REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

doi.org/10.37001/remat25269062v17id272 eISSN: 2526-9062

Resolução de Problemas e Representações Semióticas na Formação Inicial de Professores de Matemática

Vânia Bolzan Denardi[1]
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS, Brasil

Eleni Bisognin[2]
Universidade Franciscana (UFN), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS, Brasil

Resumo

Este artigo apresenta resultados parciais de uma pesquisa cujo objetivo foi investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica, em uma proposta de ensino sobre o conceito de função, construída com base na resolução de problemas para professores de Matemática em formação inicial. Para tanto, adotou-se os pressupostos teóricos dos Registros de Representação Semiótica de Duval e as orientações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. O estudo foi desenvolvido em uma universidade pública, localizada no interior do estado do Rio Grande do Sul, e contou com a participação de dezesseis alunos, do primeiro semestre, do curso de Licenciatura em Matemática. A análise dos dados, os quais foram coletados por meio das produções dos alunos e das anotações no diário de campo da professora, mostrou que, apesar das dificuldades ao mobilizar o conceito de função e ao coordenar as diferentes representações semióticas deste objeto matemático, os alunos vivenciaram a experiência como participantes ativos nos processos de resolução de problemas e reconheceram a importância das representações semióticas para compreensão do conceito.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Registros de Representação Semiótica; Formação Inicial de Professores.

Problem Solving and Semiotic Representations in the Initial Training of Math Teachers

Abstract

This article presents partial results of a research whose objective was to investigate the potential of the transformations of the semiotic representation registers in a proposal of teaching about the concept of function, built based on the problem solving for teachers of Mathematics in initial

Submetido em: 02/07/2019 **Aceito em:** 29/01/2020 **Publicado em:** 01/05/2020

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana. Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria. Endereço para correspondência: Av. Pascoal Librelotto, 132, Bairro Dom Antônio Reis, 97065-290, Santa Maria, RS. E-mail: vania_denardi@hotmail.com.

[2] Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. Endereço para correspondência: Av. Presidente Vargas, 2098, ap. 301, Bairro Fátima, 97015-512, Santa Maria, RS. E-mail: eleni@unifra.br.

training. For that, the theoretical assumptions of Duval's Semiotic Representation Registers and the guidelines of Teaching-Learning-Assessment-Mathematics Methodology through Problem Solving were adopted. The study was developed in a public university, located in the interior of the state of Rio Grande do Sul, and had the participation of sixteen students from the first semester of the degree course in Mathematics. The analysis of the data, which were collected through the students' productions and the notes in the teacher's field diary, showed that, despite the difficulties in mobilizing the concept of function and in coordinating the different semiotic representations of this mathematical object, students lived experience as active participants in problem solving processes and recognized the importance of semiotic representations for understanding the concept.

Keywords: Problem Solving; Semiotic Representation Registers; Initial Teacher Training.

Resolución de Problemas y Representaciones Semióticas en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas

Resumen
Este artículo presenta resultados parciales de una investigación cuyo objetivo fue investigar el potencial de las transformaciones de los registros de representación semiótica en una propuesta de enseñanza sobre el concepto de función construida con base en la resolución de problemas para profesores de Matemáticas en formación inicial. Para tanto, se adoptaron los presupuestos teóricos de los Registros de Representación Semiótica de Duval y las orientaciones de la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de Matemáticas a través de la Resolución de Problemas. El estudio fue desarrollado en una universidad pública, ubicada en el interior del estado de Rio Grande do Sul, y contó con la participación de dieciséis alumnos, del primer semestre, del curso de Licenciatura en Matemáticas. El análisis de los datos, los cuales fueron recolectados por medio de las producciones de los alumnos y de las anotaciones en el diario de la profesora, mostró que, a pesar de las dificultades al movilizar el concepto de función y al coordinar las diferentes representaciones semióticas de este objeto matemático, los alumnos han vivido la experiencia como participantes activos en los procesos de resolución de problemas y reconocieron la importancia de las representaciones semióticas para la comprensión del concepto.

Palabras clave: Solución de problemas; Registros de Representación Semiótica; Formación Inicial de Profesores.

1. Introdução

Discussões matemáticas coletivas em sala de aula têm forte impacto na aprendizagem dos alunos, uma vez que estes são levados a realizar tarefas significativas, a apresentar as estratégias de resolução e justificar o raciocínio utilizado, a argumentar sobre as resoluções dos colegas e a sistematizar os principais conceitos resultantes da discussão (STEIN et al., 2008; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013; RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018). Contudo, o desenvolvimento deste tipo de aula é um desafio tanto para o aluno quanto para o professor, pois ambos necessitam mudar suas posturas e práticas.

Com vista a apoiar os professores no desenvolvimento de atividades de discussão em sala de aula, Stein et al. (2008) apresentam o modelo das cinco práticas – *antecipar*, *monitorizar*, *selecionar, sequenciar e estabelecer conexões* entre as respostas dos alunos. Na prática de antecipar, que decorre no planejamento da aula, o professor pensa nas diferentes estratégias de resolução e nas prováveis dificuldades dos alunos. Na prática de monitorar**,** ele analisa o trabalho dos alunos, as estratégias de resolução, as representações e as ideias matemáticas em jogo; o que contribui para a seleção das resoluções que têm potencial para serem apresentadas e comentadas em coletivo. Após a seleção das resoluções, o professor vai sequenciar as apresentações dos alunos, de forma a garantir uma discussão rica, com o estabelecimento de conexões entre ideias, e o desenvolvimento do conhecimento matemáticos dos alunos. Nesta prática, o professor pode introduzir ideias novas na discussão, como estratégias de resolução ou representações diferentes das apresentadas, com vista a tornar os conceitos matemáticos compreensíveis aos alunos (RODRIGUES; PONTE; MENEZES, 2018).

Nas discussões matemáticas, promover o envolvimento dos alunos "é uma atividade intensa para o professor, que é chamado a desempenhar diversas ações de ensino, de acordo com o momento da discussão em que os alunos se encontram e com o discurso que pretende promover" (RODRIGUES; PONTE; MENEZES, 2018, p. 3). Assim, Ponte et al. (2013) sugerem que o professor se apoie em quatro ações: as ações de convidar, que introduzem o aluno na discussão; as ações de apoiar/guiar que promovem a sua continuidade na discussão; as ações de informar/sugerir, que permitem apresentar informação e argumentos ou validar respostas; e as ações de desafiar, que levam o aluno a introduzir representações, interpretar e estabelecer conexões, a raciocinar, a argumentar e a avaliar.

