Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización

Irene Ferrando, Universitat de València (España)

Carlos Segura, Universitat de València (España)

Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización

Resumen

El fomento de la flexibilidad y adaptabilidad en resolución de problemas matemáticos favorece el desarrollo de la competencia matemática. En este estudio se describe y justifica el diseño de una secuencia de tareas de modelización que permite analizar la flexibilidad inter-tarea en los estudiantes. El objetivo central del estudio es analizar si los estudiantes son capaces de adaptar sus planes de resolución según aspectos relativos al contexto de la tarea, cambiando de estrategia de una tarea a otra, si estos aspectos varían. En el estudio han participado 110 estudiantes del grado de Maestro/a en Educación Primaria; los resultados permiten conocer en qué medida son flexibles los estudiantes y saben adaptar sus planes de resolución a las tareas, y concluir que la flexibilidad inter-tarea puede promoverse a través de determinadas secuencias de tareas de modelización.

Palabras clave. Modelización; flexibilidad; adaptabilidad; contexto real; estimación.

Fostering mathematical flexibility through a sequence of modelling tasks

Abstract

The promotion of flexibility and adaptability in mathematical problem solving fosters the development of mathematical competence. This study describes and justifies the design of a sequence of modelling tasks that allows the analysis of inter-task flexibility in students. The central objective of the study is to analyse whether students are able to adapt their resolution plans according to aspects related to the task context, changing their strategy from one task to another, if these aspects vary. The study involved 110 students of the Primary Education Teacher grade; the results allow us to understand to what extent the students are flexible and know how to adapt their resolution plans to the tasks, as well as to conclude that inter-task flexibility can be promoted through certain modelling task sequences.

Keywords. Modelling; flexibility; adaptability; real context; estimation.

1. Introducción

Distintos trabajos demuestran que el uso de tareas de modelización promueve un aprendizaje significativo (Blum & Niss, 1991; Kaiser & Sriraman, 2006). Por otro lado, gran variedad de estudios señalan que la flexibilidad es un componente del conocimiento procedimental y mejora la competencia matemática en resolución de problemas (Star, 2005; Elia, van den Heuvel-Panhuizen & Kolovou, 2009; CCSSI, 2010).

Blum y Leiss (2007) afirman que las tareas de modelización son problemas de contexto real que admiten varias resoluciones. Así, este tipo de problemas pueden ser considerados como tareas con múltiples soluciones en el sentido de Leikin y Levav-Waynberg (2008). En esta línea, investigaciones como la desarrollada por Schukajlow, Krug y Rakoczy (2015) muestran que promover el uso de varias soluciones en problemas de modelización es una vía efectiva para mejorar el rendimiento. Hay distintas aproximaciones para abordar el estudio de las posibles resoluciones de una tarea de modelización. Achmetli, Schukajlow y Rakoczy (2018) identifican tres formas de diferenciar las resoluciones de un problema de contexto real. La primera es establecer diferentes hipótesis que generalmente conducen a diferentes resultados. La segunda es aplicar diferentes estrategias matemáticas, lo que normalmente conduce al mismo resultado matemático. La tercera es la combinación de las dos anteriores.

En este estudio se emplea la tercera aproximación, basada en dos componentes del plan de resolución (modelo inicial, que constituye una primera representación simbólica de la realidad del problema; y estrategia, entendida como los procesos para obtener la solución requerida), para analizar la flexibilidad en la resolución de un tipo concreto de tareas de modelización: aquellas que presentan una situación real que requiere la estimación del número de elementos encerrados en una superficie acotada. Albarracín y Gorgorió (2014) mostraron que este tipo de tareas, conocidas como problemas de Fermi, se resuelven introduciendo elementos característicos del proceso de modelización. En este tipo de tareas, el enunciado presenta una situación de la que se conoce poca información concreta, lo que obliga a hacer suposiciones y a simplificar para obtener una solución a la pregunta inicial (Efthimiou & Llewellyn, 2007).

El punto de partida del presente estudio es una investigación inicial que permitió identificar una relación significativa entre las variables ligadas al contexto real del enunciado del problema de estimación y los planes de resolución escogidos por los estudiantes (véase Ferrando, Segura & Pla-Castells, 2019a, 2019b). Los resultados de dicho estudio resultaron claves para validar el diseño de una secuencia de cuatro tareas. En base a los resultados de esa primera experiencia, es natural preguntarse si dicha secuencia promueve la flexibilidad inter-tarea entre los estudiantes, es decir, que cambien de plan de resolución de una tarea a otra cuando el contexto varía. Así, el objetivo central de este trabajo es analizar las capacidades de flexibilidad inter-tarea y adaptabilidad en tareas de modelización; en particular, en un tipo de problemas de Fermi.

