Revista CIMEXUS Vol. VIII, No.2, 2013

Subifusión anómala de la riqueza: modelo matemático para explicar la relación comercial entre México y Estados Unidos.

Avila Carreon Fernando[1]
Rodriguez Ceballos Joel Arturo[2]
Ruben Vega Cano[3]

Recibido 16 de enero 2014 – Aceptado 11 de febrero de 2014

Resumen

En (Chukwu, 2005:207-212) se aplicó una ecuación diferencial homogénea para modelar la difusión de la riqueza en países cuyo territorio podía considerarse en forma aproximadamente rectángular, teniéndose una cantidad de riqueza dada en la frontera. En este artículo se hace un cálculo análogo, considerando ahora la ecuación correspondiente no homogénea de orden fraccionario de subdifusión (difusión anómala lenta) de la riqueza con el propósito de modelar procesos de difusión anómala lenta, y agregando ciertas condiciones de frontera con el propósito de explicar las relaciones comerciales entre México y Estados Unidos.

Palabras Clave: Modelado, difusión territorial anómala de la riqueza, ecuación en derivadas parciales fraccionarias.

Abstract

In (Chukwu, 2005:207-212) was applied a homogeneous differential equation to model the diffusion of wealth in countries whose territory could be considered in an approximately rectangular form, with a given amount of wealth at the boundary. In this article we make a similar calculation, considering now the corresponding nonhomogeneous subdiffusion (anomalous slow diffusion) equation of wealth of fractional order with the aim to model slow anomalous diffusion processes, and for certain added boundary conditions in order to explain the trade relations between Mexico and the United States.

Key Words: Modeling, anomalous territorial diffusion of wealth, fractional partial differential equation.

1 favila_68@yahoo.com.mx FCCA de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
2 Instituto Tecnológico de Morelia, 3 Instituto Tecnológico de Morelia
3 Profesor-Investigador de la FCCA de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Introducción
Modelado de la difusión territorial anómala de la riqueza

El modelado matemático de variables económicas ha sido aplicado con relativo éxito en los últimos años. En particular, la evolución de la riqueza en una economía de mercado ha sido estudiada ampliamente. Un punto de vista muy interesante en la representación de los mercados es la cinética, que conduce a las ecuaciones de tipo Boltzmann para modelar la evolución de la distribución de la riqueza (Markowich, 2007:185-206). Por otra parte la teoría de ecuaciones diferenciales se ha convertido en una herramienta esencial del análisis económico, sobre todo porque las computadoras han estado ahora disponibles. La riqueza se ha estudiado también haciendo uso de dicha teoría (Zhang, 2005:40).

Para dar objetividad al concepto de riqueza, en este trabajo la entenderemos en el sentido siguiente:

Definición 1. Denominaremos riqueza de un estado al indicador W definido en (Chukwu, 2005:199) como

$$W = J + C + L \cdot w + N + E/p,$$

donde intervienen la inversión directa en la economía del estado J, los bienes de capital C, la población empleada L, el salario w, los recursos naturales N, habilidades empresariales E y la población p.

En el mismo libro (Chukwu, 2005:207-212) se aplicó para la modelación de la difusión de la riqueza en una porción territorial rectangular la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \eta W; \qquad (1)$$

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad t > 0,$$

sujeta a las condiciones

$$W(0,y,t) = W(a,y,t), \qquad 0 \le y \le b, \qquad t > 0,$$

$$W(x,0,t) = W(x,b,t), \qquad 0 \le x \le a, \qquad t > 0,$$

$$W(x,y,0^+) = f(x,y), \qquad 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b,$$

donde W(x,y,t) denota la riqueza del sistema económico (según la definición 1) como función de x, y (que son las coordenadas en las direcciones oeste-este y sur-norte, respectivamente, del territorio rectangular [0;a]x [0;b] ⊂ R2) y de t (el tiempo transcurrido). La constante se k > 0 define como el coeficiente colectivo de difusión, mientras que hW es la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior, en este caso directamente proporcional a la densidad de la riqueza W en cada punto territorial y tiempo con constante de proporcionalidad $h > 0$. La función $f(x,y)$ (ordinaria o generalizada) está definida sobre el conjunto $[0;a] \times [0;b]$, que se supone transformable de Fourier en el sentido común o generalizado, respectivamente. Se supone que se trabaja en un espacio adecuado de funciones generalizadas en el que es posible tratar libremente con funciones tipo delta, transformadas integrales de tipo Fourier, Laplace y Mellin, e integrales y derivadas fraccionarias (Mainardi et al., 2007: 295-305).