Outra abordagem metodológica que tem potencial para promover discussões matemáticas coletivas é o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nas pesquisas referentes ao tema, observa-se uma tendência em considerar que a resolução de problemas deve proporcionar aos alunos a aprendizagem por descoberta, o desenvolvimento do raciocínio e de estratégias, além de colaborar com o saber pensar matematicamente e dar sentido a conceitos e propriedades matemáticas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014; SANTOS, 2014).

Segundo Allevato e Onuchic (2019), não há formas rígidas de implementar a metodologia, mas, as autoras sugerem as seguintes etapas:

> (1) proposição do problema; (2) alunos em grupo são desafiados a utilizar seus conhecimentos prévios; (3) os alunos nos grupos discutem e aprimoram sua compreensão; (4) o professor observa, incentiva e os auxilia em problemas secundários; (5) os alunos resolvem o problema; (6) os alunos registram as resoluções na lousa; (7) em plenária, discutem as resoluções obtidas; (8) professor e alunos chegam a um consenso sobre a resolução; (9) o professor formaliza o "novo" conteúdo; e (10) ocorre a proposição de novos problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019, p. 3).

Apesar dos diversos estudos já realizados e da inquestionável importância da resolução de problemas na formação escolar “a forma de incorporá-la de modo a promover uma significativa e efetiva aprendizagem ainda não está clara para os professores de Matemática” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.35). Para boa parte deles, abordar conceitos e métodos sob a perspectiva desta metodologia, ainda se limita a explicar um procedimento para resolver certo tipo de problema e fazer com que os alunos se apropriem e reproduzam o que foi explicado. Desse modo, a resolução de um problema em Matemática se apresenta como algo “estático”, restrito à identificação de uma técnica específica, não estimulando nem propiciando o desenvolvimento do pensamento matemático.

Questões pertinentes à efetiva implementação de abordagens investigativas, em sala de aula, têm relação com a formação de professores. A falta de preparo de muitos professores, que hoje estão na sala de aula, ocorre de um modo geral, devido à abordagem superficial das metodologias de ensino, durante sua formação. Nos cursos de Licenciatura, os alunos conhecem as metodologias de ensino, os principais benefícios de utilizar cada uma delas, mas, dificilmente têm a oportunidade de vivenciar, na prática, experiências que as envolvam.

Ao apresentarem propostas de mudança nas Licenciaturas, Onuchic e Allevato (2009) tiveram como base a concepção de que os professores só incorporarão à sua prática docente as abordagens metodológicas que efetivamente vivenciarem no decorrer de sua formação inicial. Essa concepção evidencia a importância de se utilizar diversificadas metodologias de ensino nos cursos de formação, a fim de que o licenciando possa enxergar outras possibilidades na sua futura atuação profissional.

Com isso em mente, buscou-se investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino sobre o conceito de função, construída com base na resolução de problemas, para professores de Matemática em formação inicial. Para tanto, foram propostos problemas envolvendo noções relacionadas a esse conceito (variação, dependência, regularidade e padrão, sequências, domínio e imagem). Tal conceito é de fundamental importância, pois apresenta diversas aplicações tanto na Matemática como em outras áreas do conhecimento. Além do mais, pesquisas na área da Educação Matemática revelam que ele se constitui em um dos conteúdos matemáticos em que os alunos, inclusive do Ensino Superior, apresentam inúmeras dificuldades (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2017; PIRES, 2014; OLÍMPIO, 2007).

O estudo foi desenvolvido no decorrer do segundo semestre de 2017 e contou com a participação de dezesseis alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Adotou-se os pressupostos teóricos dos Registros de Representação Semiótica de Duval, a Metodologia de

Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e os modelos de Stein et al. (2008) e Ponte et al. (2013).

2. Revisão de Literatura

Nos estudos acerca das dificuldades da aprendizagem em matemática, é possível contar com as contribuições do professor, filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, o qual vem realizando pesquisas em Educação Matemática, desde a década de 70, e desenvolveu a teoria intitulada Registros de Representação Semiótica.

A referida teoria é uma abordagem cognitiva que analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática e o funcionamento cognitivo peculiar dessa ciência, levando em consideração o modo de acesso aos seus objetos, a diversidade de sistemas semióticos que permitem representá-los e a necessária distinção entre o objeto matemático e a sua representação.

Segundo Duval (2009), a origem das dificuldades no ensino e na aprendizagem de Matemática decorre da dependência e diversidade das representações semióticas, que se referem a um sistema de signos, e que, no âmbito da Matemática, incluem a língua natural, os sistemas de escrita (numérica e algébrica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

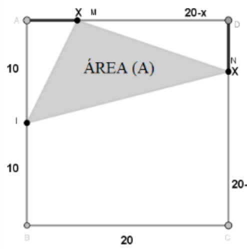
A função de uma representação semiótica vai além da comunicação, uma vez que ela permite representar objetos que somente são acessíveis por meio de representações, que podem ser confundidas com o próprio objeto. De acordo com Duval (2011), mais importante que tornar possível o acesso aos objetos está a possibilidade de transformar uma representação em outra representação semiótica. Estas transformações podem ocorrer dentro de um mesmo sistema semiótico (tratamento) ou entre registros distintos (conversão). O autor destaca que elas “constituem a dinâmica cognitiva de toda a atividade matemática” (DUVAL, 2011, p.69) e que nem todo sistema semiótico é suficiente para efetuá-las.

Para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática – aqueles que, além de comunicar, cumprem as atividades cognitivas de tratamento e conversão –, Duval (2011) escolheu o termo registro. Segundo ele, a especificidade da atividade matemática está relacionada à diversidade de registros de representação de um mesmo objeto e à possibilidade de transformação de registros. Desta forma, ele acredita que a compreensão em Matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representação para um mesmo objeto.

Em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática, Duval (2009) salienta que, no ambiente escolar, o tratamento, normalmente, é a transformação que mais se prioriza. Enfatiza, ainda, que a atividade de conversão, principalmente em seus dois sentidos, necessita ser levada em consideração, uma vez que, do ponto de vista cognitivo, é ela que garante a construção do conhecimento matemático. São nelas que as mudanças nos registros de representação se mostram mais eficazes para a formação conceitual e transformação em saberes.

Na Figura 1, apresentam-se alguns exemplos de conversões de representações, utilizadas no estudo de funções.