Los resultados del presente trabajo se basan en una segunda experiencia en la que participaron 110 estudiantes del grado de Maestro/a en Educación Primaria; un análisis de sus producciones, combinando técnicas cuantitativas y cualitativas, ha permitido abordar el objetivo de esta investigación. Además, el diseño de la experiencia ha permitido analizar también, con carácter exploratorio, la flexibilidad intra-tarea, es decir, si los estudiantes son capaces de proponer dos planes de resolución una misma tarea.

2. Marco teórico

En esta sección se desarrollan los conceptos clave implicados en este trabajo. Se parte de un enfoque que permite definir los problemas de Fermi como una clase de tareas de modelización, caracterizando sus planes de resolución. A continuación, se analiza, en el caso de tareas de estimación, el contexto como variable de tarea. Para finalizar, se presentan definiciones de flexibilidad y adaptabilidad para este tipo de problemas.

2.1. Plan de resolución de un problema de Fermi

Los problemas de contexto real promueven la adquisición de habilidades como la estimación, considerada importante y útil (Arlebäck, 2009; Peter-Koop, 2009; Sriraman & Lesh, 2006). En la vida cotidiana hay muchas situaciones sobre las que plantear preguntas en las que una estimación es la mejor respuesta, ya sea porque no se tienen los medios para responder con precisión o porque no se dispone de toda la información necesaria. Las tareas de estimación pueden servir como medio de iniciación a la elaboración de modelos matemáticos (Borromeo-Ferri, 2018). Los problemas de Fermi son tareas de estimación a partir de contextos reales donde falta información explícita: la falta de datos exige un proceso de simplificación y matematización de la realidad.

Ärlebäck (2009) define los problemas de Fermi como problemas abiertos y no estándar que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación del problema, y que estimen las cantidades relevantes antes de emprender, a menudo, cálculos sencillos. Existe un vínculo claro entre el proceso de resolución de problemas de Fermi y el trabajo desarrollado durante el ciclo de modelización para la construcción de un modelo matemático (Ärlebäck, 2009; Borromeo-Ferri, 2006). El desarrollo de un modelo matemático para describir un determinado fenómeno real es un proceso complejo que a menudo requiere realizar simplificaciones y asumir hipótesis antes del trabajo puramente matemático, como ocurre cuando se resuelven problemas de Fermi.

Según Lesh y Harel (2003), un modelo matemático es un sistema formado por conceptos matemáticos, representaciones simbólicas de la realidad, relaciones, regularidades o patrones, así como los procedimientos, matemáticos o no, asociados a su uso. En Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi y Gorgorió (2017), a partir de la definición de modelo matemático en Lesh y Harel y del análisis en Albarracín y Gorgorió (2014), se diseñó un instrumento de análisis de producciones escritas de los estudiantes al resolver un tipo de problemas de Fermi: aquellos con una situación real que requiere la estimación del número de elementos que caben en un área limitada.

El modelo inicial se refiere a las simplificaciones e hipótesis esenciales que el resolutor asume sobre la configuración de los elementos cuyo número debe ser estimado; es decir, a cómo el resolutor distribuye los elementos en la superficie. Por ejemplo, si se fija una región rectangular, el resolutor puede disponer los elementos en filas (o columnas); esto reduce el problema inicial de magnitudes bidimensionales (áreas) a uno de magnitudes unidimensionales (longitud). Esta configuración corresponde a un modelo inicial que consideramos unidimensional (1D) porque implica magnitudes lineales. La otra alternativa es que el resolutor establezca un modelo basado en una disposición no lineal de los objetos en la región, basando su resolución en el cálculo de áreas. Esta configuración corresponde a un modelo inicial bidimensional (2D).

Una vez establecido el modelo inicial, se necesita aplicar una estrategia para obtener el resultado de la estimación. La estrategia más básica (pero poco eficiente, si el número de elementos a estimar es muy grande) es el recuento. También se puede argumentar a partir del espacio (longitud o área) ocupado por un elemento, y obtener el resultado de la estimación dividiendo el área total (o longitud total) por el área (o longitud) ocupada por un elemento. Esto corresponde a la estrategia de unidad base (Gallart, Ferrando, García-Raffi, Albarracín & Gorgorió, 2017). Por último, es posible razonar a partir de una magnitud intensiva, la densidad, calculando el número de elementos en una unidad de área (o longitud) y multiplicando este valor por el número total de unidades de área (o longitud); esto corresponde a la estrategia de densidad (Gallart et al., 2017).