La ecuación (1) se utilizó para modelar la difusión de la riqueza en países cuyo territorio podría considerarse en forma aproximada como un rectángulo. Como se ve, a lo largo de la frontera están impuestas solamente condiciones de Dirichlet, es decir, se prescribe el valor de la riqueza en la frontera para todo tiempo.

La complejidad asociada a los procesos de transferencia de la riqueza en una variedad de situaciones se asocia a interacciones económicas complejas y la distribución geográfica parcial o totalmente heterogénea de las mismas, lo que implica un proceso de difusión no ideal asociada a procesos de difusión anómala. Actualmente el fenómeno de difusión anómala es observado también en ciertos fenómenos físicos naturales e industriales.

Objetivo

En el presente artículo se realiza un cálculo análogo al hecho por (Chukwu, 2005:207-212) usando en lugar de la ecuación (1), la correspondiente ecuación diferencial (o pseudodiferencial) parcial no homogénea (2), de orden fraccionario en el operador diferencial (o pseudodiferencial) temporal, con el propósito de modelar procesos de difusión anómala de la riqueza, tomando las consideraciones antes mencionadas con respecto a los sistemas heterogéneos. Las condiciones de frontera son mixtas, es decir, consideran además la transferencia de riqueza desde el exterior.

El objetivo de esta modelación es avanzar en la construcción de un modelo matemático, más cercano a la realidad, de difusión de la riqueza en un territorio de forma irregular. Dicho territorio constituiría el dominio de un mapeo que lo transformaría en otro dominio con forma rectangular, por medio de una construcción según las técnicas de generación de mallas usadas en geometría computacional Barrera-Sánchez *et al.*, 2009:76-89). Éste último dominio rectangular se trataría a su vez de la manera presentada en este trabajo.

Nociones preliminares

En esta sección se presentan algunas definiciones básicas y datos preliminares que se utilizan en todo el artículo.

Definición 2. Aquí definiremos las siguientes funciones de argumento complejo $z \in$ C que usaremos más adelante, llamadas funciones de tipo Mittag-Leffler:

$$E_\alpha(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)};$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)};$$

$$e_\alpha^{\zeta z} := z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\zeta z^\alpha),$$

donde $\zeta \in$C, a. $\beta > 0$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler definida para cualquier número complejo z como

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Note que estas funciones son generalizaciones de la función exponencial de base e, ya que $e^z = \sum_{j=1}^{\infty} z^j/j!$ y $j! = \Gamma(j+1)$.

Definición 3. Si g (t) es una función continua en el intervalo [a, b] (g (t) $\in$C [a, b]) y α>0, entonces su integral fraccionaria de Riemann-Liouville se define por

$$I_{a+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Definición 4. La derivada fraccionaria de Caputo-Djrbashyan de orden $\alpha >$ 0 de una función continua g:(a,b) ->**R** se define por

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} g(t) = I_{0+}^{n-\alpha} g^{(n)}(t),$$

donde n = $[\alpha]$+1 (la notación $[\alpha]$ denota el número entero más grande no mayor que α).

Lema 1 (Kilbas *et al.*, 2006:73). Sean p, $q \geq 0$, y ϕ (t) una función de valor absoluto integrable en un intervalo $[0, T]$ (es decir, $|\phi(t)|$ es integrable en $[0, T]$ o $\phi(t) \in L_1[0, T]$). Entonces,

$$I_{0+}^{p} I_{0+}^{q} \phi(t) = I_{0+}^{p+q} \phi(t) = I_{0+}^{q} I_{0+}^{p} \phi(t) \qquad (0)$$

se cumple casi en todas partes (es decir, excepto en un conjunto de medida 0) sobre $[0, T]$. Si además ϕ (t) es continua en dicho intervalo ($\phi(t) \in L_1[0, T]$), entonces (0) es verdadera y

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} I_{0+}^{\alpha}\, \phi(t) = \phi(t)$$

para todo $t \in [0,T])$ y $\alpha>0$.