Registro Geométrico (RGe)



Registro Algébrico (RAl)

$$A(x)=\frac{x^2}{2}-5x+100$$

Registro Tabular (RTb)

0	100
5	87,5
10	100
15	137,5
20	200

Registro Gráfico (RGr)

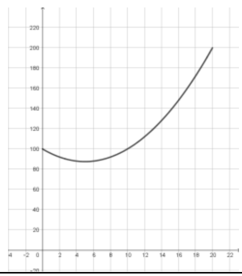


Figura 1: Exemplos de conversões de registros de representação.
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Como já destacado, as conversões são altamente importantes na atividade matemática, porque é com a abordagem do mesmo objeto através de diferentes representações, cada uma refletindo um aspecto diferente do que é representado, que torna possível compreendê-lo completamente.

Nesta pesquisa, os problemas propostos exigem do aluno o trânsito entre representações, o que não ocorre sempre do mesmo modo. O fato de o aluno ser capaz de fazer a conversão em um sentido não garante que ele fará no sentido inverso. Isso porque, a conversão enfrenta o fenômeno de congruência ou de não congruência que contribuem para os sucessos e os insucessos dos alunos na mudança de registros.

De acordo com Duval (2011), dois registros semióticos são congruentes quando: a) Existe correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; b) Cada unidade significante elementar do registro de representação de partida corresponde a uma única unidade significante elementar no registro de representação de chegada; c) Existe uma correspondência na mesma ordem de apreensão das unidades significantes em cada um dos registros envolvidos.

Quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão se faz espontaneamente. A não ocorrência dessas condições determina uma conversão não congruente. Nesse caso, não apenas o tempo de tratamento aumenta como também a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender. Como exemplo de conversão congruente cita-se a conversão do registro tabular para o registro gráfico, representada na Figura 1, e de não congruente a conversão do registro gráfico para o algébrico.

Duval (2011) afirma que boa parte das dificuldades dos alunos está relacionada à ocorrência da não congruência, levando-os a permanecer num único registro e a confundir o objeto matemático com sua representação. Nesse caso, não há acesso ao conhecimento, já que não ocorre articulação entre os registros, que, segundo o teórico, é a condição necessária para que o conhecimento se efetive.

Segundo Canavarro (2017), o uso de múltiplas representações e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações, oferece uma oportunidade ímpar para a compreensão. E mais, a profundidade da compreensão está relacionada com a força das conexões entre as representações matemáticas que os alunos tiverem interiorizado. Isto significa que não basta conhecer diferentes representações sobre uma mesma ideia. Para se ganhar compreensão, é necessário estabelecer pontes entre as diferentes representações disponíveis e interpretar umas à luz das outras.

Allevato e Onuchic (2019), ao citarem o estudo de Hodgson (1995), consideram que estudantes capazes de aplicar e transitar entre diferentes representações de uma situação-problema ou de um conceito matemático possuem um conjunto de ferramentas flexíveis e poderosas para a resolução de problemas. Nasser, Sousa e Torraca (2017) destacam que, no caso da aprendizagem de funções, a Teoria dos Registros de Representação pode ser resumida à necessidade de levar os alunos a transitar, de forma espontânea, entre os registros de representação verbal, algébrica e gráfica. Nesse trabalho, procurou-se destacar as relações estabelecidas pelos alunos ao utilizarem diferentes representações para solução dos problemas propostos.

3. Metodologia

Este artigo registra um trabalho de natureza qualitativa. A pesquisa compreendeu um estudo experimental que contou com a participação de dezesseis alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Rio Grande do Sul.

O estudo foi composto de duas etapas principais: na primeira foi aplicada uma avaliação diagnóstica, que teve como objetivo identificar os conhecimentos prévios dos licenciandos; na etapa posterior, foram propostos problemas, elaborados a partir da análise do diagnóstico, que abordaram noções relacionadas ao conceito de função. Buscou-se enfatizar o uso de diferentes representações semióticas, em atividades de resolução de problemas, com o propósito de auxiliar aos futuros professores na aquisição dessa habilidade. Neste artigo, foram selecionados três problemas e foram analisados os tratamentos e conversões nas produções dos licenciandos ao resolvê-los.

No experimento, os alunos, divididos em seis grupos, resolveram os problemas seguindo etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de

Problemas e orientações de Stein et al. (2008) e Ponte et al. (2013). A implementação ocorreu no segundo semestre de 2017 e as atividades foram desenvolvidas no período regular de aula da disciplina de Matemática Elementar. O *software* GeoGebra, por vezes, foi utilizado. Os dados foram coletados, por meio das anotações no diário de campo e da produção escrita dos grupos, designados por G1, G2,..., G6. Todos os alunos aceitaram participar da investigação e, para tanto, assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido. A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Universidade Franciscana, obtendo aprovação[3].

A seguir, são descritos os passos seguidos na segunda etapa da pesquisa:

1. Elaboração dos Problemas: a professora (pesquisadora) seleciona e/ou prepara os problemas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, pensa nas diferentes estratégias de resolução, nas prováveis dificuldades dos alunos e em como superá-las *(antecipar).*
2. Proposição dos Problemas: a professora propõe o problema e convida os alunos para participarem da atividade de resolução *(convidar);*
3. Os alunos em grupo são desafiados a utilizarem seus conhecimentos prévios *(desafiar);*
4. Os alunos discutem e aprimoram sua compreensão;
5. A professora observa, incentiva e auxilia-os na resolução de problemas secundários *(monitorar; apoiar/guiar);*
6. Alguns alunos, selecionados pela professora, registram suas resoluções na lousa *(selecionar e sequenciar);*
7. Em plenária, discutem as resoluções obtidas, com enfoque nas possíveis representações utilizadas para a resolução, enfatizando atividades de conversão de registros e conexões entre as representações ***(informar/sugerir);***
8. Professora e alunos chegam a um consenso sobre a resolução *(estabelecer conexões; desafiar);*
9. A professora formaliza o “novo” conteúdo.

Os dados coletados foram analisados à luz da Teoria dos Registros de Representação, com vista à identificação de regularidades que conduziram ao estabelecimento de categorias. As categorias elencadas, juntamente com as subcategorias, são apresentadas na Tabela 1.

[3] Parecer consubstanciado nº 1.952.634.

Tabela 1: Categorias de análise de dados.

Categorias		Subcategorias
		No Registro Figural (RFg)
Tratamentos		No Registro Algébrico (RAl)
		No Registro Gráfico (RGr)
		No Registro em Língua Natural (RLN)
		RFg→RTb →RAl
Conversões		RLN→RAl→RNm
		RTb→RGr→RAl
		RLN→RNm→RAl

Fonte: Elaborada pelas autoras.