2.2. Variables de contexto del problema

Para avanzar en el conocimiento sobre resolución de problemas es necesario prestar atención a las características de los problemas. Uno de los temas desarrollados a partir del trabajo de Kilpatrick (1978) es el estudio de las “variables de la tarea” de un problema matemático. Según la definición establecida por Goldin y McClintock (1979), una variable de la tarea es cualquier característica que asuma un valor determinado a partir de un conjunto de valores posibles, por lo que puede ser numérica (por ejemplo, el número de palabras del enunciado) o clasificatoria (por ejemplo, el contexto de la tarea). En la definición original de variable de la tarea, Kilpatrick (1978) establece tres categorías: variable de contexto, de formato y de estructura. En la secuencia de problemas que se emplea en este estudio se fijan la variable de estructura (complejidad gramatical, presentación de los datos) y la de formato (enunciado con pregunta directa y fotografía de la situación real), para centrarse en las variables de contexto, referidas a los significados no matemáticos que aparecen el texto del problema, intervengan o no en el proceso de resolución (Puig & Cerdán, 1988; Webb, 1980).

Las características del contexto en esta clase de tareas se interpretan en términos de variables. Dado que en estos problemas se pide estimar el número de elementos que caben en una región acotada, y que esto requiere que el resolutor reconstruya mentalmente el espacio bidimensional y distribuya los elementos, es posible identificar qué variables de contexto intervienen en dicho proceso: el tamaño de los elementos, el tamaño de la región, la forma de los elementos, la forma de la región y la disposición de los elementos en la región. Estas variables asumen un valor particular dentro de un posible conjunto de valores: tamaño (grande, mediano, pequeño), forma (regular, irregular) y disposición (regular, irregular).

2.3. Flexibilidad y adaptabilidad

El análisis de las producciones de los estudiantes como un plan de resolución formado por modelo inicial (1D o 2D) y estrategia (recuento, unidad base o densidad) permite identificar y caracterizar todas las posibles respuestas a esta clase de problemas de Fermi, que pueden verse como Multiple Solution Tasks (Leikin & Levav-Waynberg, 2008). Estos autores han estudiado el rol de este tipo de tareas en el desarrollo de la creatividad matemática, que abordan con tres criterios: fluidez o soltura, flexibilidad y originalidad (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Así, el uso flexible de planes de resolución es un indicador no sólo de la creatividad matemática, sino, desde una perspectiva psicológica, de la variabilidad cognitiva, que permite a los individuos resolver problemas rápidamente y con precisión (Heinze, Star & Verschaffel, 2009). Además, desde una perspectiva educativa, la flexibilidad está considerada un aspecto importante de la competencia matemática, pues es necesaria para que los estudiantes adquieran la habilidad de adaptar sus resoluciones a las características de la tarea o del contexto (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Aunque para algunos autores las nociones de flexibilidad y adaptabilidad son sinónimas (Star & Rittle-Johnson, 2008), otros distinguen entre el uso flexible de estrategias, que se refiere a la capacidad para escoger entre diferentes estrategias –sin seleccionar necesariamente la más adecuada–, y el uso adaptativo de las estrategias, que implica la selección de la más adecuada a un problema concreto (Heinze et al., 2009). En este trabajo se seguirá esta última definición aplicada al plan de resolución (modelo inicial y estrategia), y en particular, la distinción en dos tipos de flexibilidad en resolución de problemas propuesta por Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009): flexibilidad inter-tarea (cambio de estrategia entre tareas) y flexibilidad intra-tarea (cambio de estrategia dentro de una tarea).

En las siguientes secciones se describen las experiencias que componen este trabajo de investigación. La sección 3 se centra en una experiencia inicial que ha sido descrita en otros trabajos (Ferrando, Segura & Pla-Castells, 2019a, 2019b); una exposición abreviada de su diseño, metodología y resultados es necesaria para la comprensión de la sección 4. En esa sección se describe la segunda experiencia para abordar la pregunta central de investigación del trabajo: ¿son los estudiantes flexibles y adaptables cuando resuelven una secuencia de problemas de Fermi como los descritos? Se detalla el diseño experimental y metodología, y se presentan los resultados del análisis y las conclusiones.

3. Descripción de la experiencia inicial: Relación entre contexto del problema y plan de resolución

3.1. Diseño experimental y metodología

Durante el curso 2017/18 se realizó la primera experiencia. Participaron 113 estudiantes de tres grupos naturales de cuarto curso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València. El objetivo era validar el diseño de una secuencia de cuatro problemas de estimación en contexto real que pretendía identificar si los problemas tenían características diferenciadoras que influyeran en el plan de resolución. El diseño y análisis de esta experiencia ha sido descrito en Ferrando et al. (2019b), por lo que en esta sección se describe con brevedad.

