

DETERMINACIÓN DE LAS RESISTENCIAS QUE OPTIMIZAN LOS ÍNDICES DE DAÑO EN UNA ESTRUCTURA

Luis Alejandro Acuña*

Se investigó un método para mecanizar la búsqueda de resistencias de una estructura (edificio, puente, etc) que, ante un sismo fuerte, mejor se aproximen a un índice de daño propuesto. Los índices de daño esperados pueden calcularse como función de las resistencias de la estructura. Nuestro método consiste en proponer un índice de daño meta para la estructura, plantear una resistencia inicial, e iterativamente predecir los índices de daño para la resistencia actual, mejorar la resistencia para que el daño predicho se acerque más al propuesto, y repetir el ciclo hasta que el error en el daño sea tolerable. Para mejorar la resistencia en cada paso se usó una generalización del método de Newton-Raphson. La experimentación numérica dio resultados satisfactorios. El método tomó en general no más de diez iteraciones para converger a la solución óptima.

Introducción

Un problema importante en ingeniería estructural es, al diseñar una estructura (edificio, puente, casa), lograr que la respuesta de la estructura ante un sismo sea elástica (sin daños permanentes) si el sismo es moderado, o inelástica (con daños en lugares estratégicos) pero sin llegar al colapso, si el sismo es fuerte.

El daño bajo sismos fuertes es importante para disipar la energía del sismo. Si la energía no se disipara, sería absorbida por el edificio, y los daños podrían ser eventualmente peores, como paredes derrumbadas o colapso del edificio entero [2].

Generalmente la mejor solución de este problema está basada en la experiencia y en parte la intuición del diseñador. Aun

pudiendo prever la respuesta de una estructura ante un sismo, las muchas interacciones entre los parámetros de la estructura (longitud y grosor de las vigas y columnas, flexibilidad en las conexiones, rigidez de los soportes, etc.) hacen sumamente difícil el proceso de modificar el diseño para que se acerque más a cumplir los objetivos de daño propuestos.

Un método usual para diseñar una estructura que cumpla con los requisitos es considerar una resistencia mínima que satisfaga la condición de respuesta elástica en un sismo moderado, y una resistencia máxima que minimice el daño en un sismo fuerte. Interpolando entre estos dos extremos, se quiere encontrar una resistencia que mantenga los daños dentro de los parámetros establecidos por el diseñador.

Una vez que el diseñador propone los índices de daño meta, se puede seguir un proceso iterativo que busca resistencias que resulten en daños cada vez más cercanos al objetivo.

Planteo matemático del problema

El método al que nos referimos aquí [1] se aplica a estructuras donde los distintos pisos tienen diseños semejantes, en el sentido de que cada elemento (viga o columna) en la estructura tiene un elemento semejante en el último piso y uno en el primer piso, como se muestra en la Figura 1.

Este método, propuesto por el Dr. Ing. Miguel Cruz [3], inicia con un vector de resistencias S_0 igual a la resistencia mínima, y procede con una sucesión que define la

* Dep. Matemática
I.T.C.R.

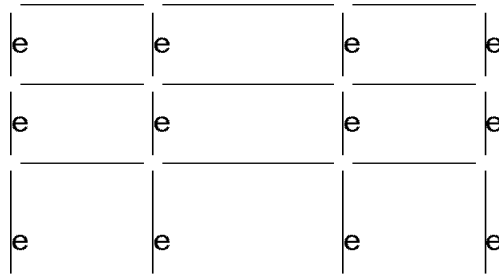


Figura 1: Estructura típica

resistencia en cada elemento (viga o columna) como:

$$S_{k+1} = S_k + \lambda_1^t \Delta S + \lambda_2^t h_r \Delta S^u + \lambda_3^t (1 - h_r) \Delta S^d$$

donde:

S_k : resistencia de este elemento en la iteración k -ésima.

t : tipo de elemento: viga o columna.

λ_j^t : un número real, normalmente entre 0 y 1 (hay seis λ s: tres para vigas y tres para columnas).

ΔS : $S_m - S_o$ para este elemento (S_m es la resistencia máxima).

