Scripta Philosophiæ Naturalis, 14 : 65-91 (2018)
ISSN 2258 – 3335

MATHÉMATIQUES :
ART OU PHILOSOPHIE ?

Claude P. BRUTER

RÉSUMÉ : L'auteur discute une citation d'Henri Cartan sur les rapports entre mathématiques, art et philosophie. Il propose une définition de l'activité philosophique dans le cadre scientifique. Après quelques considérations sur le milieu des mathématiciens, il évoque l'importance de l'activité philosophique sous-jacente des mathématiciens. Elle porte avant tout sur la mise en évidence d'idées-mères qui fécondent la compréhension et l'analyse. Si l'auteur se permet in fine de donner quelques exemples empruntés à son parcours scientifique, il s'appuie également sur des appréciations, jugements, déjà formulés par les grands mathématiciens du passé : citer un auteur révèle une connivence et un partage d'idées.

§ 1. — Introduction

« Dans le discours que j'ai prononcé le premier février 1977 à l'occasion de la réception de la Médaille d'Or du CNRS, j'ai tenté de défendre la thèse selon laquelle les mathématiques relèveraient plutôt de l'art que de la philosophie »[1] écrivit Henri Cartan, l'un des principaux fondateurs du groupe Bourbaki.

[1] 72 ans plutôt, Henri Poincaré écrivait: « elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique » [38]. On notera l'évolution des idées au cours de cette courte période. Par ailleurs, le sens des adjectifs employés, philosophique et esthétique n'est pas tout à fait le même chez les deux auteurs. Émile Picard, à la même époque, était peut-être plus proche de Cartan, écrivant: « ce serait méconnaître d'abord la valeur philosophique et artistique des Mathématiques; » [37] p.10.

Voilà qui n'est point commun: les mathématiques, discipline artistique ? Serait-ce un canular de normalien ? Cartan ayant passé l'âge de cette joyeuse pratique, prenons plutôt l'affirmation au sérieux. Les mathématiques relèveraient de l'art, et Cartan est loin d'être le seul à considérer la mathématique comme un art. Mais de quel art s'agit-il, et en quel sens ?

C'est là une question que Cartan ne pose pas. D'une manière générale, les exceptions sont rares, les mathématiciens qui, dans leurs écrits, emploient les termes de beauté ou de philosophie, sont muets sur le contenu sémantique de ces mots, la signification qu'ils leur donnent, les justifications de leur emploi, les processus psychologiques et intellectuels qui ont conduit à leur utilisation. On peut s'interroger sur le pourquoi de ce silence: timidité ? Fascination de l'esprit tourné vers la seule mathématique ? Difficulté d'apporter des réponses claires et convaincantes à ces questions, conduisant à la prudence, la réserve, l'humilité ?

Nul n'aura bien sûr l'outrecuidance de prétendre pouvoir satisfaire cette curiosité. Cela dit, on sait bien que poser des problèmes est la première étape qui préside à l'émergence éventuelle de leur solution. Cela est peut-être maintenant fait, de manière incomplète sans doute. Je me propose, sur certains points, de présenter quelques éléments de discussion et me semble-t-il d'acquis. Ils pourraient peut-être permettre d'avancer.

§ 2. — Mathématiques et Art

Des mathématiques comme œuvres d'artisans, d'artistes: il existe, de manière générale, des points communs[2] entre les œuvres d'excellence, quel que soit leur domaine d'appartenance, qui suscitent un sentiment de beauté et méritent d'être vues et appréciées comme des œuvres d'art. Le lecteur trouvera l'exposition et l'illustration de ces points communs dans les textes de diverses conférences sur les rapports entre mathématiques et arts, par exemple dans [6]. Aucun de ces textes toutefois ne se penche sur quelques traits communs à la psychologie de ces créateurs. Ce même article [6] introduit une définition de la beauté[3], « opératoire » en ce sens qu'elle propose une raison importante déclenchant l'affirmation de beauté face à un objet, à un phénomène, à une *res,* terme pris ici dans le sens général employé par Lucrèce (cf le beau livre de P. Vesperini [42] à ce propos). Le terme générique d'« objet » mathématique, la *res mathematicae* désignera donc ici le contenu d'un terme mathématique, singularité, stratification sphère, catégorie, théorie, etc. Les éléments qui fondent la beauté dépendent notamment de la *res,* de sorte que les modalités d'expression et de ressenti de la beauté peuvent être très variées.

Bien des chercheurs, universitaires ou non, ont connu, à une ou plusieurs reprises, ces moments de joie, extatiques - par exemple[4]: expérience 1, liés à la découverte de la

---

[2] « On peut en distinguer six auxquel[le]s on peut donner les noms de Représentation, de Perfection, d'Inventivité, de Singularité, d'Universalité, et de Phénomènes ondulatoires. » [6]

[3] En bref, le beau est ce qui contribue à asseoir la stabilité spatio-temporelle.

[4] J'ai fait ces deux expériences, la première en seconde (cf [7], page 35), la seconde au Centre du CNRS à Aussois en Septembre 1969, rédigeant « Sur le Mur de la Caverne », qui allait devenir la première partie de Topologie et Perception [8].

solution à d'un problème, expérience 2, liés à la mise en forme d'un schéma explicatif très général - et qui apparaissent soudain, à la vitesse de l'éclair, qui illuminent l'esprit. Pensons aux mystiques, à un Pascal, aux penseurs et savants grecs qui, en ces moments, faute de schéma explicatif, se disaient inspirés par le dieu. C'est à ces moments que, souvent, revient le terme de beauté. Les témoignages du mathématicien Grothendieck montrent aussi que la découverte de la beauté peut être le résultat d'une longue préparation. Au début des pages 200 de *Semailles et Moissons* [30], il insiste sur la notion de ravissement, associée d'ailleurs à celle d'émerveillement. Observé sur l'enfant, qu'il dit rester par ailleurs,

> Le ravissement de la découverte que j'ai si souvent senti rayonner de sa personne, s'associe immédiatement en moi à un semblable ravissement, dont il m'est arrivé d'être témoin chez un tout jeune enfant.

Grothendieck ne s'interroge pas sur les raisons de la présence de ce mécanisme, sur son implantation, sur son fonctionnement.

On notera que ce ravissement peut être plus ou moins vif, le plus vif engendrant une fascination, une passion, à un degré moindre engendrant ce qui devient un intérêt. La plupart des grands mathématiciens, tels les Gauss, Riemann ou Grothendieck, ont succombé à ce ravissement: ils font quelque peu penser à Obélix, l'un des héros célèbres de la saga des Astérix, tombé enfant dans la marmite magique du druide Panoramix.

Du point de vue du fonctionnement de la machine cérébrale, bien que l'on ne possède encore aucune connaissance sérieuse sur les mécanismes physiques et biochimiques mis en jeu dans la fabrication des idées, on peut avancer, sur la seule base de l'observation des capacités de l'enfant à enregistrer rapidement toutes les données environnementales, qu'une sorte de maturité précoce jointe à la rapidité, à la vivacité de fonctionnement de l'esprit associée à la fraîcheur et à la jeunesse, ne parle-t-on pas à l'inverse d'esprit rouillé, favorise le déploiement du ravissement et de l'émerveillement évoqués par Grothendieck. On peut concevoir l'impression d'illumination ressentie soudain au moment où l'idée franchit le seuil subliminal comme l'expression d'une réaction immédiate intense associé à la résolution d'une difficulté ressentie comme majeure, essentielle, voire parfois existentielle. C'est Poincaré qui, pour l'instant, décrit au mieux un mécanisme sans doute assez proche et révélateur de la réalité physique: « Les idées surgissaient en foule, je les sentais se heurter jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable » [38]. Le bruit sec des clapets qui enserrent instantanément le vaisseau d'arrivée au vaisseau spatial où s'affairent les cosmonautes est une manière d'analogie sonore avec le phénomène d'illumination mentale.

La comparaison que Grothendieck fait entre ses impressions, ses réactions, et celles de Dieudonné illustre les nuances et la richesse sémantique de la notion de beauté:

> Celui en qui l'émerveillement était le plus visible était Dieudonné. Que ce soit lui qui fasse un exposé, ou qu'il soit simplement auditeur, quand arrivait le moment crucial où une

> échappée soudain s'ouvrait, on voyait Dieudonné aux anges, radieux. C'était l'émerveillement à l'état pur, communicatif, irrésistible – où toute trace du «moi» avait disparu. Le plaisir et le ravissement de Dieudonné était surtout, il me semble, de voir la beauté des choses se manifester en pleine lumière …. la perception de la beauté, qui se manifestait chez Dieudonné par l'émerveillement.

Dieudonné, qui n'était pas créateur comme Grothendieck, était sans doute ébloui par l'architecture des constructions, par l'exemplarité, le caractère brillant des démonstrations. Ecoutons maintenant Grothendieck qui, de l'océan obscur dans lequel baignent les objets mathématiques, pratiquant une démarche propre aux fondateurs, en dégage des soubassements cachés et éclaire leur cohérence:

> La première à se manifester dans ma vie a été ma passion pour les mathématiques. Et je vois aussi, maintenant, que l'aspect doux, recueilli, silencieux de cette chose multiple qu'est la créativité en nous, s'exprime spontanément par l'émerveillement.

Sûrement, l'émerveillement n'a jamais imprégné ma passion mathématique à un point comparable comme dans la passion d'amour. Chose étrange, si j'essaye de me souvenir d'un moment particulier de ravissement ou d'émerveillement, dans mon travail mathématique, je n'en trouve aucun ! Mon approche des mathématiques, depuis l'âge de dix-sept ans quand j'ai commencé à m'y investir à fond, a été de me poser des grandes *tâches.* C'étaient toujours, dès le début, des tâches de "mise en ordre", de grand nettoyage. Je voyais un apparent chaos, une confusion de choses hétéroclites ou de brumes parfois impondérables, qui visiblement devaient avoir une essence commune et receler un ordre, une harmonie encore cachée qu'il s'agissait de dégager par un travail patient, méticuleux, souvent de longue haleine.

> Mon principal guide dans mon travail a été la recherche constante d'une cohérence parfaite, d'une harmonie complète que je devinais derrière la surface turbulente des choses, et que je m'efforçais de dégager patiemment, sans jamais m'en lasser. C'était un sens aigu de la "beauté", sûrement, qui était mon flair et ma seule boussole. Ma plus grande joie a été, moins de la contempler quand elle était apparue en pleine lumière, que de la voir se dégager peu à peu du manteau d'ombre et de brumes où il lui plaisait de se dérober sans cesse.

On retiendra ici que Grothendieck associe sans bien les dissocier: cohérence, joie et beauté, terme qu'il met entre guillemets, révélant de manière presque explicite qu'il s'interroge intérieurement, de manière au moins subliminale, sur ce qu'est la beauté[5].