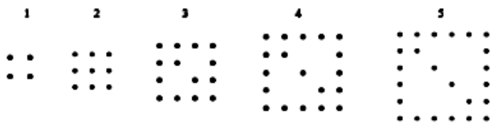
Em relação ao raciocínio matemático dos alunos, foi considerada a formulação de estratégias de resolução, conjecturas e justificativas.

4. Resultados

Abaixo, serão reproduzidos os três problemas, seguidos de suas análises.

Problema 1: Padrão em uma sequência de figuras.

Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Represente as próximas duas figuras.

b) É possível encontrar um padrão para a contagem da quantidade de pontos em cada figura? Em caso afirmativo, explique o padrão encontrado.

c) Considerando que a sequência continua com o mesmo padrão, quantos pontos terá a figura 12? E a figura 20?

d) Considerando o mesmo padrão, qual será a posição de uma figura com 89 pontos?

e) É possível determinar uma expressão algébrica para a quantidade de pontos da figura n? Explique.

f) A relação entre a quantidade de pontos e a posição das figuras representa uma função? Justifique sua resposta e, em caso afirmativo, represente-a graficamente.

O primeiro problema tem por objetivo fornecer a base necessária para a construção do conceito de função. Assim, sua resolução possibilita estabelecer conexões entre diversas noções – dependência, regularidade, padrão, generalização, variável, domínio, grandeza discreta, sequências numéricas e progressões – relacionadas a esse conceito. Possibilita também a utilização de diferentes registros de representação, por meio de tratamentos e conversões.

O problema requer que os alunos interpretem a informação apresentada no registro figural e a traduzam para o registro algébrico e deste para o gráfico. Os alunos precisam explicitar um padrão para a contagem da quantidade de pontos de uma sequência de figuras.

Definido o problema, foi realizado o trabalho de antecipação de possíveis estratégias de resolução e das prováveis dificuldades. Espera-se que, ao explorar o registro figural, os alunos percebam que a cada figura são acrescentados cinco pontos, em relação à figura anterior. Não percebendo tal fato é possível que eles apresentem dificuldades na sua resolução.

Para facilitar a visualização do padrão, os alunos poderão construir uma tabela, conversão do registro figural para tabular.

Tabela 2: Representação no registro tabular.

Posição (n)	Quantidade de pontos (a_n)
1	4
2	$4+5=9$
3	$9+5=14$
4	$14+5=19$
...	

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Assim, poderão colocar a seguinte conjectura, que facilitará a conversão para o registro algébrico:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 4\\
&a_2 = 4+5 = 4+1.5\\
&a_3 = 4+5+5 = 4+2.5\\
&a_4 = 4+5+5+5 = 4+3.5\\
&\vdots\\
&a_n = 4+(n-1).5
\end{aligned}$$

A partir dessas construções, os alunos após realizarem tratamentos algébricos poderão concluir que $a_n = 5n-1$. O procedimento descrito é uma das estratégias possíveis para a resolução do problema 1.

Os alunos poderão, ainda, reagrupar os pontos das figuras, a fim de explicitarem o padrão solicitado. Na Figura 2, apresentam-se dois exemplos de reagrupamento:

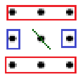
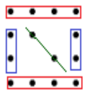
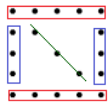
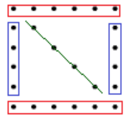
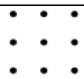
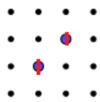
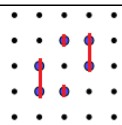
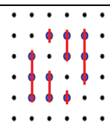
1ª modo				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
				
2.2	2.3+3.1	2.4+3.2	2.5+3.3	2.6+3.4
$2.(1+1)$	$2.(2+1)+3.(2-1)$	$2.(3+1)+3.(3-1)$	$2.(4+1)+3.(4-1)$	$2.(5+1)+3.(5-1)$
$2.(n+1)+3.(n-1)=5n-1$				
2ª modo				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
				
2^2-0	3^2-0	$4^2-2.1$	$5^2-3.2$	$6^2-4.3$
$(1+1)^2-(1-2)(1-1)$	$(2+1)^2-(2-2)(2-1)$	$(3+1)^2-(3-2)(3-1)$	$(4+1)^2-(4-2)(4-1)$	$(5+1)^2-(5-2)(5-1)$
$(n+1)^2-(n-2).(n-1)=5n-1$				

Figura 2: Possibilidades de resolução do problema 1**.**
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Acreditava-se que a maioria dos alunos utilizasse a primeira estratégia apresentada (recorrência), uma vez que a atividade cognitiva requerida neste caso é mais simples, se comparada com os demais. Além disso, era possível que os alunos encontrassem estratégias de resolução diferentes das exibidas acima. Por fim, esperava-se que eles percebessem que a quantidade de pontos das figuras é uma função da posição, cujo domínio é discreto; porém, era provável que construíssem um gráfico sem estarem atentos às implicações deste domínio.

Após a antecipação, (etapa prevista na metodologia) o problema foi proposto. A professora convidou os alunos a participarem da atividade de resolução. Em grupo, os alunos iniciaram timidamente as discussões. Observando que vários deles estavam constrangidos em evidenciar suas dificuldades, a professora solicitou que todos participassem da execução das atividades e que expusessem suas ideias e dúvidas. Aos poucos, as discussões foram se intensificando e os alunos começaram a emitir suas opiniões com mais segurança.

De um modo geral, ao analisarem as figuras eles não perceberam que a diferença entre a quantidade de pontos de duas figuras sucessivas é constante. Assim, foi necessária a interferência da professora, para que eles pudessem dar continuidade à resolução, o que ocorreu em forma de questionamentos.

Após questionamentos, o grupo G4 respondeu o item (b) utilizando o registro em língua natural. Tal grupo escreveu: “*A cada figura é acrescentado um ponto nos 4 lados e um ponto na diagonal, ou seja, a cada figura são acrescentados 5 pontos”*. Cabe destacar que este grupo foi o único, entre os seis analisados, que expressou verbalmente o padrão identificado. Os grupos G1 e G2 escreveram a sequência numérica (registro numérico) que representa a quantidade de pontos das figuras sucessivas. O grupo G5 fez uso do registro algébrico, utilizando o conceito de progressão aritmética, como é possível observar na Figura 3:

b) É possível encontrar um padrão para a contagem da quantidade de pontos em cada figura? Em caso afirmativo, explique o padrão encontrado.

$\boxed{A_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$ $r = 5$, $a_1 = 4$

Figura 3: Resolução do item (b) do problema 1, apresentada pelo grupo G5.
Fonte: Dados da pesquisa.