$\Delta S^u, \Delta S^d$: $S_m - S_o$ para el elemento correspondiente a este en el último piso (u) o el primero (d).

h_r : altura relativa de este elemento (la altura del elemento dividida por la altura del último piso).

Para determinar los seis λ s se resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$ID_m - ID_k = KS \cdot \vec{\lambda}$$

donde:

n : número de índices de daño = número de elementos

ID_m : índice de daño meta (matriz de orden $n \times 1$)

ID_k : índice de daño alcanzado en la iteración anterior (orden $n \times 1$)

KS : matriz de sensibilidad: la variación en los índices de daño en cada elemento debida a pequeñas variaciones de $\vec{\lambda}$ orden $n \times 6$)

$\vec{\lambda}$: el vector $(\lambda_1^v, \lambda_2^v, \lambda_3^v, \lambda_1^c, \lambda_2^c, \lambda_3^c)$, donde λ_j^v corresponde a vigas y λ_j^c a columnas.

El proceso iterativo se repite hasta que la diferencia entre el índice de daño para las resistencias S_k y el índice de daño meta, $\|ID_k - ID_m\|$, sea tolerablemente pequeña.

El diseñador escoge la resistencia mínima S_o , la resistencia máxima S_m , y el índice de daño meta ID_m . Como las resistencias y los índices de daño se representan con un escalar para cada elemento, S_o, S_m e ID_m son tres vectores en \mathbf{R}^n .

Para un vector $S \in \mathbf{R}^n$ de resistencias de la estructura, los índices de daño $ID \in \mathbf{R}^n$ son una función de S : $ID = G(S)$, con $G: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

El objetivo es resolver la ecuación $G(S) = ID_m$, con incógnita S .

Para resolver aproximadamente una ecuación de la forma $f(x) = 0$, con $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, un método muy usado en Matemáticas es el de Newton-Raphson. Este es un método iterativo, en el que a partir de una aproximación x_k se define una nueva aproximación x_{k+1} aproximando la curva $y=f(x)$ con su recta tangente en el punto $(x_k, f(x_k))$, y encontrando la intersección con el eje X de esta recta tangente. La nueva aproximación x_{k+1} se define como la coordenada X de este punto de intersección, que se encuentra resolviendo:

$$f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k),$$

cuya solución es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Para ecuaciones de la forma $F(X) = 0$, donde $F: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$, puede usarse una idea similar, donde la ecuación correspondiente es:

$$J(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k).$$

Ahora $J(X)$ es el jacobiano de F en X (la matriz de derivadas parciales). Si este jacobiano fuera cuadrado y tuviera inversa, la solución sería:

$$X_{k+1} = X_k - J(X_k)^{-1} F(X_k).$$

En el caso que nos ocupa el jacobiano no es cuadrado, por lo que la ecuación

$$J(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k)$$

en general no tendrá una solución única. En el paso 3 del algoritmo siguiente veremos cómo se encuentra la mejor pseudo-solución.

Nuestro método iterativo empieza con la aproximación inicial $S = S_o$ (la resistencia mínima), y calcula aproximaciones sucesivas de la forma S_k siguiendo estos pasos para calcular la aproximación S_{k+1} a partir de S_k :

1. Definir el vector $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_6) \in \mathbf{R}^6$, y definir las siguientes funciones:

$S : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^n$ es $S(\vec{\lambda}) = S_k + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_6 v_6$ (v_1, \dots, v_6 son vectores constantes en \mathbf{R}^n , que sólo dependen de S_o y S_m , como en la primera ecuación de la Sección 1.2.)

$G : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es $G(S) = \text{ID}$, los índices de daño alcanzados por la estructura con el vector de resistencias S .