Ouvrons ici une parenthèse pour rappeler que l'affirmation du rôle joué par un sentiment de nature « esthétique », éveillé par l'élaboration et la mise en forme de leurs observations et de leurs explications, est un lieu commun chez les mathématiciens. Tant Hadamard qu'Arnaud Denjoy[6] rappelleront l'affirmation de Poincaré, proclamant

---

[5] Cf la manière de définition de la beauté proposée dans [6].

[6] L'écriture de Denjoy, par son exemplaire qualité poétique, est véritablement unique chez les mathématiciens: « La phrase semblait baigner dans une lumière blonde et chaude » écrit-il. Je n'ai pas connu Denjoy personnellement. Mais probablement avait-il lu mon petit livre « Sur la Nature des Mathématiques » [7] paru un avant son décès, et, à travers le contenu de cet essai, avait-il senti quelque

l'impossibilité de devenir un grand inventeur sans posséder avec un degré assez élevé l'instinct esthétique. Denjoy souligne d'ailleurs, comme l'avait fait Poincaré, le lien subtil entre intuition et esthétique. Il écrit en italique: « *Le sens esthétique est le guide de l'intuition, comme le sens logique est le guide du raisonnement conscient.* » [19] p.70.

Si cohérence et beauté relèvent des sentiments et affections, elles n'ont pas d'expression physique et physiologique aussi manifestes, visibles, que la joie (sourires et rires, œil pétillant, chaleur du visage, mouvements corporels). La joie va de pair avec un sentiment de solidité psychologique, faisant fi, oubli des possibles difficultés et contraintes environnementales. La stabilité spatio-temporelle de l'être paraît alors se situer localement à un niveau élevé, qui rassure, situation qui peut s'exprimer, être extériorisée par ces mots, «C'est beau !».

On conçoit aisément alors que le mathématicien, souvent placé dans cet état de dominance face aux défis posés par une problématique apparemment ardue, en vienne parfois à faire preuve de quelque condescendance envers celui qui ne partage pas ses aventures de l'esprit, une certaine attitude que des échanges entre collègues auront tendance à conforter. Vanité et fatuité sont deux mots fréquents dans le texte de *Semailles et Moissons*, une œuvre en grande partie d'introspection, courageuse et honnête. On connaît la place accordée par le psychologue Pascal à la manifestation de la vanité, aux comportements des hommes animés par ce sentiment.

Produire une œuvre de qualité, quelle qu'elle soit, est un travail artisanal: il fait appel à des outils particuliers que maîtrise l'homme de l'art, il doit être sans défaut. Il plaît, non seulement par l'absence de toute imperfection dans sa réalisation et dans sa présentation, mais aussi par le degré de profondeur de la signification qu'il recèle, par ce qu'il apporte à chacun et à la communauté.

Réalisation et présentation s'appuient sur des principes structurels et sur des schémas plus ou moins formalisés. La multiplicité des arts, la diversité des règles au sein de chacun des arts, rendent difficile l'énoncé précis de tels principes et schémas partagés par tous les arts. Il convient toutefois de citer ce point commun qu'est la référence à ce phénomène fondamental qu'est la recherche et la mise en œuvre de la stabilité: il se manifeste par exemple à travers l'emploi de la répétition[7]. Elle apparaît sous des formes variées, et de manière plus ou moins élémentaire: par exemple simple doublement ou triplement pour commencer, répétition multiple acyclique ou au contraire présentant des cycles internes caractérisant des groupes de symétrie, répétition à l'infini. Illustrés en mathématiques par exemple par les développements en série ou les décompositions

affinité entre nous si j'en juge par ces lignes: « Arnaud DENJOY est décédé le 21 Janvier 1974, à l'âge de 90 ans. Son livre « Hommes, formes et le nombre » vous est offert par sa famille. » Je suis heureux de pouvoir ici rendre hommage à Arnaud Denjoy, le remercier, ainsi que sa famille qui a honoré sa mémoire. Son livre [19] déjà plusieurs fois cité, paru en 1964, est un des meilleurs qui ait été écrit et sur les mathématiciens et sur les mathématiques aujourd'hui classiques.

[7] Michael Edwards, fin analyste de la poésie, lui consacre le chapitre III de son bel ouvrage « Ombres de lune, Réflexions sur la création littéraire »[22]. Son étude mériterait sans doute d'être complétée par la description des différents types de répétition, acoustiques, en rapport avec la lumière, ou sous l'effet d'émotions diverses, que l'on peut observer dans les poésies. Ce phénomène si répandu de la répétition illustre à nouveau l'importance et le caractère sans doute universel du « principe de Platon » [11].

tayloriennes, par la récurrence et le mécanisme fractal également présents dans les développement précédents, on rencontre de tels phénomènes de répétition partout, dans l'art de la rhétorique et dans celui de la pédagogie, comme dans tous les arts classiques, peinture (décoration en particulier), musique[8], poésie — qui, dans son excellence, allie vibration chromatique et vibration sonore.

Au premier regard, et donc de manière quelque peu superficielle, l'œuvre peut être jugée belle par ses qualités de réalisation et de présentation, parmi lesquelles figurent les difficultés surmontées par l'auteur pour parvenir à ses fins. Toutefois, pour être hautement appréciée, on lui demande de posséder en plus des qualités d'originalité. Ces qualités certes peuvent affecter tant la présentation que la réalisation. Mais c'est la nouveauté de connaissances qu'elle révèle qui consacre véritablement à l'œuvre son originalité. Ces connaissances sont de divers nature et intérêt. Elles peuvent concerner les techniques, procédés et méthodes de réalisation de l'œuvre (par exemple ceux employés en mathématiques pour l'obtention des résultats). Comme toute œuvre est représentation, l'objet de la représentation, la manière dont elle est traitée font partie de ses caractéristiques, et sont susceptibles de nouveautés, comme en particulier la mise en évidence de propriétés nouvelles, l'introduction de concepts nouveaux souvent associés à des problématiques nouvelles, débouchant sur la création de théories également nouvelles. Le caractère exceptionnel d'une nouveauté confère alors à l'œuvre une aura médiatique: elle contribue souvent à amplifier la qualification de beauté qu'on aura par ailleurs pu lui attribuer.

On voit donc combien peut être complexe et susceptible de nuances cette notion de beauté selon l'œuvre et le point de vue selon lequel on la regarde.

§ 3. — Mathématique et Philosophie

3.1 Problématiques générales

Si, sans nul doute, l'activité du mathématicien participe pleinement de l'activité artistique, en quoi, pour quelles raisons, les mathématiques relèveraient-elles moins de la philosophie que de l'art ? Est-on sûr de cela ? Quel peut être l'intérêt de la pratique de la philosophie ?

Mais d'abord qu'entend-on ici par philosophie ? S'agit-il de la philosophie au sens grec, l'amour de la sagesse c'est-à-dire l'amour de la connaissance comme le rapporte Platon, la recherche d'un savoir universel qui tend à faire de l'homme un dieu au sens grec du terme[9] ? En ce cas, on peut estimer que l'activité mathématique participe de cette conception de la philosophie: le mathématicien ne cesse de chercher à connaître les propriétés des objets (*res*) qu'il manipule, d'approfondir la connaissance de ces objets,

[8] Les notes de l'*Appasionata* sonnent aussitôt dans ma tête, le Boléro de Ravel est presque une caricature de l'emploi de la répétition.

[9] Sur ce qu'il faut entendre par philosophe chez les Grecs et chez les romains, voir le prologue et la première partie du livre déjà cité de Pierre Vesperini: « Lucrèce »[42].

parmi lesquels figurent en bonne place les théories et les univers en lesquels ils s'organisent, les relations et les échanges entre ces univers. On objectera qu'il s'agit d'un domaine restreint de la connaissance, les mathématiques, alors qu'apparemment, si l'on en juge de par les œuvres et les affirmations de Platon ou d'Aristote, la connaissance qu'ils invoquent concerne tous les domaines envisageables, toutes les formes de manifestation de l'activité naturelle.

Comment les Grecs et leurs prédécesseurs pratiquaient cette recherche de la connaissance, quel était le contenu de leurs recherches ? Une partie de la réponse est peut-être contenue dans cette caractérisation possible et provisoire d'une certaine pratique philosophique, elle n'est pas la seule, d'une philosophie que je qualifierai de réaliste ou comme Denjoy de « positive », je la soumets au feu de la critique:

> Philosophie réaliste. On désigne par ce terme un ensemble d'observations[10], de réflexions conduisant à dégager des analogies et à énoncer des affirmations et conjectures en général peu précises sur la structure commune, le comportement commun et les propriétés communes de domaines divers et distincts, pouvant conduire au développement d'études plus approfondies dans chacun de ces domaines, ainsi qu'à l'obtention de renseignements précis, confirmés par l'expérience. [11]

On verra plus loin que ces énoncés sont qualifiés en général d'«idées simples» ou encore d'«idées-mères». Le terme « domaine » apparaît dans cette définition. Il sous-tend donc l'idée que chacun d'eux noté D_i engendre un ensemble spécifique E_i d'observations et de réflexions. Il y a donc autant de tels domaines locaux que de philosophies également locales. Rien n'oblige toutefois à prétendre que les ensembles E_i sont disjoints, loin de là. La manière dont cette famille d'ensembles est organisée, sa structure, fait penser à celle d'un treillis.

La philosophie mathématique serait de ce point de vue l'une des philosophes locales, et chacun des objets de cette discipline pourrait également faire l'objet d'une philosophie particulière[12]. La philosophie grecque serait au contraire caractérisée par le fait que son domaine est la réunion de tous les domaines locaux.

---

[10] Il serait plaisant de compter par exemple le nombre de fois où Gauss emploie les termes d' « observations » et d'analogie ».

[11] On rapprochera le contenu de cette définition de celle la notion d'hypothèse que je viens de retrouver en relisant Hermann Weyl. Il cite le physician Ernest Mach pour qui « The essential function of a hypothesis consists in the guidance it affords to new observations and experiments, by which our conjecture is either confirmed, refuted, or modified, by which -in short- our experiments is broadened » [45], page 157.

[12] Exemple de « philosophie » très locale : « De même que la théorie de Galois usuelle traduit les problèmes d'algèbres étales en des questions de groupes finis ou pro-finis, la théorie de Galois motivique a pour objectif de ramener toute une classe de problèmes géométriques à des questions de la théorie classique des représentations des groupes réduction et de leurs algèbres de Lie. Cette philosophie a inspiré, directement ou indirectement, de nombreux travaux depuis une trentaine d'années » [1], p.10. Le terme « philosophie » désigne ici un procédé méthodologique, l'emploi d'une analogie soutenue par la perception de structures semblables. C'est très souvent dans cette acception réduite que les mathématiciens emploient ce terme de « philosophie ». Beaucoup d'ouvrages anciens ont ce caractère local comme par exemple ceux de Frege [27], Husserl [32] , [33], Russell [41]. Enfin, bien souvent, le terme « philosophie » est employé sans rapport véritable avec le contenu du discours. Même Denjoy succombe à ce laisser-aller ! (cf « Mon œuvre mathématique, sa genèse et sa philosophie » dans [20]).