Já, o grupo G6 apresentou uma solução não prevista na antecipação, mas, semelhante ao primeiro modo apresentado na Figura 2, tratamento figural, como é possível observar na Figura 4:

b) É possível encontrar um padrão para a contagem da quantidade de pontos em cada figura? Em caso afirmativo, explique o padrão encontrado.

c) Considerando que a sequência continua com o mesmo padrão, quantos pontos terá a figura 12? E a figura 20?

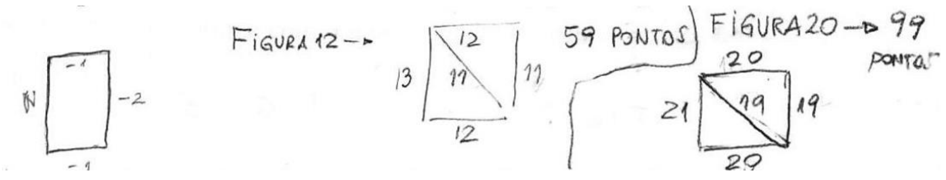


Figura 4: Resolução dos itens (b) e (c) do problema 1, apresentadas pelo grupo G6.
Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo G3, por sua vez, utilizou o registro tabular, conforme foi previsto na antecipação. Quanto aos itens (c) e (d), constatou-se que todos os grupos responderam corretamente; porém, de diferentes modos. Os dois grupos que, no item (b), apresentaram apenas a sequência numérica que representa a quantidade de pontos das figuras (G1 e G2), expandiram tal sequência até encontrarem as informações solicitadas. Os demais grupos realizaram tratamentos numéricos, conforme o modelo explicitado no item (b).

No item (e), os grupos, com exceção do G1, encontraram a expressão algébrica solicitada. Todavia, da análise das atitudes discentes durante a resolução deste problema, ficou evidente que esse item dificilmente seria resolvido sem a mobilização de um registro auxiliar (registro numérico, figural ou tabular), utilizado na resolução dos itens anteriores, o qual permitiu uma passagem mais direta para o registro algébrico. Contudo, o insucesso dos alunos seria justificado pela considerável distância cognitiva existente entre o registro figural (registro de partida) e o algébrico (registro de chegada). Segundo Duval (2011), a utilização de um registro auxiliar de transição é uma alternativa para diminuir o distanciamento cognitivo existente entre os registros.

No item (f), os grupos G2, G3 e G4 afirmaram, com diferentes palavras, que a relação entre a quantidade de pontos e a posição das figuras é uma função, pois existe um padrão definido por $y = 5x - 1$. Nesses grupos, foi possível perceber uma concepção muito limitada do conceito de função, uma vez que, para eles, a existência de uma expressão algébrica é suficiente para a ocorrência de uma função. Outros dois grupos (G5 e G6) fizeram referência a uma correspondência unívoca entre as variáveis. Além disso, deixaram indícios de que identificaram a variável dependente e independente, como pode ser observado na resposta apresentada na Figura 5.

f) A relação entre a quantidade de pontos e a posição das figuras representa uma função? Justifique sua resposta e, em caso afirmativo, represente-a graficamente.

$f(p) = N$

$P \rightarrow N$

Sim. Pois, para cada posição da figura na sequência existe apenas 1 quantidade de pontos.

Figura 5: Resolução do item (f) do problema 1 apresentada pelo grupo G6.
Fonte: Dados da pesquisa.

A escrita apresentada na Figura 5 revela uma melhor compreensão do objeto função, se comparada com a primeira justificativa citada. Apesar disso, não é satisfatória o bastante, pois não mencionam os conjuntos domínio e contradomínio, elementos estes fundamentais na definição de função. Na representação gráfica da função, nenhum grupo teve sucesso. Os alunos demonstraram não saber que quando o domínio de uma função é discreto seu gráfico não pode ser representado por traços contínuos. A pouca exploração do traçado de gráficos de funções com domínio discreto, nas situações de ensino, possivelmente contribuiu para este resultado.

Decorrido o tempo concedido para a resolução, dando continuidade ao trabalho, o problema foi colocado em discussão no grande grupo. Quatro grupos, selecionados durante o monitoramento, foram convidados a registrar, no quadro, suas resoluções. Na Figura 6, transcreve-se parte do que foi registrado.

<table>
<tr><th>G1</th><th>G3</th><th>G6</th><th>G5</th></tr>
<tr>
<td>4,9,14,19,24,
29,34,39,44,49,
54,59,64,69,74,
79,84,89,94,99

Figura 12: 59 pontos
Figura 20: 99 pontos
Figura 18: 89 pontos</td>
<td>
<table>
<tr><th>Figura</th><th>Quantidade de pontos</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$4+5=9$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$4+5+5=14$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$4+5+5+5=19$</td></tr>
<tr><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td>$4+(n-1).5$</td></tr>
</table>
</td>
<td>Figura 12: Figura 20:

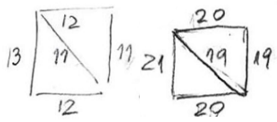



Figura n:
$2n+2(n-1)+n+1$</td>
<td>$a_n = a_1 + (n-1).r$
$r=5$
$a_1 = 4$

Logo:
$a_n = 4+(n-1).5$
$a_n = 5n-1$</td>
</tr>
</table>

Figura 6: Registro no quadro, referente ao problema 1.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com as resoluções no quadro, a professora iniciou a plenária perguntando aos alunos qual das expressões algébricas estava correta. Os alunos simplificaram as expressões chegando à conclusão de que elas eram equivalentes. Nesse momento, um participante do grupo G1 colocou que eles haviam percebido que a cada figura eram acrescentados 5 pontos, mas que a representação utilizada, por eles, não favoreceu o reconhecimento da expressão. A professora aproveitou a ocasião para destacar que na resolução de problemas existem, por vezes, registros auxiliares que permitem o acesso mais fácil à solução. A discussão permitiu que os alunos compreendessem a importância das diferentes representações para um mesmo objeto matemático.

Em seguida, os alunos foram envolvidos numa discussão em relação ao conceito de função, que foi muito produtiva, uma vez que permitiu a eles uma nova maneira de conceber esse conceito. A partir dela, o conceito de função passou a ser olhado como uma transformação, como uma dependência entre grandezas, e não apenas como uma expressão algébrica. Além do mais, os alunos passaram a entender que quando o domínio de uma função é discreto seu gráfico não pode ser representado por traços contínuos. Por fim, foi realizada a formalização das noções abordadas no problema.

Problema[4] 2: População de uma espécie.