Tomando la composición $G \circ S : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^n$, se puede considerar el índice de daño ID como una función de $\vec{\lambda}$ así:

$$\text{ID}(\vec{\lambda}) = G(S(\vec{\lambda})).$$

2. Calcular la matriz de sensibilidad KS, que

es el jacobiano de ID con respecto a $\vec{\lambda}$. Para esto debe calcularse la columna j -ésima de KS (para $j = 1, \dots, 6$) como la derivada parcial de ID con respecto a λ_j :

(a) Tomar $j = (0, \dots, \varepsilon, \dots, 0)$, con ε (algún número pequeño) en la posición j -ésima, y denotar

$\text{ID}_k = \text{ID}(\vec{\lambda}) = G(S_k)$, el índice de daño para las resistencias determinadas en la iteración anterior.

(b) Aproximar la j -ésima columna de KS,

cuyo valor debe ser $\frac{\partial \text{ID}}{\partial \lambda_j}$, con

$$\frac{\Delta \text{ID}}{\Delta \lambda_j} = \frac{\text{ID}(\vec{\lambda}_j) - \text{ID}_k}{\varepsilon}$$

3. Una vez que se han calculado las seis columnas de KS, resolver el sistema

$$\text{ID}_m = \text{ID}_k + \text{KS} \cdot \vec{\lambda},$$

con incógnita $\vec{\lambda}$. Esta fórmula está basada en la aproximación de Taylor

$f(x+t) \approx f(x) + f'(x) t$, de la cual se deriva el método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k + t, \text{ con } t = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

El sistema $\text{ID}_m = \text{ID}_k + \text{KS} \cdot \vec{\lambda}$ tiene n ecuaciones (una por cada índice de daño), pero solamente seis incógnitas $\lambda_1, \dots, \lambda_6$. Debe encontrarse la solución que minimice el error $\|\text{ID}_m - \text{ID}_k - \text{KS} \cdot \vec{\lambda}\|_2$.

Si las filas de la matriz KS son

linealmente independientes, la solución $\vec{\lambda}$ es única. Si no, entre todas las soluciones hay una única con norma $\|\vec{\lambda}\|_2$ mínima. En cualquier caso, la solución puede encontrarse con el método SVD [4], y es

$$\vec{\lambda} = \text{M} (\text{ID}_m - \text{ID}_k)$$

donde M es la matriz pseudo-inversa de KS.

4. Habiendo encontrado el $\vec{\lambda}$ óptimo, se

$$\text{define } S_{k+1} = S(\vec{\lambda}) = S_k + \vec{\lambda} \cdot \vec{v}.$$

5. Si el índice de daño $g(S_{k+1})$ se aproxima a ID_m dentro de un rango de tolerancia dado, el algoritmo termina. Si no, se ejecuta este ciclo otra vez.

Experimentación

El algoritmo descrito en la Sección 1.3 se probó con dos estructuras reales: un corte transversal del Hospital de Limón y uno del Edificio Sasso en el Barrio La California, San José. Específicamente, se investigó la diferenciabilidad de la función $\text{ID}(\vec{\lambda})$ y la convergencia de la sucesión ID_k . Para ello se desarrolló un programa prototipo que implementa el algoritmo. En cada iteración, el jacobiano se aproxima usando diferencias hacia adelante, con un ε indicado por el

usuario. Una vez calculado el jacobiano, denotado KS, la ecuación $ID_m = ID_k + KS \cdot \vec{\lambda}$ se resuelve usando la descomposición de KS en valores singulares.

Para simplificar la notación en lo que sigue vamos a definir los siguientes subconjuntos de \mathbf{R}^n :

$V \subset \mathbf{R}^n$ es el conjunto de resistencias alcanzables por las iteraciones del método descrito:

$$V = \left\{ x = S_o + \sum_{j=1}^6 \lambda_j v_j \text{ para } \lambda_j \in \mathbf{R} \forall j = 1, \dots, 6 \right\}.$$

$W \subset \mathbf{R}^n$ es el menor hiper-prisma en \mathbf{R}^n con esquinas en S_o y S_m :

$$W = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \text{ tales que } (S_o)_i \leq x_i \leq (S_m)_i \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

Para cada una de las estructuras con que se experimentó, las aproximaciones del jacobiano de ID se hicieron en varios puntos de prueba. Para cada uno se aproximó el jacobiano con diferencias hacia adelante ($\epsilon > 0$), diferencias hacia atrás ($\epsilon < 0$), y diferencias centrales (el promedio entre la diferencia hacia atrás y la diferencia hacia adelante). En cada caso se usaron valores de ϵ iguales a 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Estos tamaños no dependen de la escala o unidades de medida, porque las aproximaciones sucesivas ID_k se parametrizan con $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_6)$, donde cada λ_j debería mantenerse del intervalo [0,1] (excepto quizás por divergencia de la sucesión).