On peut s'interroger sur l'histoire de ces philosophies locales, leur genèse, leur évolution et, dans ce cadre, sur la nature et le comment de leurs éventuelles influences réciproques.

Enfin, on peut s'interroger également: quels sont les chaînes et entrelacs de mécanismes physiques, biochimiques, physiologiques, psychologiques qui ont pu conduire à élaborer ces philosophies, ces analogies et ces conjectures, à les énoncer, comment tout ce soubassement biologique fonctionne-t-il et s'est-il établi ?

Dans quelle mesure les mathématiciens sont-ils alors également familiers de cette pratique, qu'ont-ils explicitement formulé ?

3.2 Le cas des mathématiques

3.2.1 Les classifications des mathématiciens

Mais ne doit-on pas d'abord s'interroger: les mathématiciens s'occupent bien sûr de la connaissance de ces objets mathématiques, mais ces objets d'où viennent-ils? Leur genèse, leur création sont-elles également du ressort de l'activité des mathématiciens ?

Ces derniers apportent eux-mêmes la réponse à cette question à travers la distinction naturelle entre «tâcherons de la science » et grands mathématiciens qui laissent leur nom, soit par l'étendue des problèmes qu'ils ont résolus, soit également par l'importance des méthodes nouvelles qu'ils ont apportées pour résoudre des problèmes, soit également par l'importance des notions et concepts nouveaux qu'ils ont introduits, les observations générales et réflexions qui ont conduit leurs travaux et qu'ils ont formulées.

Cette classification des mathématiciens a été par exemple exposée par Félix Klein [25] (fin de la page XXXIV), reprise par André Weil [43] (début de la page 318), faite à nouveau dans les années 1970 par le géomètre algébriste et bourbakiste Pierre Samuel, puis par Grothendieck[13]. Arnaud Denjoy, dans son chapitre « *Le savant, qu'est-il?* » [19], oppose les génies A aux génies B: il détaille sur de longues pages les attitudes d'esprit et les comportements de certains d'entre eux. La classification fine est bien sûr un exercice auquel personne ne se livre. Le critère le plus banal est celui du volume de la production de chacun, de la fécondité de l'auteur et des nouveautés qu'il a introduites. Une classification également très globale, mais déjà un peu plus nuancée que celle élémentaire entre créateurs et tâcherons, est suggérée par Denjoy dans ces lignes: « Aux trois sortes de maîtres exerçant les enseignements, la musique donne en images: le compositeur, l'interprète, l'exécutant. » [19].

[13] La reprise par Samuel de cette distinction évidente lui a valu une volée de bois verts de la part de certains mathématiciens, ceux que Denjoy range dans la catégorie des génies. B. Grothendieck a repris le terme de tâcheron dans [30], page 139. Page 40 de ces mêmes mémoires, il emploie les termes « casanier » versus bâtisseur-pionnier, et « conservateurs » versus « novateurs ».

D'autres classifications des mathématiciens peuvent s'établir selon un critère éthique, selon un critère culturel, selon un critère de sensibilité intellectuelle lié au critère des domaines d'activité.

Critère éthique: Bien des grands mathématiciens, les génies A selon Denoy, ont eu un comportement exemplaire: droit, honnête, courageux, souvent généreux. Dans le recueil d'articles de Maurice Fréchet intitulé « Les mathématiques et le Concret »[26], figure un texte consacré au mathématicien trop peu connu des historiens, Louis-François-Antoine Arbogast, entre autres père selon Fréchet du Calcul fonctionnel. Fréchet cite l'un de ses biographes:

> Arbogast doit être placé parmi les meilleurs géomètres de France; il réunissait les qualités qui constituent le vrai savant: une grande droiture dans le caractère et un caractère noble et bienfaisant.

Mais plusieurs autres mathématiciens célèbres ont fait l'objet de jugements plus mesurés: on a pu évoquer leur soumission au pouvoir politique, quelques-uns étaient ouvertement antisémites, d'autres trop imbus de leur personne, d'autres enfin, esprits parfois tourmentés, déchirés, connaissaient leurs faiblesses et pouvaient en souffrir.

On se doute que chez les mathématiciens de moindre envergure intellectuelle, n'étant pas toujours dotés de la culture suffisante qui fonde le jugement, sous l'influence de rivalités, d'aspirations diverses, de défauts caractériels variés, encouragés peut-être par le milieu social ou par l'organisation de leur société professionnelle, les comportements éthiques n'aient pas toujours affiché une tenue exemplaire, et se situent malheureusement parfois à son antipode.

La question du moi, de l'ego est lancinante. Les polémiques entre points de vue, ou portant sur l'antériorité et la filiation des idées, la stimulent. La plus célèbre des polémiques chez les mathématiciens aura opposé Leibniz et Newton (cf par exemple [10]). En matière de querelle de priorité et de filiation, l'ouvrage déjà cité de Grothendieck fera date. Certains sont trop préoccupés par eux-mêmes, d'autres trop modestes. Les plus équilibrés, plutôt rares, s'en moquent. On retiendra ici la sagesse de Pascal: « S'il se vante, je l'abaisse; s'il s'abaisse, je le vante. »

Des conflits de nature sociologique ont parfois jailli, portant sur la composition même de la société des mathématiciens et sur la manière dont évolue la science mathématique. Ainsi pour Dieudonné, le refus d'accepter un nouveau collègue, refus émis par les responsables de la société, était justifié, considérant que ses publications concernaient des « mathématiques *non motivées* » (souligné par Dieudonné). (« il faut, non seulement qu'il témoigne d'imagination et de compétence technique, mais *en outre* que le sujet traité ait un rapport direct avec des problèmes *déjà posés* dans de *bons* ouvrages mathématiques antérieurs: c'est ce qu'on appelle généralement une *motivation* ». Ce point de vue, plutôt aveugle et étonnant de la part de quelqu'un qui avait de solides connaissances de l'histoire des mathématiques, fut discuté et combattu par les mathématiciens Kasner-Mac-Lane-Samuel[14]. Les questions sous-jacentes et très sérieuses, insuffisamment débattues, on en trouve par exemple la trace dans le livre de Le Lionnais [35] (exposés de Paul Germain et d'André Weil) ou dans le livre de Maurice Fréchet [26], sont celles de la construction progressive de l'univers mathématique et de son emploi, pertinent ou non, à un moment donné dans le passé éventuel, le présent, et le futur imaginé. Ces questions ne seront pas abordées ici.

Critère culturel: Une parenthèse sur la formation intellectuelle de ces savants. Au fil du temps, les enseignements à vocation religieuse (apprentissage de l'hébreux, approfondissement de la théologie (Euler, Riemann)), ceux entièrement centrés sur la connaissance des langues et des littérature anciennes, ou bien élargis par la connaissance des philosophies des siècles passés, ont perdu de leur influence, alors que s'accroissait sans cesse le volume des connaissances dans chacune des diverses sciences. Le jeune chercheur aujourd'hui est presque contraint de devenir un spécialiste. On pourrait souvent résumer le comportement de l'homme à celui d'un être constitué de deux yeux et d'un projecteur: le fonctionnement du projecteur représente celui de la pensée, il envoie un flux lumineux sur une toute petite partie de l'environnement spatio-temporel. Cet homme ne voit donc que la partie éclairée, il ignore tout de ce qui l'entoure, un entourage qui peut contenir des tas d'objets-évènements potentiellement mortels à brève ou à longue échéance. C'est à cette image que fait penser le spécialiste ordinaire du présent.

L'impression prévaut donc aujourd'hui d'une absence réelle de culture littéraire et philosophique de la part des jeunes mathématiciens. La formation intellectuelle d'un jeune savant actuel est en effet assez différente de celle des savants de la fin du dix-neuvième siècle, de tous ceux cités précédemment. On est loin du temps où un Albert Einstein par exemple passait tant d'heures à discuter de philosophie des sciences avec ses amis, Besso, Habitch, Grossman, Solovine. Le lecteur appréciera ces lignes écrites par Pierre Speziali dans sa présentation de la correspondance entre Einstein et Besso:

> Ce qui frappe, quand on lit ces lettres, c'est l'étendue de la culture de nos deux correspondants, une culture qui embrasse tous les domaines du savoir, toutes les œuvres des meilleurs auteurs du passé et du présent. Pour s'en rendre compte, il suffit de parcourir l'index des noms des personnes. Les maximes, les adages et les citations latines abondent, tirées d'Horace, de Lucain, de Tacite, etc., d'autres auteurs encore. Les plus grands penseurs grecs, les gloires de la littérature allemande, italienne, anglaise, française et russe défilent sous nos yeux: quelques vers, une allusion furtive, une simple référence suffisent évoquer ce que l'esprit humain a atteint de plus parfait. On sait qu'à Princeton Einstein faisait souvent, le soir, à sa sœur Maja, la lecture d'un auteur grec dans le texte original. Autrefois, une culture humaniste allait de soi pour un scientifique; les programmes de l'enseignement s'y prêtaient d'ailleurs mieux qu'aujourd'hui et la mémorisation de tirades en vers et en prose en faisait partie. Notre époque, si pressée d'avancer, ne veut plus de mnémotechnique, elle qui se veut technique, et c'est dommage. Enfin, je m'en voudrais de ne pas faire mention du domaine des sons et de l'harmonie, évoqué à plus d'un endroit de la correspondance par les noms de Bach, de Mozart et de Beethoven. [23])

[14] J'ai le dossier, on peut peut-être en trouver quelques éléments dans une des Gazettes des Mathématiciens de 1972.

Pour ce qui est de la formation de l'esprit en France, le fait suivant soulignera l'ampleur de ce mouvement de régression: je ne sais si les jeunes élèves apprennent encore cet avertissement de Rabelais, « Science sans conscience n'est que ruine de l'âme ». En tout cas, le seul nom de Montaigne, ce maître honoré par tous de sagesse et de tolérance, « Tout sert en ménage », semble aujourd'hui inconnu des jeunes générations. Internet certes permet d'avoir un accès immédiat à diverses encyclopédies intelligentes: elles incitent sans doute à approfondir leurs contenus. Mais ce ne sont pas des outils de formation: elles ne guident pas le lecteur à travers l'immensité des ouvrages cités, elles ne remplacent pas l'analyse et le commentaire patient qui montrent l'essentiel et ouvrent à la réflexion, forment la pensée.