Teorema 1 (Djrbashyan, 1966:123). Sea $\phi\,(t) \in L_1[0,T])$. Entonces, la ecuación integral

$$\varphi(t) = \phi(t) + \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \varphi(\tau) d\tau$$

tiene una solución única $\varphi(t)$ definida por la fórmula siguiente:

$$\varphi(t) = \phi(t) + \gamma \int_0^t e_{\alpha}^{\gamma(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau$$

donde $e_{\alpha}^{\gamma z}$ es una de las funciones de tipo Mittag-Leffler dadas en la Definición 2.

Desarrollo técnico del modelo

Consideraremos las siguientes hipótesis. Sea la función W(x, y, t):[0;a]x[0;b] x[0;∞] -> r la riqueza del sistema económico, dependiente de las variables x, y, t, que se subdifunde lentamente en la porción territorial rectangular [0;a] x[0;b]⊂r2, donde x,y son las coordenadas en las direcciones oeste-este y sur-norte respectivamente, mientras que t es el tiempo. La riqueza inicial (en el tiempo t = 0) en dicho sistema la denotaremos por f (x, y). La riqueza en las fronteras norte y sur es nula (condición de Dirichlet homogénea) y en las fronteras este y oeste la razón de cambio de la riqueza en dirección perpendicular a las mismas es nula (condición de Neumann homogénea). Supongamos que la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior es de la forma hw+f (x, y, t), h>0. Esto quiere decir que una parte la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior es directamente proporcional a la riqueza w en cada punto territorial y en cada tiempo con constante de proporcionalidad h>0, y otra parte depende solamente de cada punto territorial y cada tiempo.

De esta forma tenemos ahora un modelo de subdifusión anómala de la riqueza con la ecuación diferencial temporal fraccionaria no homogénea

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} W = \kappa\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + \eta W + F(x,y,t); \quad (2)$$

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad t > 0$$

(la constante κ >0 es el coeficiente colectivo de subdifusión para la riqueza W), sujeta a las condiciones de frontera e inicial

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0,y,t)=0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x}(a,y,t)=0, \qquad 0\le y\le b, \qquad t>0,$$

$$W(x,0,t)=0,\ W(x,b,t)=0,\ 0\le x\le a,\ t>0, \tag{2a}$$

$$W(x,y,0)=f(x,y), \qquad 0\le x\le a, \qquad 0\le y\le b.$$

De acuerdo con el método de separación de variables (DuChateau and Zachmann, 2002:124), el cual podemos usar debido a las condiciones de frontera homogéneas, se busca la solución $W(x, y, t)$ en forma de la serie de Fourier de funciones propias $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ del operador diferencial lineal $\mathcal{L}$, definido para la función doble y continuamente diferenciable por medio de la expresión

$$\mathcal{L}U=-\kappa\nabla^2 U-\eta U, \tag{3}$$

donde el laplaciano ∇^2 en dimensión 2 se define como

$$\nabla^2 U\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

El operador $\mathcal{L}$ está definido en algún subconjunto del espacio vectorial $L_2[(0;a)\times(0;b)]$ de las funciones $U(x, y)$, $(x, y)\in(0;a)\times(0;b)$ tales que la función es $|U(x,y)|^2$ integrable en $(0;a)\times(0;b)$. Más precisamente, el dominio de definición $G_{\mathcal{L}}$ del operador $\mathcal{L}$ está constituido por todas las funciones $U(x, y)\in L_2[(0;a)\times(0;b)]$ que satisfacen las condiciones de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,y,t)=0,\ \frac{\partial U}{\partial x}(a,y,t)=0,\ 0\le y\le b,\ t>0, \tag{4}$$

$$U(x,0,t)=0,\ U(x,b,t)=0,\ 0\le x\le a,\ t>0, \tag{5}$$

y cuyas imágenes $\mathcal{L}U\in L_2[(0;a)\times(0;b)]$.