En general, valores de $\epsilon = 0.02$ o $\epsilon = 0.01$ en diferencias hacia adelante fueron satisfactorios para estimar el jacobiano.

Convergencia del algoritmo

La conjetura de que la sucesión de aproximaciones convergería a una solución se investigó proponiendo distintos daños meta y distintas aproximaciones iniciales.

Se consideraron dos tipos de daños meta: "Alcanzable" si es el daño alcanzado por una resistencia $x \in V$, y "Aleatorio" si es

alcanzado por una resistencia $x \in W$ (el conjunto de daños aleatorios es $G(W)$).

Para probar el algoritmo se propusieron varios índices meta "alcanzables", es decir

$$G(x) \text{ con } x \text{ de la forma } x = S_o + \sum_{j=1}^6 \lambda_j v_j, \text{ con}$$

cada λ_j aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1. También se propusieron varios índices meta "aleatorios" $G(x)$, con x dado por $x_i = (S_o)_i + r_i((S_m)_i - (S_o)_i)$ para $i=1, \dots, n$, con cada r_i aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1.

Para cada índice meta se probó la sucesión de aproximaciones empezando en (a) la resistencia mínima S_o , (b) la resistencia máxima S_m , (c) varias resistencias aleatorias en V , y (d) varias resistencias aleatorias en W . (Esto fue para efectos de prueba. Debe recordarse que, en su forma final, el algoritmo empezará en la resistencia inicial.)

Teniendo en cuenta que V tiene dimensión 6 en \mathbf{R}^n , vemos que el conjunto de daños alcanzables, $G(V)$, es una variedad de dimensión a lo sumo 6 en \mathbf{R}^n . Por otra parte, W tiene dimensión n , por lo que el conjunto de daños aleatorios, $G(W)$, tiene dimensión probablemente cercana a n (dependiendo del rango del diferencial de G). Por eso, si se propone un índice de daño aleatorio y_1 , lo más probable es que no exista un $x \in V$ tal que $G(x) = y_1$. Esto significa que nuestro algoritmo no podrá resolver la ecuación $G(x) = y_1$, puesto que sólo considera $x = S_k \in V$. Lo más que se puede esperar es que la sucesión de aproximaciones minimice el error $\|G(x) - y_1\|$ para $x \in V$, como se ilustra en la Figura 2.

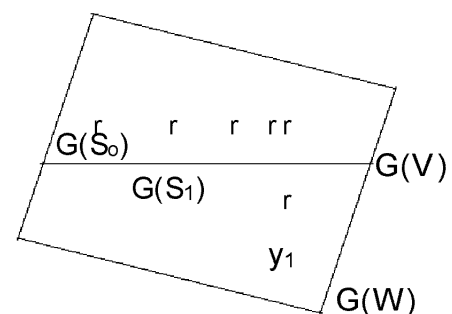


FIGURA 2: Minimizar el error $\|G(x) - y_1\|$

La convergencia de la sucesión de aproximaciones se define en términos del error o distancia entre el índice de daño meta y el índice alcanzado en la iteración k -ésima:

$$E_k = \|\text{ID}_k - \text{ID}_m\|_1 = \sum_{i=1}^n |(\text{ID}_k)_i - (\text{ID}_m)_i|$$

donde ID_m es el índice de daño meta, ID_k es el índice de daño alcanzado en la iteración k -ésima, y para cada uno de ellos el subíndice i indica el daño en el elemento i -ésimo.