Cela dit, il se trouvera, toujours on peut le penser, des sujets d'exception :

> Yes, that was not an obvious choice because I was more interested in humanities. I was in love with Socrates and Plato, and I am still reading Plato right now, day after day, night after night. I am no longer reading Plato in Greek but I used to do that. I would say my main interest is literature. The point is that I am a bad writer. That is my bad side. So I took mathematics because I was gifted - I was unusually gifted in mathematics. I cannot explain that. I understood mathematics from inside in a very natural way. When I was in high school, I understood mathematics by myself and not by listening to my teachers. [21].

Je conclurai ce paragraphe par cette recommandation naturelle de Denjoy [19] p.221]:

> Le travail de réduction de chaque ordre aux idées dominantes et à quelques idées satellites, à la stricte armature où s'attachent toutes les parties du corps d'une même doctrine, ce travail s'imposera si l'on veut pouvoir maintenir l'existence d'une culture générale, même dans la discipline limitée aux mathématiques,

une manière de voir et de faire que j'ai très tôt partagée.

Critère de sensibilité intellectuelle: Nous possédons tous différents types de mémoire, corporelle, visuelle, auditive. Elles sont présentent en nous à des degrés divers. Les deux dernières en particulier facilitent le travail intellectuel. On peut penser que les meilleurs des mathématiciens sont également les plus chanceux de ce point de vue. Il faut ajouter que l'intérêt porté à la matière étudiée, l'intelligence qu'on en maîtrise, sont des adjuvants importants à l'activité mnémonique.

Parmi les facteurs qui définissent cet intérêt, des tournures d'esprit particulières d'une part, les hasards des rencontres, auteurs ou « personnes », contribuant à la formation de la pensée d'autre part, ont toute leur importance. Par « personnes », il faut bien sûr entendre non seulement les cas individuels mais aussi le groupe, le milieu social.

Sous le terme « tournure d'esprit », on peut ranger la faculté d'assimilation plus ou moins rapide par ailleurs liée à la mémoire, et la rapidité de réaction et de réponse face à un évènement intellectuel. Cette rapidité impressionne, peut faire aisément illusion sur la valeur du contenu, sur les qualités réelles de l'orateur. Le propos éclair qui n'est pas le résultat d'une longue préparation est le plus souvent superficiel. Une découverte, l'introduction d'une idée nouvelle sont souvent le résultat d'une longue maturation dans l'esprit de plusieurs générations: il se produit alors dans l'esprit du génie A une sorte de récapitulation de ce passé lui permettant d'assurer l'éclosion de la nouveauté. Le défi introduit par la mise en conflit de données diverses, ou bien par la nécessité de rendre cohérente leur présence, conduit, par le jeu des comparaisons qui est le propre de cette partie de l'activité cérébrale que j'ai appelée la pensée comparative [12], à faire apparaître des propriétés particulières et saillantes ou des éléments communs significatifs, inducteurs de propriétés et de comportements, inobservés jusqu'ici.

« Par la souffrance, la connaissance » avait affirmé Eschyle. Or la souffrance provient des profondeurs de l'être. Le savoir déjà acquis et enfoui forme une sorte d'épais matelas obscur, des profondeurs duquel la pensée parvient petit à petit à faire surgir des éléments organisateurs et éclairants. La maturation est un phénomène biologique lent, qui puise ses sources dans le passé le plus lointain. Cette lenteur accompagne en général la profondeur: le violoncelle à la voix prenante et grave des partita de Bach en porte témoignage. Le mathématicien Jean Leray prit un jour le RER à Bourg-la-Reine et trouva une place face à moi, le visage souriant et plein de chaleur; ces paroles me sont restées en mémoire: « J'ai l'esprit lent ». On retiendra aussi le propos de la dernière médaillée Fields 2014, Maryam Mirzakhani, déjà emportée par un cancer : « *Je pense lentement, il me faut beaucoup de temps avant de pouvoir éclaircir mes idées et avancer* » [45], et, puisque le monde des arts est présent dans ce texte, cette affirmation de Dali: « Le travail artistique doit se faire à base de culture: c'est donc très lent, il faut que ça mijote, un tableau après l'autre. » [18]. Je raconterai plus tard une autre anecdote personnelle.

Le jeu des comparaisons peut affecter des données globales, d'autres plus locales. Ce qu'on nomme l'intuition[15] serait en particulier développée chez les personnes qui pratiquent les comparaisons portant sur des faits et des données globales, au contraire de celles plus attachées à la comparaison entre données et faits locaux. Il est clair que le grand mathématicien possède ces deux aptitudes, ces formes de pensée inductive et déductive, développées au plus haut point sur un fond de connaissances étendues. Hadamard en particulier s'est beaucoup intéressé aux « différents genres d'esprits mathématiques » (cf le chapitre VII de son livre [31]).

Les capacités intellectuelles de chacun, les influences diverses qu'il reçoit dans le cours de sa vie déterminent les domaines dans lesquels le mathématicien œuvrera. On retrouvera sans doute les éléments d'analyse qui précèdent dans les raisons qui ont présidé à la naissance et à la constitution des grands chapitres des mathématiques, topologie-géométrie, algèbre, analyse, théorie des nombres.

3.2.2 Le mathématicien et la philosophie

Cartan semble nous dire que, dans le monde mathématique, la place de l'activité de type artistique est plus étendue que la place occupée par l'activité philosophique. Ce

[15] Sur l'intuition, voir notamment [9] pp. 119-121.

propos implique évidemment que les mathématiciens pratiquent la philosophie. Les questions se posent de savoir dans quelle mesure cette pratique est présente, et quel rôle a-t-elle pu jouer chez les uns et chez les autres. Une plus grande étendue de l'activité artistique n'implique nullement qu'elle soit plus importante pour le devenir des mathématiques, leur évolution, leur enrichissement. Ce n'est pas sans raison que Denjoy écrit :

> Le génie A ne cesse de philosopher. Tout évènement, important ou minime, s'offrant à notre observation est un effet nous sollicitant de trouver sa cause. Tout nous pose un problème de genèse. [19] p.18.

Denjoy partage ici avec Aristote, et sans doute de nombreux mathématiciens comme par exemple Grothendieck[16], une même conception des raisons de l'activité philosophique.

Il ne semble pas exister d'étude historique exhaustive d'une part centrée sur la philosophie propre à chaque mathématicien, d'autre part aboutissant à l'élaboration d'une philosophie des mathématiques, d'un système philosophique à l'intérieur duquel les éléments de philosophie propres à chaque mathématicien trouverait sa place.

Les ouvrages anciens où apparaissent explicitement ou non des considérations d'ordre philosophique, ou qui se prétendent telles, ne répondent pas suffisamment aux demandes qui précèdent. Citons par exemple, parmi beaucoup d'autres de ces ouvrages, ceux qui traient de plusieurs domaines : le traité d'histoire des mathématiques de Bourbaki [4], le livre de Barbin-Caveing [3], celui de Léon Brunschwig [5], de Gilles Châtelet [16], Louis Couturat [17], de Miguel Espinoza [24], de Ferdinand Gonseth [29], ceux d'Albert Lautman [35] et d'Hermann Weyl [44]. L'ouvrage remarquable de Gaston Bachelard [2] mérite toutefois par son contenu et sa pertinence une mention particulière. Pour le dessein recherché, on préfèrera souvent une étude sur les contenus des philosophies des mathématiciens lorsque ceux-ci évoquent leur travaux, ou même emploient exceptionnellement le mot philosophie au sein d'une leurs publications. La matière de cette étude est donc celle de leurs écrits, de leurs « méditations », terme employé par Gauss dans la préface à son traité d'arithmétique [28], lorsqu'ils se livrent à indiquer leurs motivations, les données sur lesquelles ils s'appuient pour engager une recherche, pour choisir leurs outils.

Notons à ce propos que l'histoire notamment des mathématiques n'est pas seulement la déclinaison temporelle des faits et celle de leurs enchaînements, mais, plus profondément, elle est aussi celle de la genèse des idées qui ont pu conduire à l'existence

[16] « (7 novembre) Au niveau de nos facultés intellectuelles, de la raison, "connaître" une chose, c'est avant toute autre chose, la "comprendre". Et dans un travail de découverte qui se place dans ce registre-là de nos facultés, l'élan de connaissance qui anime l'enfant en nous (indépendamment des motivations propres au "moi", au "Patron") est le désir de comprendre. C'est peut-être là la principale différence qui distingue la pulsion de connaissance intellectuelle de sa sœur aînée, la pulsion amoureuse. Ce désir de comprendre préexiste à toute "méthode", scientifique ou autre. Celle-ci est un outil, façonné par le désir pour servir à ses fins : pénétrer l'inconnu accessible à la raison, aux fins de comprendre. La connaissance naît du désir de connaître, donc du désir de comprendre lorsque c'est la raison qui veut connaître. » [30] p.497.

de ces faits. C'est d'ailleurs là où la mode intellectuelle, la tournure d'esprit, l'étendue de la culture, l'aptitude et l'attitude philosophique des auteurs, voire la psychologie de chacun, entrent en jeu.

Deux raisons objectives principales s'opposent évidemment à la réalisation d'une telle conception de l'histoire. La première est que nous ne connaissons pas tous les éléments de connaissance qui ont pesé sur la formation d'esprit de nos prédécesseurs: leurs lectures, leurs rencontres, la compréhension de ce qu'ils ont lu et entendu, la mémoire qu'ils en ont conservée. La seconde raison tient au fonctionnement même de la pensée. Tous les éléments précédents travaillent en sous-main, de manière obscure, ne parvenant que rarement au niveau conscient. Ne jaillit à ce niveau que le résultat de ces élucubrations, de ce travail interne qui ne laisse sortir que la solution à la question posée, sur laquelle était penchée, dirigée toute l'attention quelque peu inquiète du chercheur. Comment travaille sur le plan physiologique cette énorme machinerie est un domaine de connaissance pratiquement inconnu que les générations suivantes dont on espère la présence aura à cœur de déchiffrer.

Compte tenu de ces remarques, l'espoir que l'historien parvienne pleinement à réaliser le programme de travail que nous venons d'envisager est sans doute vain. Ce que l'on peut faire de mieux à l'heure actuelle est sans doute d'essayer de mettre à jour quelques-uns des éléments qui ont pu façonner la pensée des bons auteurs.