El problema de valores propios se plantea de la siguiente manera. Hay que encontrar los valores del parámetro Λ (valores propios del operador $\mathcal{L}$) tales que la ecuación

$$\mathcal{L}U=\Lambda U \tag{6}$$

tiene soluciones no triviales (no nulas) en el dominio $G_{\mathcal{L}}$. Estas funciones son las funciones propias de $\mathcal{L}$. La ecuación (6) equivale a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U+\frac{\Lambda+\eta}{\kappa}U=0$$

Sea $\lambda^2=(\Lambda+\eta)/\kappa$ Entonces la ecuación se escribe

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U = 0 \tag{7}$$

Para resolver la ecuación (7) utilizamos la separación de variables. Suponemos una solución no trivial separable en la forma

$$U(x,y) = X(x)Y(y)..$$

Las derivadas parciales correspondientes son:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'(x)Y(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = X(x)Y'(y),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)Y(y), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = X(x)Y''(y).$$

Sustituyendo en (7) tenemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda^2 X(x)Y(y) = 0.$$

Dividiendo entre $X(x)Y(y)$ resulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2 = 0$$

y de allí tenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2.$$

Al depender cada lado de esta igualdad de variables distintas, ambos lados deben ser iguales a una constante; elegimos dicha constante como $-\mu^2, \in \mu$ R. Entonces las ecuaciones separadas para la ecuación (7) resultan ser

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \tag{8}$$

$$Y''(y) + (\lambda^2 - \mu^2)Y(y) = 0. \tag{9}$$

Las soluciones correspondientes a (8) pueden expresarse como

$$X(x) = A\cos \mu x + B \operatorname{sen} \mu x.$$

En términos de las variables separadas las condiciones de frontera se convierten en

$$X'(0)Y(y) = X'(a)Y(y) = 0, \qquad 0 \le y \le b, \qquad t > 0.$$

Entonces, para obtener una solución no trivial de la ecuación (8) se debe tener

$$X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0,$$

por lo que respectivamente tenemos que B=0 y

$$\operatorname{sen} \mu a = 0, \qquad A \neq 0.$$

De esto último se da

$$\mu = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Notemos que μ=0 es también un valor propio. En consecuencia,

$$X_m(x) = A_m \cos\frac{m\pi x}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Del mismo modo, para la solución no trivial Y seleccionamos $v^2=\lambda^2 - \mu^2$ de modo que de la solución de la ecuación (9) es

$$Y(y) = C\cos \nu y + D \operatorname{sen} \nu y.$$

Con la aplicación de las condiciones homogéneas, encontramos C=0 y

$$\operatorname{sen} \nu b = 0, \qquad D \neq 0.$$

Así, obtenemos

$$\nu = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y

$$Y_n(y) = D_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Recordando que $\lambda^2=\mu^2+v^2$, las soluciones de la ecuación (7) pueden escribirse en la forma

$$U_{mn}(x,y) = \mathcal{E}_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b},$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

(con n=0 no hay función propia) para cada uno de los valores propios correspondientes

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2,$$

los cuales para la ecuación (6) se expresan como

$$\Lambda_{mn} = \kappa\lambda_{mn}^2 - \eta..$$

Definición 4. Podemos renumerar pasando de los subíndices dobles al subíndice simple mediante la función $\mathcal{k}: \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$

$$k = \mathcal{k}(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n) + m + 1..$$

Su inversa es la función $\mathcal{k}^{-1}: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}^2$ dada por

$$(m,n) = \mathcal{k}^{-1}(k).$$

Definimos también las funciones componentes primera y segunda $c_1, c_2: \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$ dadas por

$$c_1(m,n) = m; \quad c_2(m,n) = n,$$

y las composiciones $m_k, n_k: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ dadas por

$$m_k \equiv (c_1 \circ \mathcal{k}^{-1})(k), \quad n_k \equiv (c_2 \circ \mathcal{k}^{-1})(k).$$