A tabela fornece a população, em uma área montanhosa, de certa espécie animal, em milhões, durante seis anos consecutivos. A informação referente ao ano de 2005 foi apagada, por engano.

2000	2001	2002	2003	2004	2005
4	4,8	5,76	6,91	8,29	

a) Com os dados da tabela, é possível estimar a informação que foi apagada? Explique sua resposta.

b) Assumindo que a forma de crescimento desta população se mantém, é possível encontrar um modelo para estimar o número de habitantes que havia no ano de 2010 e para predizer a população de tal espécie em 2020? Mostre

[4] Atividade adaptada de Jurado (2010).

como chegou à sua resposta.

c) A variação percentual de uma população, dados dois anos quaisquer, se obtém por meio do cálculo de $\frac{valor\ final - valor\ inicial}{valor\ inicial}.100\%$. Considerando como valor inicial a população de um ano t qualquer e como valor final a população h anos depois, é possível determinar um modelo matemático que expressa a variação percentual da população em questão? Qual é a variação percentual anual desta espécie? E a cada 3 anos, qual será a variação percentual da população?

d) Estabeleça uma relação entre os resultados do item anterior e o modelo funcional que você encontrou em (b).

O problema 2 visa a caracterização da função exponencial e o reconhecimento desta como uma função que possui uma taxa de variação percentual constante. Seu principal registro de partida é o tabular e seu processo de resolução envolve, principalmente, os registros algébrico, numérico e de língua natural.

Selecionado o problema, iniciou-se o trabalho de antecipação. Nesse momento, fez-se a previsão de que o aluno poderia responder o item (a), multiplicando a população de 2004 por 1,2. Para isso, ele precisaria perceber que os quocientes entre as populações de dois anos consecutivos são aproximadamente iguais a 1,2. Acreditava-se que, num primeiro momento, eles tentassem modelar a situação por meio de uma função afim e/ou quadrática; mas que depois de alguns cálculos se convenceriam de que isso não era possível.

Após a resolução do primeiro item, esperava-se que os alunos escrevessem a função exponencial $P(t)=4(1,2)^t$ que modela os dados da tabela, com a qual poderiam estimar o número de animais que havia em 2010 e predizer a população para 2020. Em (c), era possível que surgissem dificuldades, tanto na conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, advindas do distanciamento cognitivo existente entre eles, quanto na realização dos tratamentos algébricos necessários para responder à questão. Na Figura 7, apresenta-se a estratégia de resolução prevista pela professora.

- $P(t)=4(1,2)^t$, população de um ano t qualquer.
- $P(t)=4(1,2)^{t+h}$, população h anos depois.
- Expressão que determina a variação percentual da população:

$$\frac{valor\ final - valor\ inicial}{valor\ inicial}.100\% = \frac{4(1,2)^{t+h}-4(1,2)^t}{4(1,2)^t}.100\% == \frac{4(1,2)^t\left[(1,2)^h-1\right]}{4(1,2)^t}.100\% = \left[(1,2)^h-1\right].100\%$$

- Variação percentual anual ($h=1$): $\left[(1,2)^1-1\right].100\%=20\%$
- Variação percentual da população a cada 3 anos ($h=3$): $\left[(1,2)^3-1\right].100\%=72,8\%$

Figura 7: Resolução do item (c) do problema 2.
Fonte: Elaborada pelas autoras.

A intenção, ao solicitar a expressão que determina a variação percentual da população, foi favorecer o entendimento de que a função exponencial possui uma taxa de variação percentual constante, uma vez que no registro algébrico $\left[(1,2)^h - 1\right].100\%$ fica fácil perceber que essa taxa não depende do tempo t; depende somente de h , que é a diferença entre os anos considerados. Por fim, em (d), esperava-se que, com o desenvolvimento da atividade, os alunos pudessem chegar à conclusão que se pretendia.

Durante a aplicação, notou-se que, de um modo geral, os alunos apresentaram dificuldades ao resolver o problema 2. O grupo G1, inicialmente, tentou encontrar uma função afim que pudesse modelar a situação proposta. O grupo G6, por sua vez, ao utilizar o *software* GeoGebra, digitou os pares ordenados (tratamento gráfico) sugeridos pela tabela. Observando a disposição dos pontos afirmou, num primeiro momento, que se tratava de uma função quadrática. Realizados os cálculos necessários, os alunos perceberam que isso não era possível, uma vez que a sequência de valores do conjunto imagem não representava uma progressão aritmética de segunda ordem. Em seguida, usando o comando “RegressãoExponencial (<Lista de Pontos>)”, informaram que os dados da tabela eram modelados pela função $P(t) = 4e^{0,18t}$.

De acordo com Canavarro (2011, p.13) ao monitorar o trabalho dos alunos o professor deve ter sempre presente que “ao circular pelos alunos ou grupos, mais do que lhes dar respostas, é importante recolher informação de como estão a trabalhar e que ideias matemáticas estão a explorar, da sua diversidade e validade”.

Nos grupos G2 e G3, as discussões também giraram em torno da função quadrática; cuja caracterização havia sido explorada em aulas anteriores. Ao perceberem que os valores do conjunto imagem não representavam uma progressão aritmética de segunda ordem (tratamento algébrico), os alunos solicitaram o auxílio da professora, alegando que não sabiam como resolver o problema. Após algumas indagações em relação à população inicial e ao percentual de crescimento anual da população, os grupos G2 e G3 encontraram, por recorrência (tratamento numérico), o modelo solicitado. Ao contrário desses, os alunos dos grupos G4 e G5 resolveram os itens (a) e (b), sem dificuldades. Na Figura 8, apresenta-se o protocolo do grupo G5, referente ao item (a).

a) Com os dados da tabela, é possível estimar a informação que foi apagada? Explique sua resposta.

Sim, pois os dados da tabela estão dispostos em forma de PG de razão 1,2, que representa o crescimento desta população com o passar dos anos.

Figura 8: Resolução do item (a) do problema 2, apresentada pelo grupo G5.
Fonte: Dados da pesquisa.

eISSN: 2526-9062

Pelo exposto, é possível observar que G5 percebeu a relação entre os dados da tabela e as progressões geométricas (PG). De tal forma, utilizou a expressão do termo geral de uma PG, para encontrar o modelo solicitado. Destaca-se que o grupo G4 também utilizou esta estratégia de resolução, dando evidências de que reconheceu a conexão entre a função exponencial e uma PG.

Pelo exposto, observa-se que os alunos empregaram diferentes estratégias de resolução, sendo utilizado o registro numérico, algébrico e gráfico. Além disso, identificou-se que ao serem convidados a se envolver na resolução dos problemas, eles se mostraram favoráveis a esta metodologia de trabalho.