En los problemas consistentes en estimar el número de elementos en un recinto acotado se identifican las variables de contexto (tamaño y forma de los elementos y de la región, disposición de los elementos), pero en la secuencia utilizada en la experiencia se fijó la variable de la forma de la región, considerando en todos los problemas espacios físicos reales con regiones rectangulares, con el fin de simplificar los cálculos de áreas. El diseño de la secuencia se basó en las siguientes premisas:

- Los cuatro problemas piden una estimación razonada de una cantidad de elementos lo suficientemente grande para que no sea obtenida directamente.
- Todos los problemas están contextualizados en el entorno inmediato de los estudiantes.
- Las diferencias entre los problemas se refieren al tamaño relativo de los elementos respecto al espacio total y a la existencia o no de regularidad tanto en la forma como en la disposición de los elementos.

La Tabla 1 detalla el enunciado y el valor de las variables de contexto para cada problema. La experiencia ocupó una sesión de 90 minutos en el aula ordinaria. Se entregaron a cada estudiante los enunciados de los problemas con espacio para escribir. Se les indicó que, para cada uno de los problemas, debían plantear un plan de resolución indicando los datos necesarios para poder abordar la resolución del problema, así como los procedimientos matemáticos necesarios para llegar a la obtener la estimación pedida.

Tabla 1. *Enunciados de los problemas de la secuencia*

Enunciado	Valor de las variables
P1. Día de lluvia. ¿Cuántos estudiantes pueden refugiarse bajo el porche de la facultad cuando llueve?	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: irregular Tamaño región: mediano
P2. Baldosas. ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de la facultad y el gimnasio?	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: regular Tamaño región: mediano
P3. Briznas de hierba. ¿Cuántas briznas de hierba hay en este espacio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: irregular Tamaño región: pequeño
P4. Coches. ¿Cuántos coches caben en el parking de la facultad?	Tamaño elementos: grande Disposición elementos: regular Tamaño región: grande

A fin de fijar criterios comunes para el análisis cualitativo, cada producción se revisó por tres investigadores que categorizaron por separado. Si había discrepancia, se discutía hacia un consenso. Las producciones se categorizaron en cuatro planes de resolución:

- *Recuento*: sólo se aporta como procedimiento el conteo, que puede ser efectivo (proponiendo contar, por ejemplo, de cinco en cinco) o exhaustivo;
- *1D-linearización*: producciones que proponen un modelo inicial unidimensional;
- *2D-unidad base*: producciones basadas en un modelo bidimensional y en el procedimiento de dividir el área total entre el área de un elemento tomado como unidad;
- *2D-densidad*: producciones que incluyen un modelo bidimensional y en el procedimiento de multiplicar el área total por una densidad estimada.

Aquellas producciones que no aportaban detalles suficientes que dieran lugar a la obtención de una estimación fueron categorizadas como *incompletas*.

3.2. Resultados

Después del análisis cualitativo y categorización de los datos, se abordó el análisis cuantitativo para establecer la validez de la secuencia (alfa de Cronbach igual a 0.64). En la tabla 2 se recogen los resultados del análisis de las producciones completas.

Tabla 2. *Frecuencia relativa de cada plan de resolución para cada problema de la secuencia*

Problema	Recuento	1D-Linearización	2D-Unidad Base	2D-Densidad
P1	1%	13%	**75%**	11%
P2	3.5%	**57%**	35%	4,5%
P3	1%	4.5%	46.5%	**48%**
P4	1%	10%	**88%**	1%
Global	2%	21%	**61%**	16%

Para confirmar la dependencia entre estrategia y contexto del problema se realizó un test de independencia Chi^2, contrastando las hipótesis: H_0: la elección del plan de resolución es independiente del problema; H_1: existe dependencia entre el plan de solución y el problema. Dado que el valor de $Chi^2(9, N=362) = 182.9$, se pudo rechazar la hipótesis nula ($p<.01$). Por tanto, la relación entre el plan de resolución y el contexto del problema es significativa.

Aunque globalmente el 61% de los planes de resolución se categorizaron como 2D-unidad base, en Ferrando et al. (2019a) se concluye que ciertas características del contexto influyen en los planes de resolución de los estudiantes. Los problemas que presentan una situación con una disposición regular de los elementos promueven modelos iniciales 1D, mientras que la irregularidad da lugar a modelos iniciales 2D. Además, un tamaño grande de los elementos incrementa el número de estrategias basadas en la unidad base, y un tamaño pequeño de los elementos promueve la estrategia de densidad. El tamaño de la región no parece influir en los planes de resolución.

4. Segunda experiencia: flexibilidad y adaptabilidad

Una vez determinada la validez de la secuencia de tareas, se diseñó la experiencia en cuyos resultados se basa el presente estudio. En primer lugar, se presentan los detalles relativos a la metodología que completan los ya descritos en el apartado anterior y, a continuación, se describen los resultados de los análisis.