Cela suppose donc d'abord d'essayer de reconstituer le corpus d'auteurs et d'idées qui ont pu former l'esprit des grands mathématiciens. Même sur ce plan, nos informations sont terriblement réduites. On trouvera, ici ou là dans la littérature, des éléments biographiques simples donnant quelques indications sur le contenu des enseignements reçus. Par exemple le physicien théoricien M. Monastyrsky écrit:

> At the age of five, history, especially the history of Poland, interested him [Riemann] at most. An interest in history and in general in humanitarian subjects is characteristic of many great mathematicians[17]. One has only to think of Karl Friedrich Gauss who, as a student, wavered between philology and mathematics as his speciality, and Carl Gustav Jacob Jacobi who participated in a seminar on ancient languages. [18]

---

[17] L'affirmation prudente n'a bien sûr rien de scientifique, elle reste plutôt subjective, et relative à une certaine époque. En voici un contre-exemple remarquable, donné par Grothendieck: « Depuis que je suis gosse déjà, je n'ai jamais trop accroché à l'histoire (ni à la géographie d'ailleurs). (Dans la cinquième partie de Récoltes et Semailles (écrite seulement en partie), j'ai l'occasion "en passant" de détecter ce qui me semble la raison profonde de ce "bloc" partiel contre l'histoire - un bloc qui est en train de se résorber, je crois, au cours de ces dernières années.) L'enseignement mathématique reçu par mes aînés, dans le "cercle bourbachique", n'a pas été d'ailleurs pour arranger les choses — les références historiques occasionnelles y ont été plus que rares. » [30] p. 68. Sur cette absence d'enseignement de l'histoire des mathématiques, il renchérit: « Dans l'enseignement que j'ai reçu de mes aînés, les références historiques étaient rarissimes, et j'ai été nourri, non par la lecture d'auteurs tant soit peu anciens ni même contemporains, mais surtout par la communication, de vive voix ou par lettres interposées, avec d'autres mathématiciens, à commencer par mes aînés. » [30] p.49.

[18] M. Monastyrsky.: Excerpts from Riemann, Topology and Physics, The Mathematical Intelligencer, 9, 2, 1987, 46-52.

Avant d'entrer dans le lacis de leurs écrits, on pourra commencer par lire les œuvres à vocation épistémologique et philosophique déjà cités, les notices biographiques issues de la plume des grands mathématiciens ou qui leur sont consacrées par leurs pairs. Celle d'Elie Cartan [14] par exemple est souvent instructive, tout comme le texte de Fréchet sur « Les origines des notions mathématiques » ([26], chapitre II). Aucune de ces lectures ne nous offre un corpus organisé de tous les éléments de philosophie locale qui, à un moment ou à un autre, ont pu, consciemment ou inconsciemment, susciter leurs recherches, diriger leurs travaux. De ces lectures n'émergent que des bribes de philosophie, et parfois le terme d'épistémologie serait plus adapté, pour caractériser ces contenus.

Il ressort de l'examen des œuvres passées et présentes que les mathématiciens ont travaillé, et continuent de travailler, sur deux corpus de données a priori distinctes: les données du monde naturel, de notre environnement physique, biologique et social d'une part, celles du corpus mathématique créé par leurs prédécesseurs d'autre part.

Toutes ces données sont l'objet de représentations. Ces représentations se présentent d'abord sous la forme d'imitations plus ou moins fidèles: elles font dans les premiers temps figure de symboles (les premières signes, les premières écritures) dont on oublie souvent la réalité substantielle, auxquels également on finit parfois par attribuer des pouvoirs magiques.

On ne se rend pas compte assez à quel point l'homme est un animal symbolique, créant des représentations tronquées qu'il érige en symboles, sur lesquels il fixe d'autant plus sa pensée que, de par la nature de leur support, ces symboles restent presque constamment présents tant dans son environnement que dans son univers mental. L'être humain en vient à prendre le symbole pour la réalité.

A un stade plus élaboré, ces imitations portent le nom de portraits, de formules, et de modèles. Contre cette emprise de ces imitations sur l'esprit, s'est élevé parmi les premiers Lord Thompson-Kelvin: ne pas prendre la formule pour le fait (par exemple [13] chapitre II).

Ainsi chez les mathématiciens, depuis Pythagore, mais sans doute bien avant lui, le nombre avait acquis un caractère magique. Sur la foi d'une réflexion peu poussée sur le succès de l'emploi des mathématiques dans la description du monde physique, on en vint plus généralement à proclamer la primauté de l'univers mathématique sur le monde physique. Ici encore, le symbole a primé sur la réalité. Les mathématiciens platoniciens sont les adeptes de cette forme de religion primaire. Ils contribuent, parfois par quelque forme de vanité, à entretenir chez les philosophes seconds des vues incorrectes sur la genèse du corpus mathématique. Les grands mathématiciens parlant de leur activité insistent le fait que leur science est d'abord une science d'observation. Ce n'est qu'ensuite que l'on formalise à l'aide de symboles, puis, compte tenu des propriétés des données premières, on déduit des propriétés secondes, conséquentes. Jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle, par leur formation ouverte sur toutes les disciplines, les « géomètres » c'est-à-dire les mathématiciens de ces temps étaient autant physiciens, sinon davantage, que mathématiciens. Toutes les notions premières des mathématiques (nombres, droites et polyèdres, flux, etc), les théorèmes fondamentaux (Thalès, Gauss) proviennent de l'observation du monde physique, soit directement, soit à travers les représentations qu'on en a établies[19]. Ce n'est qu'ensuite, que l'ensemble de ces données, de ces faits, de ces procédures de raisonnement, une fois bien assimilés par la machine cérébrale, peuvent avoir une influence sur le déroulement des idées, conditionner la manière dont s'organise l'observation et se déroule la pensée.

Pour l'élève de Platon, Aristote, « le but de la philosophie [est] de rechercher la cause de tout ce qu'on peut observer » (Traité de Métaphysique (Livre A Chap. VII, 992a)), tout, c'est-à-dire les données évoquées plus haut, et qui font l'objet de nos représentations. La découverte de la cause ou plutôt des causes fournit à l'esprit un vif sentiment de satisfaction, car elle contribue de manière essentielle à la persévérance spatio-temporelle de l'être et de sa communauté. Cette satisfaction se traduit, sur le plan psychologique et affectif, par l'expression d'un sentiment, celui de comprendre. La présentation d'un enchaînement de causes porte le nom d'explication.

Toute explication repose sur des idées et des faits premiers, qu'on les désigne par principes ou par axiomes. Quelles peuvent être ces « réalités intelligibles »[20], ces données premières, et d'abord d'où viennent-elles ?

Leur mise en évidence est le fruit de l'observation attentive, étendue dans la durée, renouvelée au cours des générations successives, opérée également sur des domaines d'activités de la nature de plus en plus divers et riches, à des niveaux d'échelle de plus en plus larges, tant vers l'infiniment grand que vers l'infiniment petit. De la sorte, ces données premières possèdent des qualités à la fois de pertinence et de généralité. On a tendance à les proclamer universelles, c'est-à-dire stables à travers l'espace et dans le temps. On ne saurait toutefois oublier que cette universalité est relative aux domaines d'observation spatio-temporel auxquels on a pu avoir accès, à leur étendue.

Différentes questions se posent par ailleurs au sujet de ces données. Qu'est-ce qui motive leur existence, sont-elles bien fondées, de quelle(s) signification(s), de quelle(s) sémantique(s) sont-elles porteurs ? Que déduire d'éléments de réponse éventuellement apportés à ces questions ? Et comment, où, par qui ont-ils été forgés au cours du temps ?

D'un autre côté, l'explication, objet intellectuel, se révèle être en général un assemblage organisé de causes diverses, de même que la plupart des objets purement

---

[19] Voici d'ailleurs ce qu'en dit Pascal: « Nous connaissons la vérité non seulement par la raison, mais encore par le cœur. C'est de cette dernière sorte que nous connaissons les premier principes, et c'est en vain que le raisonnement, qui n'y a point part, essaye de les combattre…. Car nos connaissances des premiers principes, espace, temps, mouvement, nombres, sont aussi ferme qu'aucune de celles que nos raisonnement nous donnent; et c'est sur ces connaissances du cœur et de l'instinct, qu'il faut que la raison s'appuie et qu'elle y fonde tout son discours »[36] p. 89.

[20] Platon n'aurait sans doute émis d'objection majeure à l'emploi de cette dénomination, « Formes intelligibles »: cf ce commentaire de Luc Brisson, auteur de l'excellent « Platon » (Editions du Cerf, 2017, p. 136): «Le terme grec *eîdos* (qui vient du verbe *eidénai* signifiant « voir ») renvoie chez Platon à une chose vue, non par les yeux du corps, mais par ceux de l'âme, c'est-à-dire par l'intelligence, d'où la formule « forme intelligible ». À la différence d'un objet, la Forme est immuable: car elle ne naît ni ne périt, car elle est cause d'elle-même et surtout elle ne change pas. De plus, elle est universelle, en ce sens que partout elle est ce qu'elle est, ce qu'elle a été, ce qu'elle sera. »

physiques, biologiques ou sociaux se présentent également sous la forme d'assemblages plus ou moins bien agencés de sous-objets de même nature. Que sont ces assemblages, comment s'établissent-ils, quelles sont leurs propriétés effectives ou potentielles, les quelles d'entre elles présentent un caractère d'universalité, qu'elles soient de nature physique proprement dites, fonctionnelles ou autres ?

Des réponses instinctives ou intuitives, ou au contraire élaborées en théories, comme celles relevant de la logique, furent par moments apportées à certaines de ces questions sur quelques points particuliers.

Il est remarquable mais bien établi que les idées de base sur lesquelles se développent les théories, aussi savantes soient-elles, sont des idées dites simples, parce que, une fois énoncées et établies, elles paraissent immédiatement accessibles à l'entendement de chacun, évidentes, et dont on s'étonne parfois qu'elles nous aient échappées. C'était en particulier le sentiment qu'en avait Einstein par exemple. Il disposait d'une formation philosophique très solide, il avait lu je crois Locke, qui écrit, par exemple au début du chapitre XIII, Livre II de son « Essai philosophique concernant l'entendement humain » (traduction de MDCCLV): « Quoique j'aye déjà parlé fort fouvent des Idées simples, qui font en effet les matériaux de toutes nos connaissances, … ». Ce sentiment de la grande pertinence des idées simples est sans doute largement partagée dans le monde scientifique. Denjoy, parlant de mathématiques, employait le terme judicieux d' « idées mères »[21]:

> Ainsi que dans les sciences de la nature, le vrai problème de toute théorie est d'en découvrir le idées mères, celles qui, rattachant un effet capital (limitation, continuité, dérivabilité, analyticité, convergence, etc.) à une cause de la plus grande universalité possible, sont génératrices d'une nombreuse descendance de propriétés particulières.