Em (c), foi necessária a intervenção da pesquisadora, inclusive para esclarecimentos do enunciado. Mesmo assim, três grupos (G1, G3 e G6) deixaram esse item em branco e dois (G2 e G5) resolveram de forma incorreta. O grupo G5 não identificou o intervalo de tempo $\left[t, t+h\right]$ na expressão “de um ano t qualquer à h anos depois”, vindo a considerar, no lugar deste, o intervalo $\left[t, h\right]$ - dificuldade na conversão do registro em língua natural para o algébrico. Assim, o grupo G5 não concluiu a resolução o item (c) e deixou em branco o item (d).

O grupo G4 foi o único que resolveu o item (c) de forma satisfatória, informando que a variação percentual anual da população é de 20% e que em um período de três anos o percentual de crescimento é de 72,8%; porém, em (d), não respondeu o que havia sido solicitado. Os seis grupos que participaram da pesquisa não tiveram sucesso ao resolver o último item deste problema. Decorrido o tempo concedido para a resolução, três grupos foram convidados para registrar no quadro suas resoluções. Na Figura 9, transcreve-se parte do que foi registrado.

<table>
<tr><th>G2</th><th>G4</th></tr>
<tr><td>$P(0) = 4$
$P(1) = 4,8 = 4 \cdot (1,2)$
$P(2) = 5,76 = 4,8 \cdot (1,2) = 4 \cdot (1,2) \cdot (1,2) = 4 \cdot (1,2)^2$
$P(3) = 6,91 \approx 5,76 \cdot (1,2) = 4 \cdot (1,2)^2 \cdot (1,2) = 4 \cdot (1,2)^3$
$P(4) = 8,29 \approx 6,91 \cdot (1,2) = 4 \cdot (1,2)^3 \cdot (1,2) = 4 \cdot (1,2)^4$
$P(5) = 4 \cdot (1,2)^5 \approx 9,95$
$\vdots$
$P(t) = 4.(1,2)^t$</td>
<td rowspan="3">$a_n = a_0.q^n \quad q = 1,2 \quad a_0 = 4$
Logo:
$a_n = 4(1,2)^n$ **e** $a_5 = 4(1,2)^5 = 9,95$
Então: $\dfrac{VF - VI}{VI} = \dfrac{4(1,2)^{t+h} - 4(1,2)^t}{4(1,2)^t}$
$= \dfrac{4(1,2)^t\left[(1,2)^h - 1\right]}{4(1,2)^t} = \left[(1,2)^h - 1\right]$
Variação anual: $\left[(1,2)^1 - 1\right].100\% = 20\%$
Variação em 3 anos: $\left[(1,2)^3 - 1\right].100\% = 72,8\%$</td></tr>
<tr><td>G6</td></tr>
<tr><td>$P(t) = 4e^{0,18t}$
Logo: $P(5) = 4e^{0,18.(5)} = 9,95$</td></tr>
</table>

Figura 9: Registro, no quadro, referente ao problema 2.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com as resoluções no quadro, os alunos foram questionados sobre as duas soluções distintas, apresentadas; os quais disseram acreditar que ambas estão corretas, pois os valores encontrados para $P(5)$ são iguais, mas que não sabiam explicar o porquê disso. A professora aproveitou o momento para informar que $a^x = e^{\ln(a).x}$ e explicou as vantagens de se trabalhar com a função exponencial natural.

Durante a plenária ainda, alguns alunos solicitaram a explicação dos dois últimos itens do problema. O grupo G4 prontamente explicou os tratamentos algébricos realizados em (c). Contudo, não soube informar que a base $"a"$ da função exponencial $P(t) = 4.(1,2)^t$ é dada por $1+i$, onde i representa a taxa percentual de crescimento anual, o que foi destacado pela professora. Após a plenária, foi realizada a formalização do conteúdo abordado.

Problema[5] 3: Capitalização contínua.

Pense que você possui um capital C_0, aplicado em uma instituição financeira, no regime de juros compostos. Essa instituição paga a você uma taxa de rendimentos de 100% ao ano. No entanto, você deve decidir as datas para a capitalização de sua aplicação.

- Se você optar pela capitalização anual, a cada ano a instituição financeira paga a você um saldo integral $(100\% = 1)$ existente na capitalização anterior. Assim, após um ano, seu saldo será o dobro da quantia inicial, ou seja,

$$C_0 + C_0 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \cdot C_0 = (2) \cdot C_0$$

onde $\frac{1}{1}$ representa o percentual de 100% e o expoente 1 representa quantas vezes o seu saldo é capitalizado.

- Se você optar pela capitalização semestral, a cada seis meses a instituição financeira paga a você metade $\left(50\% = \frac{1}{2}\right)$ do saldo existente na capitalização anterior. Assim, após seis meses, seu saldo será:

$$C_0 + \frac{1}{2}C_0 = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot C_0$$

e após um ano, será:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot C_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot C_0 = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot C_0 \cdot \left[1+\frac{1}{2}\right] = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C_0 = (2,25) \cdot C_0$$

a) Como será seu saldo, após um ano, se você optar por uma capitalização:

Quadrimestral (3 vezes ao ano)?	
Trimestral (4 vezes ao ano)?	
Bimestral (6 vezes ao ano)?	
Mensal (12 vezes ao ano)?	
Diária (365 vezes ao ano)?	
Horária (8760 vezes ao ano)?	
Minuto a minuto (525600 vezes ao ano)?	
Segundo a segundo (31526000 vezes ao ano)?	

b) Quantas capitalizações ao ano você gostaria que sua aplicação tivesse? Justifique sua resposta.

---

[5] Atividade adaptada de Caetano e Paterlini (2013, p. 88).

c) Após um ano, existe um valor limite, sobre a aplicação inicial C_0, que a instituição financeira paga a você? Em caso afirmativo, qual é esse valor?

d) Considerando que seu saldo, após um ano, é dado pela expressão matemática $C(x) = C_0 \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ onde x representa o número de capitalizações ao ano; o que você conclui em relação ao comportamento da expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ à medida que x aumenta? O que isto significa?

Com o problema 3, pretendia-se iniciar uma discussão a respeito da noção intuitiva de limite; um dos primeiros conceitos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, abordou-se a capitalização contínua. Esse problema poderia gerar vários questionamentos, pois exige maior grau de observação e abstração, além de vários cálculos. Pensando em facilitar sua resolução e possibilitar uma melhor visualização dos resultados, optou-se por sugerir, durante a aplicação, a utilização de uma planilha eletrônica.