Aproximación inicial: Resistencia mínima

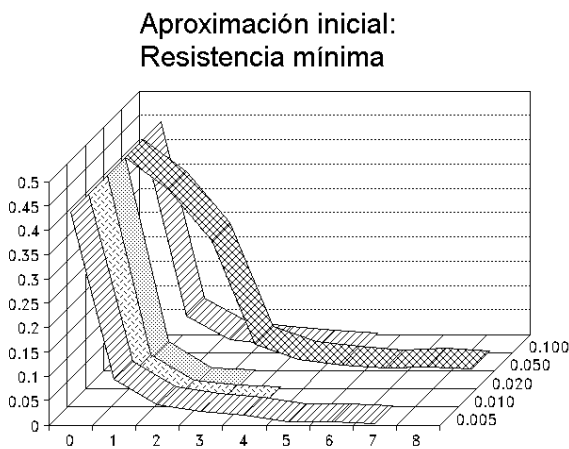


FIGURA 3. Convergencia a partir de la resistencia mínima.

TABLA 1. Convergencia a partir de la resistencia mínima.

k	ε				
	0,100	,050	0,020	0,010	0,005
0	0,4373	0,4373	0,4373	0,4373	0,4373
1	0,0734	0,3721	0,0599	0,0707	0,0938
2	0,0261	0,2666	0,0061	0,0180	0,0420
3	0,0169	0,0536	0,0020	0,0076	0,0270
4	0,0083	0,0241		0,0030	0,0198
5	0,0035	0,0122			0,0064
6		0,0056			0,0054
7		0,0083			0,0024
8		0,0035			

Se consideró que la sucesión había convergido cuando dicha distancia fuera menor que 0,005. Por regla general, el método convergió satisfactoriamente (en aproximadamente 10 iteraciones) en condiciones favorables: índice de daño meta alcanzable y aproximación inicial en V . Matemáticamente, esto significa que el método resolvió correctamente la ecuación $G(x) = G(a)$ con incógnita $x \in V$ y con $a \in V$ fijo, partiendo de una aproximación inicial en V . Para los otros casos también bastaron alrededor de 10 iteraciones para ver que el algoritmo convergía a un punto que no era solución. Esta situación es de esperar en la práctica: el diseñador propondrá un daño meta alcanzable y las iteraciones empezarán en $S_o \in V$.

Consideramos resolubles los casos en los que la ecuación $G(x) = \text{ID}_m$ tiene una solución en V . Aquí mostramos los resultados cuando las aproximaciones iniciales se iniciaron en la resistencia mínima, la máxima y una resistencia aleatoria en V . Los jacobianos se aproximaron usando diferencias hacia delante.

La Tabla 1 muestra el error E_k para cada k desde 0 hasta el número necesario de iteraciones, y para ϵ igual a 0.100, 0.050, 0.020, 0.010 y 0.005, tomando como primera aproximación ($k = 0$) la resistencia mínima S_o . Esos mismos errores se ven gráficamente en la Figura 3. En este gráfico, el eje de izquierda a derecha muestra el número de iteración, el eje del frente al fondo da el valor de ϵ , y el eje vertical da la magnitud del error.

Es claro que en este caso la convergencia se alcanza en menos de diez iteraciones para cualquiera de los valores de ϵ considerados, y también que la convergencia es significativamente más rápida para ϵ igual a 0.02 ó 0.01. Estos son los mismos valores que aparecieron óptimos en el análisis de diferenciabilidad de la sección anterior.

La Figura 4 muestra los errores para las primeras 12 iteraciones tomando como aproximación inicial la resistencia máxima S_m , y con los mismos valores de ϵ . En este caso la convergencia fue generalmente más

**Aproximación inicial:
Resistencia máxima**

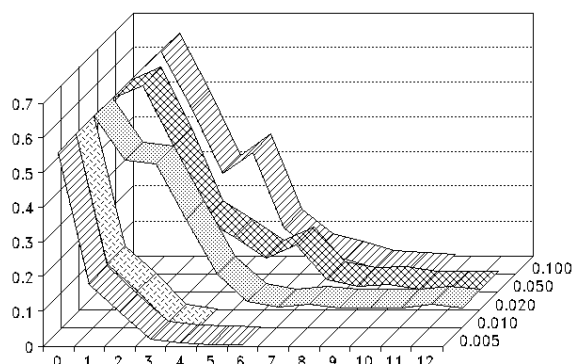


FIGURA 4: Convergencia a partir de la resistencia máxima.

