de resoluções das questões proposta.

Referências

BARROSO, J. M. (2010). *Conexão com a matemática*. São Paulo: Moderna.

BRASIL (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC; SEMTEC.

DANTE, L. R. (2009). *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. São Paulo: Ática.

DANTE, L. R. (2013). *Matemática-Contextos & Aplicações*. São Paulo: Ática.

FERNANDES, C., ALVES, F. R. V. e SOUSA, M. J. A. (2019). Contribuições de solução de problemas para o treinamento de professores de matemática por meio de engenharia didática. *Research, Society and Development.* 8 (10). 1-16.

GIL, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas.

GIL, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. (2005) *Matemática Complementar*. São Paulo: FTD.

GODOY, A. S. (1995) Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*. São Paulo. 35 (2). 57-63.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. (2007). *Matemática volume único: Ensino Médio.* São Paulo: Atual.

KRULIK, S.; REYS R. E. (1997) A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo. Atual.

LIMA, N. J. (2013). A aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas – RS, Brasil.

NEVES, M. M. B. J.; ALMEIDA, S. F. C.; CHAPERMAN, M. C. L.; (2002). Formação e Atuação em Psicologia Escolar: análise das modalidades de Comunicações nos Congressos Nacionais de Psicologia Escolar e Educacional. *Psicologia, Ciência e Profissão*. 22 (2). 2-11.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. (2009). *História da Matemática em Atividades Didáticas*. Natal – RN. EDUFRN.

POLYA, G. (2006). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

VERGARA, S. C. (1997). *Projetos e relatórios de pesquisa em administração.* São Paulo: Atlas.

Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito

Cícera Fernandes – 30%

José Gleison Alves da Silva – 30%

Rosalide Carvalho de Sousa – 30%

Ana Karine Portela de Vasconcelos – 10%