De esta manera definimos $\Lambda_k \equiv \Lambda_{\mathcal{k}(m,n)} \equiv \Lambda_{mn}$, $U_k \equiv U_{\mathcal{k}(m,n)} \equiv U_{mn}$ y $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}_{\mathcal{k}(m,n)} \equiv \mathcal{E}_{mn}..$
Así, con esta redefinición de la numeración tenemos

$$\mathcal{L}U_k = \Lambda_k U_k, \quad U_k \in G_{\mathcal{L}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Estas funciones propias de $\mathcal{L}$ pueden escogerse ortonormales con

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{m_k n_k} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{ab}}, & \text{si } m_k = 0; \\ \frac{2}{\sqrt{ab}}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (10)$$

De este modo

$$\langle U_k, U_l \rangle \equiv \int_0^a \int_0^b U_k(x,y) U_l(x,y)\, dydx =$$

$$
= \begin{cases}
\dfrac{2}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \operatorname{sen}\frac{n_k\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{n_l\pi y}{b}\,dydx \;=\; \delta_{kl}, \\[2ex]
\dfrac{2}{ab}\sqrt{\dfrac{2}{ab}}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \operatorname{sen}\frac{n_k\pi y}{b}\cos\frac{m_l\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n_l\pi y}{b}\,dydx \;=\; 0, \\[2ex]
\dfrac{2}{ab}\sqrt{\dfrac{2}{ab}}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \cos\frac{m_k\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n_k\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{n_l\pi y}{b}\,dydx \;=\; 0, \\[2ex]
\dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \cos\frac{m_k\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n_k\pi y}{b}\cos\frac{m_l\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n_l\pi y}{b}\,dydx \;=\; \delta_{kl}, \\[2ex]
m_k, m_l, n_k, n_l = \square, 2, \square\,,
\end{cases}
$$

Donde los sub-subíndices *k.l* de *m,n* corresponden a los de la función propia respectiva.

$\{U_K\}$ es un conjunto completo de $L_2[(0;a) \text{ x } (0;b)]$ y cada función $u(x,y) \in G_{\mathcal{L}}$ puede representarse en forma de la serie

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle u, U_k\rangle U_k(x,y).$$

Para $t > 0$ la solución del problema de la ecuación de difusión anómala de la riqueza (2) que cumple las condiciones de frontera e inicial prescritas (2a) puede escribirse como

$$W(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y)\,T_k(t), \tag{11}$$

donde $T_K(t)=\langle W, U_k\rangle$. Con el fin de encontrar la ecuación diferencial fraccionaria para las funciones $T_K(t)$, la solución (11) se sustituye en la ecuación (2)

$$\sum_{l=1}^{\infty} U_l(x,y)\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} T_l(t) = -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t)\cdot \mathcal{L}U_l(x,y) + F(x,y,t)$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t)\cdot \Lambda_l U_l(x,y) + F(x,y,t).$$

Después se toma el producto escalar de esta ecuación por la función propia U_K,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\langle U_k, U_l\rangle\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} T_l(t) = -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t)\cdot\Lambda_l\langle U_k, U_l\rangle + \langle U_k, F\rangle$$

y, usando la ortonormalidad de funciones propias, se obtienen las ecuaciones

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} T_k(t) + \Lambda_k T_k(t) = f_k(t), \tag{12}$$

con $f_k(t) \equiv \langle U_k, F \rangle$, $k = 1, 2, \dots$. Debido a la condición inicial de la ecuación (2), de (11) tenemos

$$W(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y)\, T_k(0), \qquad (13)$$

$$T_k(0) = \langle W|_{t=0}, U_k \rangle = \langle f, U_k \rangle.$$

Para la condición inicial Tk(0) observamos que la solución del problema homogéneo correspondiente a (2) (es decir, con F(x,y,t)≡0) tiene la forma

$$W_{\mathrm{H}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y)\, T_{\mathrm{H},k}(t),$$

donde

$$T_{\mathrm{H},k}(t) = A_{\mathrm{H},k} E_\alpha(-\Lambda_k t^\alpha), \qquad k = 1, 2, \dots$$

es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a (12) (ya que $f_K(t) \equiv 0$ si F=0) para cada Λ_K (Luchko and Gorenflo, 1999:207-233).