Un exemple tout récent exprime la même idée:

> The overall goal of this survey is to show how a few relatively fairly simple ideas plus some standard techniques form deformation theory and Hodge theory explain a wide range of phenomena of the above kind,

écrit un mathématicien hollandais Chris Peters dans le volume 4 des EMS Surveys in Mathematical Sciences reçu ce mois de Juillet 2017. Grothendieck va dans le même sens, attribuant à la capacité de dégager des idées simples une vertu enfantine: « C'est par le renouvellement que chacun a apporté dans plusieurs parties importantes de la mathématique, par des "idées" simples et fécondes, c'est-à-dire : pour avoir porté leur regard sur des choses simples et essentielles, auxquelles personne avant eux n'avait daigné prêter attention. Cette capacité enfantine de *voir* les choses simples et essentielles, si humbles soient-elles et dédaignées de tous — c'est en *elle* que réside le pouvoir de

[21] Lazare Carnot les voyait sous la forme d' « idées primitives, qui laissent toujours quelque nuage dans l'esprit, mais dont les premières conséquences, une fois tirées, ouvrent un champ vaste et facile à parcourir. »[15] p. 3.

renouvellement, le pouvoir créateur en chacun. » [30], p.389. On peut à bon droit s'interroger sur la réalité de cette capacité qu'aurait l'enfant de percevoir la simplicité c'est-à-dire en l'occurrence l'essentiel au sein de données multiples et de phénomènes complexes. Une certaine connaissance du monde et maturité font défaut. Et si cela était, on se demande pourquoi il aura fallu tant de temps pour que seuls quelques individus au cours de l'histoire en viennent à énoncer ces idées simples.

D'ailleurs, leur acceptation est évidemment loin d'être toujours immédiate[22]. Il faut une bonne dose de connaissances et d'expérience et d'intuition pour parvenir à les accepter entièrement et à en faire un usage pertinent. Celui qui en rencontre une pour la première fois pourra la juger simpliste voire fausse, ne pas en apercevoir immédiatement toutes les incarnations, implications et manifestations plus ou moins subtiles, parfois peu évidentes. Il peut donc être à même de la rejeter. On peut toutefois espérer que sa mémoire en conservera la trace, qu'un lent travail fructueux de son esprit finira par le convaincre de la pertinence de cette idée « simple », de cette idée-mère.

Les idées-mères du monde observé s'incarnent dans la réalité naturelle, matérielle, physique, biologique, sociale. Elles ont pour sous-produits l'existence de divers phénomènes et mécanismes très stables: les physiciens et les mathématiciens les traduisent souvent en principes et en axiomes à partir desquels ils déroulent leurs théories. La recherche de ces idées-mères est donc un enjeu essentiel pour notre compréhension monde et notre devenir.

3.3 Quelques éléments de philosophie personnelle

3.3.1 « Tout sert en ménage », y compris l'expérience des plus modestes. Elle enrichit l'expérience collective, apporte son brin d'originalité, à prendre avec une pointe d'humour. Rien n'est inutile pour le pédagogue, le psychologue, l'historien.

La notion d'idée-mère est une notion féconde. Chaque idée-mère est porteuse d'un potentiel de connaissances nouvelles, de compréhension plus étendue et plus sure. Aussi, dans les paragraphes qui suivent, seront simplement évoquées les plus importantes sans doute d'entre elles, selon mon sentiment bien sûr.

[22] Pascal le religieux absolu, dans ses Pensées [36] apologétiques, ne définit pas ici ce qu'il entend par « principes ». Y rangerait-il les « idées-mères », assurément (voir la note précédente 17) ? À propos de ces principes, il en dit ceci: « J'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte quatre, reste zéro; les premiers principes ont trop d'évidence pour nous; » Compte tenu de la familiarité que bien des enfants ont aujourd'hui avec les nombres négatifs, contrairement apparemment à Pascal, quel serait son discours ? Il dit ailleurs: « Les uns tirent bien les conséquences de peu de principes: et c'est une droiture de sens….Il y a donc deux sortes d'esprit: l'une, de pénétrer vivement et profondément les conséquences des principes, et c'est là l'esprit de justesse; l'autre, de comprendre un grand nombre de principes sans les confondre, et c'est là l'esprit de géométrie. L'un est force et droiture d'esprit; l'autre amplitude d'esprit. Or, l'un peut bien être sans l'autre, l'esprit pouvant être fort et étroit, et pouvant être aussi ample et faible. » La suite du texte sur la distinction entre esprit de géométrie et esprit de finesse, ce pourrait être entre deux types de mathématiciens, un classique de l'analyse du fonctionnement mental, est trop longue pour être reprise ici. Dans ce second discours, vu du point de vue du mathématicien, « principe » fait plutôt figure de théorème, proposition.

Il peut être utile au préalable, et à titre d'exemple, d'essayer de reconstituer le cheminement intellectuel qui a pu conduire à faite naître et à développer le penchant pour ces idées. La matière de l'enseignement dispensé pendant les premières années du lycée a joué un rôle déterminant. Le latin, les mathématiques et l'histoire m'ont fortement marqué. La solide construction de la phrase latine structurait l'esprit. Son interprétation soulevait parfois des difficultés d'ordre divers, elle obligeait à réfléchir et à comprendre. Les mathématiques de leur côté apportaient la quiétude de l'explication simple; elles entretenaient et fortifiaient l'habitude de la recherche de cette explication; elles entretenaient la satisfaction qu'apporte la résolution d'une énigme. L'histoire, quelque peu proche du conte et du récit évocateur, avait son côté attirant, divertissant et interrogateur. J'y trouvais plaisir à m'interroger sur les causes des évènements et des actions des hommes. Il y avait peut-être, dans ce penchant, la marque du legs biologique et intellectuel de mes aïeux, pratiquant la réflexion sur la société humaine, ses tribulations et ses efforts pour se maintenir à travers l'espace et le temps. Tel est le fonds du judaïsme, et sans doute, mais ressenti de manière moins pénétrante, celui de diverses autres religions.

Le résultat de cette formation, modelant une physiologie encore immature et un jeune passé psychologique dont les contours seraient à préciser, a été cette tendance constante à rechercher des explications plus ou moins plausibles aux diverses difficultés et situations que j'ai pu, comme tout un chacun, rencontrer.

C'est donc naturellement vers les données premières à partir desquelles se développent les différents schémas d'explication et de compréhension que s'est portée finalement et principalement mon attention[23].

L'exemple des savants du passé — certains d'entre eux davantage considérés et désignés aujourd'hui comme des philosophes — les données qu'ils ont avancées, l'observation parfois quelque peu personnelle du contenu des mathématiques, mes propres sentiments, ont forgé le corpus de données premières auxquelles j'ai tendance à me référer. Je les tiens bien sûr pour des hypothèses solides, mais pour des hypothèses avant tout, et donc réfutables.

3.3.2 La recherche de vue synthétiques: les idées simples ou idées-mères

L'histoire des sciences montre qu'une idée qui paraissait simple à une date donnée possède, bien des années ou des siècles plus tard, un contenu sémantique beaucoup plus étendu. Aucune analyse ne sera entreprise ici des divers mécanismes qui peuvent conduire à l'enrichissement d'un corpus d'Idées simples, au déploiement d'une Idée particulière

[23] Extrait de Modélisation, p. 19: « En tronquant la réalité, le modéliste n'en retient que quelques propriétés. Parce que le modèle est plus pauvre que cette réalité, on se meut avec aisance dans cet univers allégé, on en pénètre avec moins de peine les secrets. Mais si ces secrets ont force de réalité, c'est bien par suite de leur imposante stabilité. On peut alors songer à établir toute une hiérarchie de propriétés; les plus archétypes d'entre elles affirment leur primauté sur les propriétés secondes. On en déduit une méthodologie: rechercher et étudier les propriétés premières, examiner la force de leur impact sur la vie de l'objet, la façon dont elles se conjuguent pour donner à l'objet son visage particulier. »

considérée comme simple en un faisceau d'Idées secondes ayant elles-mêmes des propriétés apparentes de simplicité. En somme une Idée simple est exprimée par un terme générique, un mot-valise auraient dit les surréalistes.

Des éléments d'un corpus de telles Idées simples apparaissent dans différents écrits, par exemple dans [6], [7], [8], [11]. Il conviendrait certes de reprendre l'ensemble de ces données au sein d'un texte détaillé et plus étoffé. L'ensemble des mots-clé les plus importants contiendrait d'abord ces trois termes: stabilité, énergie et mouvement, auxquels sont liés, entre autres, ceux d'extension, de singularité, d'extrémalité[24], de régulation, de bifurcation. On observera que l'une des formes apparente et essentielle d'incarnation de l'énergie – l' « âme » au sens de Platon (cf Les Lois, X 896) devenue le « moteur » chez Aristote – est le mouvement dans la mesure où les différents types de champs qui dirigent le mouvement dérivent de formes adéquates de manifestations du phénomène énergétique.

Les termes précédents relèvent de l'observation du monde physique. Les propriétés fondamentales de celui-ci, étonnamment extrêmement stables, robustes, se déploient dans les règnes successifs selon des relations de causalité, elles-mêmes stables, analogues à celles présentes dans le monde physique sous-jacent. Ce qui a pour conséquence la pertinence et le succès de l'emploi des mathématiques pour la représentation et l'analyse des comportements dans ces différents règnes, les mathématiques désignant un ensemble de codages et de formalisations d'états observés, leurs relations, appartenant au départ essentiellement au monde physique.

La stabilité

C'est là une notion pivot, érigée en quelque sorte en axiome, en principe proprement métaphysique, associée à des potentialités explicatives exceptionnelles.

Ce principe, Platon est, je crois, le premier à l'avoir énoncé:

> Car c'est encore ici, comme précédemment, le même principe d'après lequel la nature mortelle cherche toujours, autant qu'elle le peut, la perpétuité et l'immortalité, mais elle ne le peut que par la génération (Banquet 207 d).

Je lui donne aujourd'hui cette formulation rapide plus générale: «Tout objet s'efforce de préserver son «Moi», à travers l'espace et à travers le temps». Un «Moi» entre guillemets, difficile à définir sinon comme une singularité qui peut se déployer différemment à travers l'espace et au cours du temps (ces dernières lignes sont extraites de l'ouvrage intitulé *Energie et Stabilité* [11]).

---

[24]Je ne reprendrai pas ici le paragraphe consacré dans [7] à la présentation de cette notion et que l'on pourrait bien davantage développer sous différents angles. On relira par exemple les écrits de Pascal pour mieux se rendre compte de l'imprégnation de cette notion dans le mode de fonctionnement de sa pensée. M. Gondran, qui n'est pas superficiel et travaillait alors sur les graphes et l'optimisation en nombres entiers et m'avait rencontré, utilisa l'idée pour créer les premiers éléments de ce qu'on nomme aujourd'hui la « géométrie tropicale ». Sur l'origine de l'apparition et de l'emploi de cet terme, consulter la page 2 de Extrémalité, texte de 1972 très probablement.

Le mouvement

Il n'y a pas de mouvement sans transformation. La transformation est mouvement. Mouvement et transformation concernent des objets. Transformation possible sous la forme d'un simple déplacement spatio-temporel, c'est la notion de mouvement au sens classique, sous la forme également de modifications de l'environnement de l'objet, également encore de ses propriétés internes.