lenta. En todo caso, se nota que $\epsilon = 0.01$ fue óptimo de nuevo. El valor $\epsilon = 0.02$ no dio una convergencia tan rápida con en el caso anterior, pero puede notarse que ya $E_6 \approx 0.007$, lo cual es bastante bueno.

También se experimentó con varias aproximaciones iniciales en V , y en todas se observó un comportamiento semejante al que ya ilustramos. De nuevo, $\epsilon = 0.01$ resultó ser óptimo en general.

Para resumir, en los casos resolubles (índice de daño meta alcanzable y aproximación inicial en V) el algoritmo

Aproximación inicial: Resistencia en W .

**Aproximación inicial:
Resistencia en W**

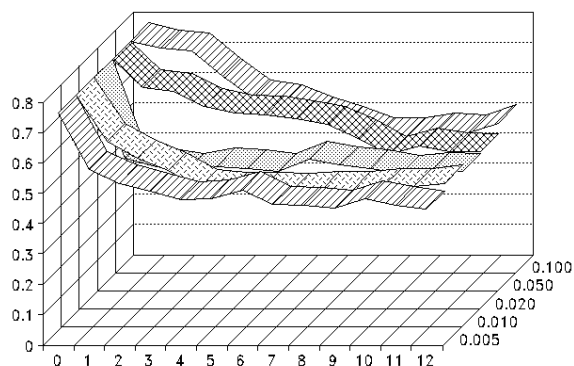


FIGURA 5: Convergencia a partir de una resistencia en W .

convergió en forma bastante rápida, especialmente para valores de ϵ alrededor de 0.01.

Los casos en los que no hubo convergencia al daño meta fueron los casos imposibles, como se ve en la Figura 5. Para estos casos, la falta de convergencia no se puede atribuir al algoritmo, porque la solución es imposible. Lo más que se podía esperar es que las aproximaciones converjan al punto $x \in V$ que minimiza $\|G(x) - ID_m\|$.

Para ilustrar el caso general, la Figura 5 muestra el error E_k para las primeras 12 iteraciones del algoritmo a partir de una resistencia inicial aleatoria en W (desde la cual no es esperable alcanzar la solución).

En general, cuando la solución no era alcanzable, fueron suficientes alrededor de 10 iteraciones o menos para observar que las aproximaciones no estaban convergiendo a la solución, sino más bien a otro punto. Es de suponer que este límite es un punto donde $\|G(x) - ID_m\|$ alcanza al menos un mínimo local.

Amortiguamiento de las iteraciones

Durante el transcurso de estos experimentos sabíamos de antemano si la solución era alcanzable o no. Al aplicar este método a problemas reales, el usuario no sabrá si la solución es alcanzable. Una oscilación de los errores, como la que se observa en la Figura 4 para $\epsilon = 0.1$ y $\epsilon = 0.05$, no necesariamente indica divergencia. Sin embargo, la oscilación podría ser tan severa como para llevar la aproximación S_k fuera del dominio de G . Este es un efecto normal (pero no deseable) en el método de Newton-Raphson, especialmente cerca de puntos críticos: si la derivada de f en x_k es pequeña, la aproximación x_{k+1} puede estar muy lejos de la solución.