4.1. Diseño experimental y metodología

La experiencia se desarrolló a lo largo del curso 2018-2019. La muestra está formada por 3 grupos de estudiantes (N=110) de cuarto curso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València. Las condiciones de la experiencia fueron prácticamente las mismas que las de la experiencia piloto, sin embargo, ahora se incorporó una pregunta final a la secuencia: se pedía a los estudiantes que propusieran dos soluciones distintas al problema P4. Puesto que los criterios de categorización de respuestas ya habían sido consensuados en la experiencia de 2017-18, el análisis cualitativo de las producciones escritas en esta experiencia se realizó por parejas.

4.2. Resultados

Flexibilidad inter-tarea

Después de categorizar las producciones de los estudiantes que han resuelto la secuencia de problemas en cuatro planes de resolución (recuento, 1D-linearización, 2D-unidad base, 2D-densidad), el análisis de la flexibilidad inter-tarea pretendía cuantificar en qué medida los alumnos cambian de plan de resolución de un problema a otro. Dado que todos los estudiantes completaron al menos dos tareas, se estableció la siguiente escala: aquellos que se limitaban a proponer el mismo plan de resolución en las tareas completas (dos o más) se categorizaron como “nada flexibles”; los que proponían dos planes de resolución diferentes en las tareas completas, fueron categorizados como “flexibles”; finalmente, los que propusieron tres o más planes de resolución diferentes en las tareas completas, fueron categorizados como “muy flexibles”. En la Tabla 3 se recogen los resultados de este análisis.

Tabla 3. *Distribución de las frecuencias de cada categoría de flexibilidad*

	Nada flexible	Flexible	Muy flexible
Frecuencia absoluta	23	50	37
Frecuencia relativa	21%	45%	34%

Adaptabilidad

El primer paso antes de abordar un análisis sistemático de la adaptabilidad en el contexto de la segunda experiencia consiste en dar respuesta a la pregunta de Heinze, Star y Verschaffel (2009, p. 256, nuestra traducción): “¿cuándo se debe considerar que una estrategia es apropiada y qué criterios son relevantes para ello?”. En este estudio se pretende que la adaptabilidad mida el grado en que un estudiante es capaz de plantear, en cada tarea, el plan de resolución más apropiado. Así, antes de establecer categorías de análisis, plantear el plan “más apropiado” para cada problema de la secuencia.

Los resultados de la experiencia piloto a través de la cual se identificó una relación significativa entre las características del contexto de los problemas y los planes de resolución proporcionan un argumento estadístico que permite establecer, para cada problema, el plan de resolución que se considera más apropiado. En la Tabla 2 se observa que, pese a la relación entre problemas y planes de resolución, la resolución basada en un modelo bidimensional y la estrategia de unidad base es, globalmente, la más frecuente. Para hacer más transparente el efecto de crecimiento o decrecimiento del uso de cada plan de resolución en cada problema, se halla un índice normalizado:

- Para cada plan de resolución y en cada problema, se calcula la diferencia entre su frecuencia relativa y la frecuencia relativa del correspondiente plan de resolución en la secuencia (frecuencia global).
- Como resultado de esto se obtienen unos índices que se normalizan respecto a la frecuencia global de cada plan de resolución. La Tabla 4 presenta, para cada problema de la secuencia, las frecuencias corregidas de cada plan de resolución.

Tabla 4. *Índices normalizados de uso de cada plan de resolución corregidas para identificar la estrategia "más apropiada" en cada problema*

Problema	Recuento	1D-Linearización	2D-Unidad Base	2D-Densidad
P1	-36%	-39%	**23%**	-33%
P2	102%	**171%**	-43%	-72%
P3	-32%	-78%	-24%	**198%**
P4	-35%	-54%	**44%**	-93%

Según la Tabla 4, se establece el plan de resolución "más apropiado" por problema:

- Para P1, sobre estimar el número de personas, el plan de resolución fijado como más apropiado es el 2D-unidad base.
- Para P2, sobre estimar el número de baldosas, el plan de resolución fijado como más apropiado es el 1D-linearización.
- Para P3, sobre estimar el número de briznas de hierba, el plan de resolución fijado como más apropiado es el 2D-densidad.
- Para P4, sobre estimar el número de coches necesarios para llenar un parking, el plan de resolución más apropiado es 2D-unidad base.

Se ha cuantificado la adaptabilidad de cada resolutor mediante una escala de cinco niveles: 0 es nada adaptable (no propone en ningún problema el plan de resolución más apropiado); 0.25 es poco adaptable (sólo lo propone en un problema); 0.5 es medianamente adaptable (lo propone en dos problemas); 0.75 indica un resolutor bastante adaptable (propone el plan más apropiado en tres problemas); y 1 indica muy adaptable (es capaz de proponerlo para cada problema). No se piensa como medianamente adaptable al resolutor que, por haber propuesto en todos los problemas el mismo plan, en algunos propone el que se considera "más apropiado". Por tanto, se descarta de la clasificación según la adaptabilidad a estudiantes categorizados como "no flexibles" (total de 23). La Figura 1 recoge los resultados del análisis de la adaptabilidad.