Cada $A_{\mathrm{H,K}}$ es una constante arbitraria que determinamos aplicando la condición inicial homogénea, que es la misma que para la ecuación no homogénea ($W_{\mathrm{H}}(x,y,0)=W(x,y,0)=f(x,y)$),

$$W_{\mathrm{H}}(x, y, 0) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x, y)\, A_{\mathrm{H},l} = W(x, y, 0) = f(x, y), \qquad (14)$$

de donde obtenemos, al tomar el producto escalar de f dada por (14) por U_K y considerando (13),

$$T_k(0) = \langle U_k, f \rangle = A_{\mathrm{H},k}. \qquad (15)$$

Es decir

$$A_{\mathrm{H},k} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b}\, dy dx, \qquad m = 0,$$

y, para $m_k, n_k \geq 1$,,

Para encontrar la solución del problema de Cauchy de la ecuación (12) con la condición inicial (15) consideramos lo siguiente. Por el Lema 1, tenemos que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha T_k(t) = I_{0+}^{1-\alpha} T_k'(t).$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (12), se obtiene la siguiente ecuación:

$$I_{0+}^{1-\alpha} T_k'(t) + \Lambda_k T_k(t) = f_k(t).$$

Aplicando el operador I_{0+}^{α} a esta ecuación, obtenemos la siguiente ecuación integral de Volterra de segunda especie:

$$T_k(t) = I_{0+}^{\alpha} f_k(t) + T_k(0) - \frac{\Lambda_k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} T_k(\tau) d\tau \qquad (16)$$

Según el Teorema 1, y usando las fórmulas (Nahushev, 2010:118; Djrbashyan, 1966:120)

$$\frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^z \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\zeta\tau^{\alpha})(z-\tau)^{\xi-1} d\tau = z^{\beta+\xi-1} E_{\alpha,\beta+\xi}(\zeta z^{\alpha});$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z),$$

la ecuación integral (16), considerando la condición inicial (15), tiene una solución $T_K(t)$ única definida por la fórmula siguiente

$$T_k(t) = A_{\mathrm{H},k} E_{\alpha}(-\Lambda_k t^{\alpha}) + \int_0^t e_{\alpha}^{-\Lambda_k(t-\tau)} f_k(t) d\tau$$

Sustituyendo esta expresión en la serie (11), se obtiene la solución formal del problema dado por la ecuación de la subdifusión de la riqueza (2) que cumple las condiciones de frontera e inicial allí dadas:

$$W(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y) \left[A_{\mathrm{H},k} E_{\alpha}(-\Lambda_k t^{\alpha}) + \int_0^t e_{\alpha}^{-\Lambda_k(t-\tau)} f_k(t) d\tau \right]$$

Así, como la solución de la ecuación de subdifusión anómala de la riqueza que cumple las condiciones de frontera prescritas puede escribirse como

$$W(x,y,t) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{mn} E_{\alpha} \left(\left[\eta - \kappa \left\{ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right\} \pi^2 \right] t^{\alpha} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{mn} \int_0^t e_{\alpha}^{\left[\eta - \kappa \left\{ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right\} \pi^2 \right](t-\tau)} f_k(t) d\tau \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \qquad (17)$$

donde las funciones $f_K(t)$ están dados por (12) para los subíndices m,n que correpondan, los coeficientes ε_{mn} están dados por (10), los coeficientes A_{mn} están dados por

$$\mathcal{A}_{0n} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy dx \qquad (18)$$

y, para , por

$$\mathcal{A}_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} dydx \tag{19}$$

Resultados

La expresión de la solución de la ecuación de subdifusión de la riqueza planteada (2) está dada por las ecuaciones (17)-(19). Notemos que si

$$\eta > \kappa \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2, \tag{20}$$

entonces es posible que la riqueza $W(x,y,t) \to \infty$ cuando $\to \infty$.

Conclusiones

Desde luego la primera de las conclusiones importantes es que el crecimiento de la riqueza puede ser no acotado a largo plazo.