Nuestro algoritmo también está expuesto a ese riesgo: al resolver la ecuación

$ID_m = ID_k + KS \cdot \bar{\lambda}$ cuando la matriz de sensibilidad KS es pequeña en valores absolutos, el vector $\bar{\lambda}$ puede ser muy grande, provocando un gran salto de S_k a S_{k+1} . Para aliviar esta situación, se ideó el mecanismo

Resistencia inicial en W : $\varepsilon=0.02$

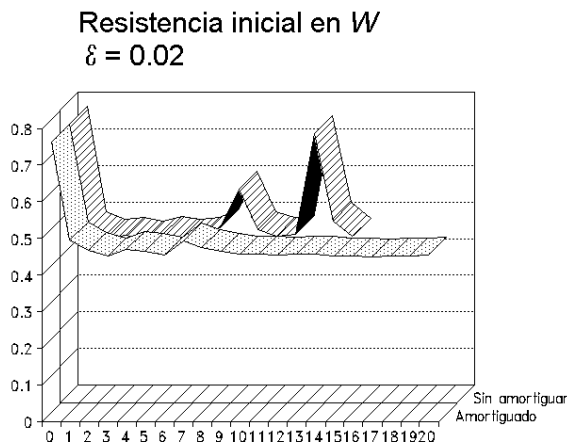


FIGURA 6. Efecto del amortiguamiento de las oscilaciones.

de limitar el valor de $\|\bar{\lambda}\|_0 = \max\{|\lambda_j|, j = 1, \dots, 6\}$ a un tamaño máximo fijo, por ejemplo $M = 0.5$. Específicamente, se modificó el programa para que si $\|\bar{\lambda}\|_0 > M$, sustituyera

$\bar{\lambda}$ por $\frac{M}{\|\bar{\lambda}\|_0} \bar{\lambda}$, el cual tiene tamaño M .

El efecto de este amortiguamiento se muestra en la Figura 6, que corresponde a un caso sin solución alcanzable.

La sucesión al fondo, sin amortiguamiento, muestra oscilaciones fuertes en las iteraciones 9 y 13, y desaparece luego de la iteración 15 porque S_{16} cae fuera del dominio de G . Por otra parte, la sucesión al frente se logró usando un factor de amortiguamiento $M = 0.5$ para las primeras 10 iteraciones, y $M = 0.2$ para las siguientes 10.

Este mecanismo de amortiguamiento no fue necesario en cuanto hubo convergencia a la solución. Sin embargo, es posible que para otras estructuras o para otras aproximaciones iniciales o daños meta "desafortunados" el amortiguamiento sea imprescindible. Consideramos que el efecto del amortiguamiento es positivo en general, ya que una convergencia lenta es preferible a una divergencia rápida.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación son muy alentadores, al presentar fuerte evidencia experimental de que el algoritmo estudiado da los resultados que se esperaban. Que los resultados sean correctos es fácilmente verificable, puesto que los índices de daño alcanzados por las resistencias S_k realmente convergen al índice de daño meta. Incluso si las resistencias no convergieran propiamente, eso no es relevante, ya que el objetivo del método no es encontrar la resistencia que alcanza el daño ID_m , sino alguna resistencia que alcance un daño cercano a ID_m . Claramente, ese objetivo se alcanza al menos en la medida de lo matemáticamente factible.

En esta investigación nos limitamos a probar el programa PO_{pt} con dos estructuras, dado que no es fácil definir la parametrización completa de una estructura en el formato requerido por el programa. Agradecemos la cooperación del Ingeniero Miguel Cruz en este aspecto. Consideramos importante probar con estructuras definidas en otras escalas o unidades de medida, para comprobar la hipótesis de que el valor óptimo de $\varepsilon \approx 0.01$ es independiente de la escala (aunque suponemos que depende del lenguaje de programación y de la precisión de las variables reales).

Bibliografía

- [1] Acuña P., Luis Alejandro. "Determinación de las resistencias que optimizan los índices de daño en una estructura, Informe Final". ITCR, Octubre de 1999.
- [2] Applied Technology Council. "Evaluation of Performance of Seismically Retrofitted Buildings". Report ATC-31. Redwood City, CA. 1992.
- [3] Cruz A., Miguel. "Una metodología para el diseño sismo-resistente de estructuras con daño controlado". Tesis de doctorado. Universidad Central de Venezuela. Junio 1996.
- [4] Haykin, S. "Singular Value Decomposition". Cap. 11 de "Adaptive Filter Theory". Segunda Edición, Prentice-Hall Inc, New Jersey, E.U. 1991.