L'une des activités importantes des mathématiques consiste en l'étude de ces transformations. Elles sont représentées par différents modèles, issus dans un premier temps de l'observation du monde physique. Nos intuitions, nos idées a priori façonnées par les savoirs appris ont naturellement tendance à nous aveugler parfois sur la pertinence d'emploi de ces modèles, à nous détourner d'une forme de prudence dans leur emploi.

La présence du mouvement spatio-temporel et du devenir est constante dans les écrits de Platon. Il ne répond pas aux questions: quelles peuvent être les causes des différentes types de mouvement,[25] peut-on les classer, les représenter physiquement ou abstraitement ?

Sur le problème posé par la classification des mouvements spatio-temporels, les seuls qu'il envisage, il apporte une première clarification, issue de l'observation quotidienne du comportement du monde physique: il donne une place centrale au mouvement circulaire. Il lui adjoint ensuite les mouvements locaux de translation dans les six directions (vers le haut, le bas, devant, derrière, à droite, à gauche[26]). À la lecture de ses écrits, on voit que, s'il ne l'énonce pas explicitement de manière formelle, le fait que le mouvement général se compose de mouvements de rotation et de translation est très présent dans son esprit. Son élève Aristote, au début du chapitre 9 du livre VIII de sa Physique, formulera cette observation de manière plus explicite: « Toute translation (transport est une autre traduction en français du terme grec) est […] ou circulaire, ou rectilignes ou mixte». Plus de 2000 ans après le Stagirite, il reviendra au mathématicien Joseph Liouville (1809-1882) d'énoncer le théorème général: quelle que soit la dimension de l'espace considéré, tout mouvement spatio-temporel local est la composée de mouvements locaux de translation et de rotation.

C'est dans cet ordre d'idées que se situe une contribution de nature « philosophique » et pratique, plaçant l'énoncé de Liouville dans un cadre plus général. Le fait de donner à une problématique une signification plus générale, relève du processus d'extension intellectuelle qui sera évoqué dans le prochain paragraphe.

---

[25] Le recours si fréquent et populaire au divin n'est qu'une fuite en avant. Il révèle à quel point l'être humain a besoin d'être rassuré par la connaissance d'explications plausibles à tout ce qu'il rencontre et lui advient.

[26] Cf par exemple Timée (33a-33-c): « Il lui attribua un mouvement approprié à son corps, celui des sept mouvements qui s'ajustent le mieux à l'intelligence et à la pensé. En conséquence, il le fit tourner uniformément sur lui-même à la même place et c'est le mouvement circulaire qu'il lui imposa; pour les autres mouvements, il les lui interdit … » et les Lois (V, 747a): « … dans les mouvements, tant ceux qui ont lieu selon la trajectoire rectiligne de la translation ascendante ou descendante, que ceux de la révolution circulaire. »

Tenant compte du fait que le mouvement de rotation s'inscrit a priori dans un champ de type conservatif, alors qu'un mouvement de translation s'effectue plutôt présent au sein d'un champ de type gradient, il m'est apparu, qu'en dimension 2 au moins, tout champ de vecteurs pouvait se décomposer globalement en la somme d'un champ de vecteurs conservatif et d'un champ de vecteurs gradients[27].

J'aurais bien sûr souhaité que cette propriété de décomposition soit globalement vraie en toute dimension[28]. Il est simplement facile de voir qu'en toute dimension, la propriété n'est vraie que localement: on a ici le pendant du théorème de Liouville.

La question se pose de l'intérêt d'une telle décomposition. Elle ne concerne pas seulement le déplacement spatio-temporel. Car la notion de champ a une vocation très large: ses éléments sont associés à des propriétés locales de transformation d'un milieu qui peut être quelconque. La décomposition établie ou souhaitée correspond-elle alors, par exemple, à une propriété toujours véridique du monde physique, en particulier au niveau de ce qui nous paraît être l'infiniment petit ?

L'extension

Relevant entre autres du mouvement, mais d'abord de la nécessité du maintien spatio-temporel, l'extension est un phénomène naturel largement répandu sinon universel, en tout cas inscrit dans la nature de tout être vivant, et qui prend des formes d'expression diverse, sinon perverse quand il devient excessif. Il affecte aussi bien le domaine matériel que le domaine intellectuel. Il s'agit du processus d'élargissement, de développement, d'expansion, d'acquisition notamment d'un domaine spatio-temporel, qui peut prendre le simple aspect du désir, mais aussi celui de l'accaparement sous toutes ses formes et à tous les niveaux, i.e. parfois inconsidéré. Il est lié au mouvement puisqu'il s'accomplit dans la durée.

Il n'est pas d'étude véritable sur le fonctionnement des mécanismes d'extension. Ils sont évidemment d'apparence très variée selon le domaine dans lequel le phénomène apparaît. Sur le plan intellectuel, il a pour mise en œuvre la comparaison subliminale entre situations qui présentent des points communs. Ce mécanisme de comparaison interne s'extériorise souvent sous la forme de déclarations d'analogies. L'énoncé de l'idée simple, de l'idée mère traduit la présence du fait le plus essentiel commun à ces situations.

La présence du phénomène d'extension est apparue clairement en mathématiques lorsque a été examiné le problème de la construction de certains nombres, lorsque, pour étudier cette question, ont été introduits la notion explicite et le terme d'extension par

---

[27] Ma démonstration est proche de la réalité physique (cf Interaction between conservative and gradient-like systems, *Hadronic Journal*, 5, 1982, 1748-1753). Cet énoncé a été transmis par R.Thom à J.Roels qui en a donné une démonstration plus sophistiquée (voir le dossier détaillé: Sur la décomposition des champs de vecteurs).

[28] La décomposition des formes différentielles par De Rham, en somme de formes fermées, harmoniques et co-fermées, suggérerait la fausseté de la conjecture. La forme différentielle harmonique qui apparaît dans cette décomposition correspondrait à l'obstruction à la décomposition des champs de vecteurs en champs conservatif et champs de gradients. Reste à savoir dans quelle mesure une telle forme harmonique n'est pas elle-même, au moins localement, une combinaison subtile à établir de formes fermées et cofermées.

Kummer, au milieu du XIX ème siècle. Le processus est a priori local. Il se comprend très bien à la lumière du principe de stabilité: pour y satisfaire au mieux, chaque objet vise à acquérir les meilleures potentialités énergétiques, à élargir ses potentialités d'action de reconnaissance, d'acquisition et de préservation des ressources nécessaires à sa survie dans des conditions si possibles optimales compte tenu des données environnementales locales.

C'est ce principe moteur d'extension que l'on retrouve dans mes articles consacrés à la construction d'objets fondamentaux: certaines classes de nombres, les matroïdes, les polygones, ce dernier terme étant pris dans un sens beaucoup plus général que l'ordinaire, pouvant par exemple être remplacé par celui de variété à coins, ou bien par exemple par celui de cône, terme également pris dans un sens plus général que l'ordinaire: l'extension peut concerner aussi le contenu sémantique de certains termes.

Le nombre partage avec la ligne ce privilège d'être les deux tout premiers objets mathématiques. Et c'est peut-être à lui que revient la palme du plus grand nombre de discours philosophiques consacrés au contenu des mathématiques. En matière de nombre en particulier, l'histoire ne commence pas avec l'homme puisque chat, chevaux et pigeons, pour ne citer qu'eux, savent quelque peu compter. On ne peut donc faire ici, dans un commentaire « philosophique », l'injure de l'oublier.

En matière de nombres, la méthode de création par extension a l'avantage de rendre naturelle et immédiatement compréhensible l'existence de nombres nouveaux. Elle est donc d'un intérêt pédagogique certain. Elle s'applique aux nombres les plus communs et permet de justifier[29] très simplement les différentes règles employées dans la manipulation des fractions et qui déroutent parfois les jeunes élèves. Le traitement est ici formel, mécanique, ludique. Il peut, cependant, ne présenter aucun intérêt voire rebuter le jeune esprit qui vit, qui baigne dans le concret : il n'apporte rien à la compréhension de la signification de ce qu'est un nombre.

L'adhésion de l'élève sera autre, plus spontanée et surtout plus ancrée, s'il découvre que le nombre possède une signification liée à sa nature propre, à sa nature profonde[30].

---

[29] Voir par exemple pages 29-31: Sur la construction des nombres Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiellonskiego,17, 1975, 25-32; et Lettre de J.Leray Mathématiques pour Elèves-Instituteurs, Publ. Math. Univ. Paris 12,1982 (ISSN 00762-0012/02)

[30] Une remarque personnelle mais qui pourrait avoir un intérêt d'ordre général. J'ai toujours eu besoin de rattacher aux éléments du monde réel les données mathématiques que l'on m'enseignait ou que je découvrais par mes lectures. Dans les cas contraires, ces données mathématiques ne faisant pas sens pour moi, j'ai souvent éprouvé des difficultés à les assimiler convenablement - mais une fois bien ancrées, j'avais l'impression de les avoir mieux comprises que d'autres. (Ces difficultés m'ont valu cet échec qui m'a marqué. Au cours du premier trimestre, en quatrième, on nous a enseigné les premiers rudiments d'algèbre à travers l'addition des fractions. Je fus incapable de bien utiliser les recettes alors non expliquées. Après l'énoncé des résultats de la composition trimestrielle, je sortis de la salle de classe et pleurai. Le professeur Nimbus, tel était mon surnom, était avant-dernier, seul dans la cour. Le trimestre suivant, l'épreuve fut de géométrie. Après l'annonce des résultats, je fus entouré sur trois rangs au moins. À douze ans et demi, je venais de faire ma première expérience des hommes). Bien d'autres personnes probablement ont éprouvé à l'égard du contenu de certaines parties des mathématiques une forme d'incompréhension analogue, parce que leur contenu ne fait pas, de manière immédiate, sens pour eux. De là vient sans doute le fait que, faute d'une pédagogie adaptée, beaucoup se détournent des mathématiques. On rapprochera d'ailleurs ce

On pourra certes mettre en avant que l'énoncé d'un nombre signifie d'abord une présence d'objets, que cette présence est significative justement par la quantité d'objets présents: on est alors devant la conception cardinale du nombre, elle ressort ici de l'inanimé. On peut alors utiliser cette propriété cardinale du nombre pour classer, pour ordonner, c'est la vertu ordinale du nombre. Le fait temporel pointe ici le bout du nez dans la mesure où il est associé au processus de classification.