Como resultado de este trabajo hemos analizado la participación que en dicho crecimiento tienen el término η en el argumento de las funciones de tipo Mittag-Leffler y la función de entrada $F(x,y,t)$, los cuales conjuntamente abarcan la generación y transferencia de la riqueza en el territorio rectangular. Para el crecimiento es determinante la condición dada por la desigualdad (20) en relación a η y el último término de la ecuación (17).

Lo más importante es que podemos tomar este modelo para hacer una aproximación de la situación de difusión de la riqueza en el territorio mexicano. La difusión normal ocurre si existe una diferencia espacial en la concentración de "partículas" de la riqueza.

Es la migración de dichas partículas que surge del movimiento espontaneo de carácter irreversible. Si los movimientos de un gran número de estas partículas se consideran independientes, entonces existe la equivalencia del proceso del movimiento browniano y la ecuación de difusión. Para la descripción de la difusión anómala se considera que las partículas tienen un camino aleatorio de tiempo continuo, gobernado por las distribuciones de la longitud de salto y de tiempo de espera. Es un modelo probabilístico donde el movimiento aleatorio de la partícula de riqueza en el espacio es interpretado como una serie de saltos de longitudes aleatorias separados por tiempos de espera aleatorios. De esta forma es más cercano a la realidad económica.

Este modelo puede extenderse a considerar condiciones de frontera no homogéneas mixtas o de Robin, con las cuáles podemos considerar el rectángulo como una transformación del territorio donde tengamos tres tipos de frontera: el de intercambio de la riqueza aéreo, el de intercambio marítimo y el de intercambio terrestre. Este último sería una frontera geográficamente directa.

Cada uno de tres lados correspondería a cada uno de esos tipos de intercambio, permaneciendo el cuarto lado homogéneo. Como el principal socio económico de México es Estados Unidos de América, podríamos considerar en primera instancia los intercambios de riqueza con ese país en los tres tipos de frontera mencionados. De esa manera habría un modelo de difusión espacial de la riqueza en México considerando dichos intercambios.

Para este fin debemos considerar que la economía da forma a la estructura del territorio. El análisis y caracterización del sistema económico desde el punto de vista territorial identifica y localiza los elementos del sistema económico que comprenden la riqueza del país están implicados la Definición 1. De acuerdo a esto, el desarrollo de un área específica local depende de los efectos e interacciones que producen en las fronteras de la región el grupo de sectores ó actividades básicos. Lo que impulsa el desarrollo de la región es el desarrollo de estos sectores cuyos productos son intercambiados fundamentalmente hacia y desde el exterior. Estos sectores representan el sector de intercambio del país.

Referencias

Barrera-Sánchez, P., Domínguez-Mota, F.J., González-Flores, G.F. and Tinoco Ruiz, J.G., "Generating quality structured convex grids on irregular regions", *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 34, 2009:76-89.

Chukwu, Ethelbert **N.** *A Mathematical Treatment of Economic Cooperation and Competition Among Nations, with Nigeria, USA, UK, China, and the Middle East Examples*, Elsevier, 2005.

Djrbashyan, M. M. *Integral Transformations and Representation of Functions in Complex Domain*, Moscow, Russia, 1966.

DuChateau, Paul and Zachmann, David. *Applied Partial Differential Equations*, Dover, 2002.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Vol. 204 of *North-Holland Mathematics Studies*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.

Luchko, Yu. and Gorenflo, R., "An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives", *Acta Mathematica Vietnamica*, 24, 1999:207-233.

Mainardi, Francesco, Pagnini, Gianni and Gorenflo, Rudolf, "Some aspects of fractional diffusion equations of single and distributed order" *Applied Mathematics and Computation*, 187, no. 1, 2007: 295-305.

Markowich, Peter A. *Applied partial differential equations: a visual approach*, Berlin Heidelberg Germany, Springer-Verlag, 2007.

Nahushev, A. A., *Elements of Fractional Calculus and Their Applications*, Nalchik, Russia, 2010.

Zhang, Wei-Bin. *Differential equations, bifurcations, and chaos in economics*, Singapore, World Scientific, 2005.