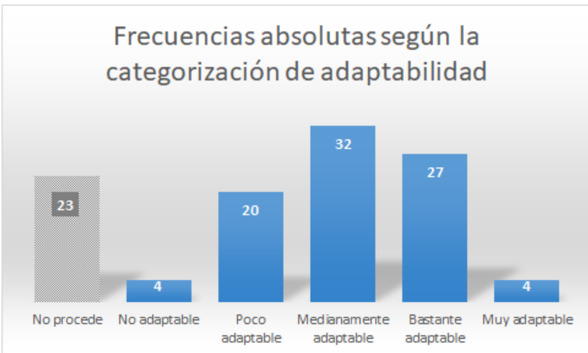

Figura 1. Distribución de estudiantes según grado de adaptabilidad

Uno de los aspectos que interesa analizar es la relación entre adaptabilidad y flexibilidad inter-tarea. La Tabla 5 incluye la distribución de los estudiantes categorizados como flexibles o muy flexibles según su nivel de adaptabilidad.

Tabla 5. *Distribución de los estudiantes flexibles según el grado de adaptabilidad*

	Nada adaptable	Poco adaptable	Medianamente adaptable	Bastante adaptable	Muy adaptable
Flexible	4	18	16	12	0
Muy flexible	0	2	16	15	4

Para analizar la existencia de una relación entre la inter-flexibilidad y la adaptabilidad, se han agrupado los datos (uniendo, por un lado, las categorías "nada" y "poco" adaptable y, por otro "bastante" y "muy adaptable") y se ha realizado un análisis para contrastar las hipótesis: H_0: no existe relación entre el grado de flexibilidad y el grado de adaptabilidad; H_1: existe relación entre el grado de flexibilidad y el grado de adaptabilidad. Se ha calculado el estadístico $Chi^2(2, N=87) = 16{,}67$ lo cual permite descartar la hipótesis nula con un nivel de significación $p<.01$. Existe una relación significativa entre el grado de flexibilidad y el de adaptabilidad.

Flexibilidad intra-tarea

Con el fin de completar el análisis de la flexibilidad, en la experiencia desarrollada en el curso 2018-19 se amplió la pregunta del problema P4: se pedía a los estudiantes que propusieran dos planes de resolución distintos. El objetivo de esta adenda al cuestionario validado en la experiencia inicial es obtener información sobre flexibilidad intra-tarea; conviene tener en cuenta que esta parte del presente estudio es exploratoria.

Tabla 6. *Distribución de estudiantes flexibles inter-tarea según grado de flexibilidad intra-tarea*

	Nada flexible intra-tarea	Flexible intra-tarea
Nada flexible inter-tarea	19	4
Flexible inter-tarea	32	18
Muy flexible inter-tarea	24	13

En el análisis de la flexibilidad intra-tarea se ha categorizado como "flexible intra-tarea" a los estudiantes capaces de proponer un plan de resolución alternativo en el problema P4. Sólo un 32% de los estudiantes (35 en total) son categorizados como flexible intra-tarea. De esos 35 estudiantes, el 88% había sido categorizado como flexible o muy flexible en el apartado inter-tarea. La Tabla 6 detalla el número de estudiantes en cada categoría de flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea.

El test Chi^2 de independencia indica que no hay una relación significativa entre la flexibilidad inter e intra-tarea ($Chi^2(2, N=110) = 2.7973$, $p=.24$).

Otro aspecto de interés en el análisis de la flexibilidad intra-tarea es conocer qué planes de resolución alternativos proponen: el 71% de los estudiantes que propusieron un segundo plan de resolución al problema P4 habían propuesto inicialmente uno basado en un modelo bidimensional y en la estrategia de iteración de la unidad. Sin embargo, cuando han de proponer un plan de resolución alternativo, el 49% de los estudiantes propone un plan basado en un modelo inicial unidimensional. La Tabla 7 presenta las frecuencias de las posibles combinaciones de dos planes de resolución propuestos en P4.