Apparaît à ce propos un point de l'histoire de la pensée et des mathématiques, et qui, par son importance, pèse sur le choix des domaines d'activité, en somme dans sa philosophie au sens large du terme. Dans le passé lointain, les sociétés et la nature dans son ensemble semblaient figées dans leur structure et dans leur mode de fonctionnement au cours de la vie des individus. Tout au plus observait-on la présence de cycles au sein de ces structures. La prise de conscience de la présence et de l'importance du mouvement fut tardive. Aristote, pour la première fois dans la littérature connue de nous, la formule sous la forme suivante : « l'inanimé précède l'animé ». Il fallut attendre le XVII-ème siècle pour que les mathématiciens commencent à maîtriser l'animé, c'est-à-dire le mouvement.

Jusqu'à présent, on développait à travers l'enseignement une conception statique du nombre. Or on peut inscrire ce nombre dans l'animé, dans l'activité corporelle. Il prend alors la signification d'un mouvement[31], ce qui conduit à une nouvelle vision du nombre. Un nombre, dans un sens plus général que l'habituel, est la représentation codée d'un mouvement local dans un espace de dimension quelconque, c'est-à-dire, localement, le composé de rotations locales et de translations locales comme l'avaient compris Platon et Aristote, comme l'énonçait Liouville, translations locales conçues comme le résultat, l'expression de dilatations locales, a priori dans diverses directions. Dans la pratique euclidienne ordinaire, cette représentation apparaîtra sous forme d'une matrice dont chaque élément est figuré par des symboles, des lettres ou des chiffres habituels. Bien sûr, on peut concevoir des généralisations de cette première extension de la notion de nombre en considérant des transformations moins élémentaires que les dilatations.

La considération d'une suite de nombres tendant vers une limite a abouti en 1918 à établir la notion de voisinage en mathématique. Le vocabulaire employé par les mathématiciens révèle l'arrière-plan physique et social de cette notion: elle appartient au monde sensible auquel elle est attachée. On reliera ce fait à cette étude toute récente parue dans *Brain and Behaviour:* "Regardless of whether [the authors'] evidence really

---

témoignage de celui de Grothendieck: « En tous cas, toute ma vie j'ai été incapable de lire un texte mathématique, si anodin ou simpliste soit-il, lorsque je n'arrive pas à donner à ce texte un "sens" en termes de mon expérience des choses mathématiques, c'est-à-dire lorsque ce texte ne suscite pas en moi des images mentales, des intuitions qui lui donneraient la vie, comme une chair vivante de muscles et d'organes donne vie à un corps, qui sans elle se réduirait à un squelette. Cette incapacité me distingue d'ailleurs de la plupart de mes collègues mathématiciens, et (comme j'ai eu l'occasion de l'évoquer) c'est elle qui m'a souvent rendu difficile de m'insérer dans le travail collectif au sein du groupe Bourbaki, pendant les lectures en commun notamment, où il m'arrivait souvent d'être largué à longueur d'heures alors que tous les autres suivaient à l'aise. » La différence entre les deux attitudes mentales tient à la nature des objets par lesquels s'établit le sens, objets en quelque sorte physique pour moi, mathématiques pour Grothendieck.

[31] Du nouveau du côté des nombres, Quadrature, 66, 2007, 8-14.

supports a nativist claim or not, their data are another important piece of the puzzle to show that even young infants associate space and number." [41].

Les voisinages les plus naturels à prendre en considération sont des voisinages en forme de boules, semblables à notre planète Terre, ce qui a renforcé l'intérêt des mathématiciens pour les boules, et pour les sphères qui en sont les bords. Les mathématiciens ont en quelque sorte utilisé la « philosophie » de la boule pour construire leurs objets spatiaux: un tel objet est vu comme un assemblage de boules. Sphères et boules apparaissent dans un premier temps, comme à nos yeux dans la nature, comme des objets primordiaux.

Je me suis donc intéressé au mode de génération de ces sphères, dans une perspective dynamique, procédant dans un premier temps à des rotations [8].

La sphère géométrique de dimension zéro et de rayon nulle est le point, celle de dimension 1 dans le plan est le cercle, qu'on appelle aussi un 1-tore géométrique. Le point est une trajectoire évidemment très particulière, celle d'un mouvement localement figé. Le cercle, plus « vivant », est la trajectoire d'un coureur à pied autour d'un stade circulaire, un peu celle supposée bien circulaire de la terre autour du soleil.

Mais l'observation du ciel nous montre la présence d'autres objets, comme les anneaux autour de Saturne. Les anneaux, quels qu'ils soient, sont appelés des (2-)tores. Il se trouve que, sur le plan mathématique tout au moins, toutes les sphères peuvent « naturellement » se construire[32] à partir de tores ! D'où ce problème « philosophique »: lequel des deux serait premier, le plus important, la sphère ou le tore ? L'examen de la notion de singularité pourrait enrichir la discussion.[33]

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. ANDRÉ Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes), Panoramas et Synthèses, N°17, Soc. Math. France, 2016.
[2] G. BACHELARD Le nouvel esprit scientifique, Puf, Paris, 1975.
[3] E. BARBIN-M. CAVEING Les Philosophes et les Mathématiques, Ellispes, Paris, 1996.
[4] N. BOURBAKI Éléments d'Histoire des Mathématiques, Hermann, Paris, 1969.
[5] L. BRUNSCHWIG Les étapes de La Philosophie Mathématique, Blanchard, Paris, 1981.

[32] Se rendre à nouveau sur Du nouveau du côté des nombres, Quadrature, 66, 2007, 8-14.

[33] Cet article a été rédigé en Novembre-Décembre 2017. On peut le compléter par la lecture de la fin du texte de la conférence que j'ai faite à la Mairie du Ve arrondissement lors de la dernière exposition Mathématiques et Arts: *Sur l'incarnation des Idées-Mères dans les Œuvres d'Art* http://arpam.free.fr/IIOA.pdf où je montre comment, par métamorphose, on peut passer d'une géométrie à une autre entre les trois géométries classiques: celle de la sphère, celle du tore, celle de la pseudo-sphère. Enfin, j'ai écouté ce 8 juin, dans le cadre d'une réunion de l'Association des Amis d'Évariste Galois, une conférence de Charles Alunni intitulée: « Galois philosophe ». Il s'agit de son article à paraître dans la Revue de Synthèse sur le contenu plutôt riche et dense de la composition de philosophie rédigée par Galois lors de son concours à l'Ecole Normale. Galois y met brièvement en avant la recherche et l'exposition en somme d'idées-mères.

[6] C.P. BRUTER *Mathématiques et Arts, Deux Conférences, Première Partie,* Scripta Philosophiae Naturalis, 11 Janvier 2017, 1-27 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences1.pdf). *Seconde Partie,* Scripta Philosophiae Naturalis, N°12, Juillet-Décembre 2017, 1-12 (https://scriptaphilosophiaenaturalis.files.wordpress.com/2017/06/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences-2c3a8me-partie.pdf).
[7] C.P. BRUTER Sur la Nature des Mathématiques, Gautier-Villars, Paris, 1973.
[8] ——— Topologie et Perception, tome 1, Maloine, Paris 1985 (Seconde édition).
[9] ——— Topologie et Perception, tome 3, Maloine, Paris 1986.
[10] ——— De l'Intuition à la Controverse, Blanchard, Paris, 1987.
[11] ——— Energie et Stabilité, Editions Universitaires Européennes, 2017 (voir ESC)
[12] ——— Quelques aspects de la percepto-linguistique, T.A Informations, 1972, 2, 1- 4.
[13]. ——— Les Architectures du Feu, Considérations sur les modèles, Flammarion, Paris, 1982.
[14] E. CARTAN Notice sur les travaux scientifique, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
[15] L. CARNOT Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal, Blanchard, Paris 1970.
[16] G. CHÂTELET Les enjeux du mobile, Mathématique, physique, philosophie, Ed. Du Seuil, Paris, 1993.
[17] L. COUTURAT Les Principes des Mathématiques, Blanchard, paris, 1980.
[18] S. DALI Dans Les mandalas de Dali, interview par Jean-François Fogiel et Jean-Louis Hue, Le Sauvage, Octobre 1976, 92-103. (Cette revue n'existe plus).
[19] A. DENJOY Hommes, formes et le nombre, Blanchard, Paris, 1964.
20] A. DENJOY Evocation de l'homme et de l'œuvre, Astérisque 28-29, Soc. Math. France, Paris, 1975.
[21] B.I. DUNDAS-C.SKAU Interview with Nobel laureate Yves Meyer, Newsletter of the European Math. Soc. N°105, Sept. 2017, 14-22.
[22] M. EDWARDS Ombres de lune, Espaces 34, Montpellier, 2011.
[23] A. EINSTEIN Correspondance avec Michele Besso, 1903-1955, Hermann, Paris, 1972.
[24] M. ESPINOZA Les Mathématiques et le monde sensible, Ellipses, Paris, 1997.
[25] F. FLEIN Riemann et son influence sur les mathématiques modernes in RIEMANN Œuvres Mathématiques Blanchard, Paris, 1968, pp. xiii-xxxv.
[26]M. FRECHET Les Mathématiques et le Concret, PUF, Paris, 1955.
[27] G. FREGE Les fondements de l'arithmétique, Ed. Du Seuil, Paris 1969.
[28] F. GAUSS Recherches Arithmétiques, Blanchard, Paris, 1979.
[29] F. GONSETH Les Mathématiques et la Réalité, Blanchard, 1974.
[30] A. GROTHENDIECK Semailles et Moissons http://matematicas.unex.es/~navarro/res/yinyang.pdf .
[32] J. HADAMARD Essai sur le psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, Blanchard, Paris, 1959.
[33] E. HUSSERL Philosophie de l'arithmétique, PUF, Paris, 1972.
[34] ——— L'origine de la géométrie, PUF, Paris, 1962.
[35] A. LAUTMANN Essai sur l'Unité des Mathématiques, UGE, Paris, 1977.
[36] F. LE LIONNAIS. Les grands Courants de la Pensée Mathématique, Blanchard, Paris, 1962.
[37] PASCAL Pensées, Editions du Rocher, Monaco, 1961.
[38] É.PICARD Sur le Développement de l'Analyse et ses Rapports avec diverses Sciences, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
[39] H. POINCARÉ La valeur de la Science. Flammarion, Paris, 1970.
[40] ——— La Science et l'Hypothèse, Flammarion, Paris, 1968.
[41] M.PRICE Newborn Babies know their Numbers, Science Daily News, 7.12 2017.
[42] B. RUSSELL Introduction à la philosophie mathématique, Payot, Paris 1970.

[43] P. VESPERINI. Lucrèce, Fayard, Paris, 2017.
[44] A. WEIL L'avenir des Mathématiques, in LE LIONNAIS Les grands courants de la pensée mathématique, Blanchard, Paris, 1962, pp. 307-320.
[45] ——— Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton University Press, Woodstock, 2009.
[46] A. ZORICH Maryam Mirzakhani, Gazette de la SMF, 154, 20217, 77-80.

* * *

Claude P. BRUTER
Université Paris-Est Créteil Val de Marne
bruter@u-pec.fr