Esperava-se que os alunos percebessem que a expressão exponencial, exibida no problema, se aproxima de $e = 2,718282...$, quando x assume um valor muito grande ($x \to \infty$) e que esse valor limite corresponde ao maior percentual sobre a aplicação inicial C_o pago pela instituição financeira, após um ano, pelo regime de capitalização contínua.

Como foi previsto, o problema 3 causou dificuldades e muitas discussões. Boa parte dos alunos precisou reler o enunciado várias vezes para entender a questão – dificuldade na conversão da língua natural para o registro numérico. Depois de certo tempo, os grupos conseguiram preencher a tabela do item (a). Dois grupos completaram a tabela com o auxílio de uma calculadora, enquanto os demais utilizaram planilhas eletrônicas. Em relação ao uso do computador, ver a tabela no monitor ou vê-la no papel não facilita nem dificulta o reconhecimento do comportamento da expressão exponencial à medida que x aumenta. Contudo, a utilização do *software* evita que o aluno recaia em rotinas algébricas que podem desviá-lo do foco da questão.

Preenchida a tabela, os alunos, de um modo geral, responderam a atividade de forma satisfatória, apesar de alguns grupos não terem percebido as vantagens deste regime de capitalização, a partir de certo número de capitalizações, como se pode verificar na Figura 10.

b) Quantas capitalizações ao ano você gostaria que sua aplicação tivesse? Justifique sua resposta.

Eu gostaria que minha aplicação tivesse uma capitalização diária (365 vezes ao ano).

Figura 10: Resolução do item (b) do problema 3 apresentada pelo grupo G5.
Fonte: Dados da pesquisa.

Pela escolha do grupo, é possível inferir que o grupo G5 considerou a diferença entre o saldo obtido pela capitalização diária e o saldo obtido pela capitalização a cada segundo, irrelevante. O grupo G6, por sua vez, expressa um melhor entendimento deste regime de capitalização.

No item (c), os alunos foram unânimes em dizer que, após um ano, o valor limite que a instituição financeira paga, sobre a aplicação inicial é $e.C_o$. Aqui, ficaram evidentes as contribuições de o registro tabular; uma vez que, não conhecendo o limite exponencial fundamental, os alunos não teriam condições de chegar a essa conclusão, observando o registro algébrico. O item (d) foi respondido de forma satisfatória por todos os grupos.

Após a resolução do problema, apenas um grupo registrou sua resolução no quadro (as demais resoluções eram semelhantes). Colocado o problema em discussão, foi possível notar que sua resolução propiciou a compreensão da noção intuitiva de limite. Tal compreensão foi expressa por meio do registro em língua natural, no qual as palavras utilizadas deram a ideia de tendência, de aproximação. Durante a plenária, a professora sugeriu a análise da representação gráfica da situação, uma vez que nenhum grupo havia mobilizado este registro de representação. Foi possível observar nessa situação, que o registro gráfico propiciou melhor compreensão do comportamento da função.

5. Considerações finais

O estudo aqui apresentado teve como objetivo investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino sobre o conceito de função, construída com base na resolução de problemas, para professores de Matemática em formação inicial. Para tanto, foram analisados três problemas que exploram noções relacionadas a esse conceito, favorecendo o estabelecimento de conexões entre elas.

Durante a resolução do primeiro problema foi observado que os alunos tinham dificuldades de participar de discussões, porém, com o incentivo do professor, percebeu-se que eles começaram a envolverem-se e a contribuírem com sugestões para a resolução dos problemas.

De um modo geral, os alunos buscavam utilizar múltiplas representações, realizando tratamentos e conversões, e explorar suas inter-relações. O trabalho realizado dessa forma evidencia uma estratégia que possibilita ao aluno visualizar diferentes aspectos do que é representado, sendo possível compreendê-lo em profundidade.

A metodologia utilizada na condução das atividades de ensino estabeleceu um ambiente favorável para a discussão entre os alunos e entre aluno e professor. Ao promover discussões em sala de aula, procurou-se desenvolver uma forma de ensinar e aprender que permite a compreensão do objeto matemático em estudo.

A análise dos dados coletados, durante a experimentação, se mostrou positiva para os processos de ensino e aprendizagem, uma vez que os futuros professores vivenciaram a experiência como participantes ativos na resolução dos problemas e, apesar das dificuldades ao mobilizar o conceito de função e coordenar suas múltiplas representações, reconheceram a importância das representações semióticas para compreensão do conceito.

6. Referências

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. **REnCiMa**, v. 10, n. 2, p. 01-14, 2019.

CAETANO, P. A. S.; PATERLINI, R. R. **Matem@tica na Pr@tica. Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio**. Cuiabá, MT, 2013.

CANAVARRO, A. P. O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 144-145, p. 38-42, out, nov., dez. 2017.

________. Ensino Exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática.** Lisboa, n. 115, p.1-17, nov, dez. 2011.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

HODGSON, T. R. Connections as Problem-Solving Tools. In: HOUSE, P. A.; COXFORD, A. F. (Ed.). **Connecting Mathematics across the Curriculum**. Yearbook 1995. Reston: NCTM, 1995. p. 13 - 21.

JURADO, U. M. El Rincón de lós problemas. **Revista UNIÓN: Reviste Iberoamericana de Educação Matemática**, n. 22, p. 151-156, 2010. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/22/Union_022_015.pdf>

NASSER, L.; SOUSA, G. A.; TORRACA, M. A. Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior. In: **BOLETIM GEPEM**, n. 70 – jan. / jun. 2017. P. 43 – 55.

OLIMPIO, A. A. Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo. **Revista BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 20, n. 28, p. 39 – 67, 2007. Disponível em: <

http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/735 >. Acesso em 28 abr., 2018.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Vol. XXII, n. 2, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática – Rumo à compreensão e à aquisição das grandes ideias contidas na Matemática Escolar. In: SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais**... 2009.

PIRES, R. F. Função: Concepção de Professores e Estudantes dos Ensinos Médio e Superior, 2014. 439 f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2014.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

RODRIGUES, C.; PONTE, J. P.; MENEZES, L. Prática de discussão coletiva de uma professora em Álgebra. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 26, n. 3, set./dez.2018.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 61, p. 398-418, ago. 2018.

SANTOS, G. L. Os Registros de Representação Semiótica mobilizados por acadêmicos de um curso de Ciências Contábeis em Resolução de Problemas, 2014. 113 f. **Tese** (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

STEIN, M. K. et al. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning,** Abingdon, n. 10, p. 313-340, 2008.