Tabla 7. *Número de resolutores que pasan de un plan de resolución a otro en P4*

Cambio	a recuento	a 1D-Linearización	a 2D-Unidad Base	a 2D-Densidad	Total en 1ª resolución
De recuento…	XXX	1 (3%)	1 (3%)	0	2 (6%)
De 1D-linearización…	0	XXX	6 (17%)	2 (6%)	8 (32%)
De 2D-unidad base…	5 (14%)	**16 (46%)**	XXX	4 (11%)	25 (71%)
De 2D-densidad	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	XXX	0 (0%)
Total en 2ª resolución	14%	49%	20%	17%	

5. Conclusiones

El punto de partida de esta investigación es una experiencia inicial que permite establecer una categorización de los planes de resolución que los estudiantes pueden proponer en cada problema. Un análisis cualitativo y cuantitativo indica que la secuencia de problemas promueve planes de resolución distintos. Por tanto, pese a ser problemas abiertos, dado que los planes de resolución están categorizados, puede establecerse una comparativa y abordar un análisis sistemático para llegar a conclusiones sobre flexibilidad y adaptabilidad. Para alcanzar dicho objetivo se realizó una segunda experiencia, que permite analizar aspectos ligados a la adaptabilidad y la flexibilidad inter-tarea, y a la flexibilidad intra-tarea. A continuación, se exponen las conclusiones a las que conducen los resultados de estos análisis.

Respecto a la flexibilidad inter-tarea, se deduce que la secuencia de problemas diseñada promueve que una mayoría de estudiantes proponga dos o más planes de resolución al cambiar de problema. En efecto, incluso con problemas muy similares, la variación de las variables de contexto influye en que los estudiantes cambien de plan de resolución. Sería interesante para un futuro estudio analizar si existe relación entre flexibilidad inter-tarea y el éxito en la resolución de la secuencia de problema.

Una de las aportaciones es el establecimiento de un criterio que permite definir qué se entiende por adaptabilidad en esta secuencia de problemas: el plan de resolución mejor adaptado (o más apropiado) a un problema determinado de la secuencia es aquel cuyo uso más crece respecto a la media de uso de cada plan de resolución categorizado, esto es, aquel que “demanda” el problema. Por su carácter cuantitativo, este criterio puede ser útil en otros estudios, aunque el tipo de tarea difiera de los de este trabajo. Sin embargo, tiene algunas limitaciones: la primera, que para establecer el plan de resolución “más apropiado” se ha una usado una muestra de estudiantes del mismo perfil, lo que puede introducir un sesgo; la segunda, que más allá del argumento estadístico no hay una interpretación matemática de por qué el plan de resolución establecido es “mejor”. En este sentido, sería interesante diseñar un instrumento que permita establecer categorías sobre lo que los resolutores consideran como solución “más apropiada” para cada problema de la secuencia. Esto permitiría analizar si existe relación entre el criterio estadístico de adaptabilidad que aporta este trabajo y los criterios que establecen los propios resolutores. La ampliación de la muestra con resolutores “expertos” (matemáticos) enriquecería este análisis.

Este estudio también establece un criterio para cuantificar el nivel de adaptabilidad de cada estudiante al enfrentarse a esta secuencia de problemas de modelización, esto permite explorar relaciones con la flexibilidad inter-tarea. En efecto, los resultados del análisis de la adaptabilidad muestran que, pese a que hay una mayoría (79%) categorizados como flexibles o muy flexibles inter-tarea, solo el 36% de ellos son capaces de adaptar sus planes de resolución para plantear, en al menos tres tareas, el plan de resolución categorizado como “más apropiado”. Se deduce que, aunque la flexibilidad es una condición necesaria para la adaptabilidad, no parece suficiente. Sin embargo, un análisis inferencial de los datos permite identificar una relación significativa entre flexibilidad y adaptabilidad: los estudiantes categorizados como muy flexibles son significativamente más adaptables que los que sólo son capaces de plantear dos planes de resolución distintos en la secuencia de cuatro tareas.

El estudio de la flexibilidad intra-tarea es exploratorio y deben tenerse en cuenta las limitaciones de los resultados. Por un lado, la proporción de alumnos capaces de proponer una solución alternativa al problema P4 es muy baja, poco más de un tercio de la muestra; sin embargo, esto no es suficiente para extraer conclusiones fiables, porque tal vez las dificultades para proponer un plan de resolución alternativo se relacionen, por ejemplo, con las variables de contexto del problema escogido. Conviene plantearse si variables como el tamaño o la disposición de los elementos influyen en la dificultad de escoger un plan de resolución diferente al planteado inicialmente por el resolutor. En un trabajo futuro se pretende realizar una experiencia en otras condiciones; cabe pensar, por ejemplo, cómo variarán los resultados si se deja escoger el problema al cual proponer dos planes de resolución. A partir de este estudio tampoco se pueden derivar conclusiones sobre la relación entre flexibilidad inter e intra-tarea. Parece que sean habilidades independientes, pero esto deberá confirmarse en base a otras experiencias.

Respecto al análisis comparativo de las variaciones entre el plan de resolución original y el alternativo se observa que la mayoría de estudiantes que han sido capaces de proponer dos planes de resolución pasan de un modelo bidimensional (empleando la estrategia de unidad base) a un modelo unidimensional empleando producto cartesiano. Dado que el tamaño del elemento (un coche) es grande, este cambio es más natural que pasar a un modelo bidimensional con estrategia de densidad. También se observa que algunos estudiantes que en su propuesta inicial plantearon un plan de resolución distinto del categorizado como “más apropiado” (2D-unidad base) fueron capaces de proponer dicho plan de resolución como alternativa. Con todas las limitaciones impuestas por el carácter exploratorio de esta parte de la experiencia, cabe pensar si promover que los estudiantes propongan un plan de resolución alternativo al planteado inicialmente sirve, de algún modo, como validación del primer modelo y les conduce a refinar ese primer plan de resolución. Para confirmar esta hipótesis convendría repetir la experiencia y, además de analizar el plan de resolución como modelo inicial y estrategia, contemplar posibles elementos de complejidad (espacios inútiles, heterogeneidad en la distribución, etc.) incorporados al modelo propuesto.

Agradecimientos

AEI-FEDER, Proyecto EDU2017-84377-R. Agradecemos el trabajo de los revisores y al Dr. Luis José Rodríguez Muñiz la revisión del análisis estadístico de datos.

Referencias

Achmetli, K., Schukajlow, S., & Rakoczy, K. (2018). Multiple solutions for real-world problems, experience of competence and students’ procedural and conceptual knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17,* 1605–1625.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 79–96.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331–364.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. En C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester, Inglaterra: Horwood.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Nueva York: Springer.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: NCTM.

Efthimiou, C. J., & Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, *42*(42), 253–261.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41*(5), 605–618.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., & Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 220–242.

Ferrando, I., Segura, C., & Pla-Castells, M. (2019a). *Relation entre contexte, situation et plan de solution dans des problèmes complexes.* Manuscrito no publicado.

Ferrando, I., Segura, C., & Pla-Castells, M. (2019b). *How many can fit here? Same question, differents resolutions: Analysis of the relationship between context and solution plan in modelling tasks.* Manuscrito no publicado.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. En G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.) *Mathematical modelling and applications. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 265-275). Cham, Suiza: Springer.

Goldin, G. A., & McClintock, C. E. (Eds.) (1979). *Task variables in mathematical problem solving.* Columbus, OH: The Ohio State University.

Heinze, A., Star, J.R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535–540.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.) *Mathematical problem solving: Papers from a Research Workshop* (pp. 14-27). Columbus, OH: The Ohio State University.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 8*(3), 233–251.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2), 157–189.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*, 73–90.

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and understanding mathematical modelling through Fermi-problem. En B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.) *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131–146). New York: Springer.

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 393–417.

Sriraman, B., & Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 247–254.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404–411.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*(6), 565–579.

Webb, N. L. (1980). Content and context variables in problem tasks. En G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving*. Filadelfia, PE: The Franklin Institute Press.

Referencias de los autores

Irene Ferrando, Universitat de València (España). irene.ferrando@uv.es

Carlos Segura, Universitat de València (España). carlos.segura@uv.es

Fostering mathematical flexibility through a sequence of modelling tasks

Irene Ferrando, Universitat de València. irene.ferrando@uv.es

Carlos Segura, Universitat de València. carlos.segura@uv.es

The promotion of flexibility and adaptability in mathematical problem solving fosters the development of mathematical competence. This study describes and justifies the design of a sequence of modeling tasks that allows the analysis of inter-task flexibility in students. The central objective of the study is to analyse whether students are able to adapt their resolution plans according to aspects related to the task context, changing their strategy from one task to another, if these aspects vary. The type of modelling tasks used in this study, real-world or Fermi estimation problems, are accessible to most students so that they can be addressed without difficulty. The starting point of this research is an initial experience that allows to establish a categorization of the resolution plans that students can propose in each problem. A qualitative and quantitative analysis of each of the total of 113 students' responses to each problem shows that there is an influence of the context of the problem in promoting certain resolution plans, so that the sequence of problems promotes different resolution plans. Thus, despite being open-ended problems, since the resolution plans are categorized, a comparison can be made and a systematic analysis undertaken to conclude about flexibility and adaptability. To achieve this objective, a second experiment was carried out with 110 students which allows us to analyse aspects linked to inter-task flexibility, adaptability and intra-task flexibility in this sequence of estimation problems in real context. Results show that the sequence fosters inter-task flexibility; the context of the problem influences students to modify their resolution plans. One of the contributions of the work is the setting of a criterion for defining and quantifying the degree of adaptability of the problem solvers. It is also observed that, although more flexible inter-task students are significantly more adaptable, flexibility is a necessary but not sufficient condition for adaptability. Finally, an exploratory study on inter-task flexibility is included which so far does not allow us to relate inter and intra-task flexibility. On the basis of this exploration, it is anticipated that students, when faced with obtaining an alternative resolution plan, improve the initial plan. These results must be confirmed in further studies.