Scripta Philosophiæ Naturalis 12 (2017)
ISSN 2258 – 3335

MATHÉMATIQUES & ARTS
DEUX CONFÉRENCES

Claude P. BRUTER

Résumé

On reprend ici quelques-unes des illustrations pédagogiques présentées au cours des Conférences Florence et Lausanne, au cours également de celles faites à Suresnes et à l'Ecole Centrale. Ces illustrations ne concernent pas seulement les mathématiques, elles ont également une portée philosophique par elles-mêmes. Révélant le cheminement de pensée le long duquel elles ont été conçues, elles donnent un exemple de la manière dont se constitue l'univers mathématique.

SECONDE PARTIE

La première partie de cet article [1] rapportait le contenu de philosophie naturelle présent dans les conférences faites à Florence [2] et à Lausanne [3]. Le principe de stabilité de Platon, « Tout objet s'efforce de persévérer dans son Moi à travers l'espace et au cours du temps », qui se manifeste par le comportement aussi bien de la bille qui vient se placer au fond de la coupelle que celui du faussaire qui avance des raisons fallacieuses, y occupe une place centrale. Les façons dont nous réagissons à ce qui peut conforter ou réduire cette stabilité se révèlent à travers l'expression de nombreux sentiments. C'est particulier le cas des sentiments de beauté et de laideur. On aura tendance à qualifier de laide ou de belle toute œuvre qui contribue à affaiblir ou à renforcer l'impression perçue de notre propre stabilité. Sans faire appel à ce dernier concept, Platon avançait implicitement la même explication: « c'est l'avantageux qui est beau, et le nuisible laid » (La République, Livre V, 457 b).

Ce contenu des deux conférences précitées été rappelé lors des deux conférences qui ont suivi, à Suresnes [4] puis à l'Ecole Centrale [5]. Par rapport aux deux conférences précédentes, ces deux dernières visaient un public plus avancé sur les plans scientifique et mathématique. L'objectif de toutes ces conférences était non seulement d'illustrer la présence de quelques notions, objets et faits mathématiques au sein d'œuvres d'art plastiques, mais également et surtout de les faire connaître, de montrer leur pertinence, leur universalité, leur signification.

L'une de celles qui présente quelque importance parce qu'elle est intimement liée à nouveau au principe de stabilité illustre le mythe platonicien de la caverne. Elle fait toucher des yeux et de l'entendement la nature de toutes nos représentations : ce sont des projections sur des écrans des réalités perçues, des ombres.

Le fait de projeter, de lancer contre, engendre une manière de cassure traduite par une perte de connaissance, d'information sur l'objet initial. La quantité d'information perdue représente une forme d'énergie, liée en partie à celle nécessaire pour obtenir cette forme de cassure.

La projection est la forme primaire du processus de représentation, au point que toute autre forme de représentation apparaît comme le résultat d'un jeu de déformations de telles projections locales primaires. L'écriture symbolique globale de la représentation sous une forme mathématique explicite est celle d'une fonction ou d'une application.

Ces propos sont illustrés par le contenu d'une animation toute simple.

Les données premières sont celles d'un plan horizontal, l'écran, et de rayons lumineux parallèles, perpendiculaires à l'écran. On observe alors la projection, l'ombre sur l'écran horizontal d'un cercle: on voit celui-ci tourner dans l'espace autour de son

http://www.math-art.eu/videos/QuickTime/

diamètre situé dans ce même plan horizontal. Lorsque le cercle est tout entier dans le plan vertical, cette projection se résume à un segment, le diamètre autour duquel pivote le cercle. Sinon la projection, l'ombre, a la forme d'une ellipse, qui est le cercle lui-même lorsque celui-ci est situé dans le plan horizontal et seulement dans ce cas.

Ainsi, sauf dans ce dernier cas exceptionnel, l'ombre du cercle n'est pas un cercle. Cette ombre est donc trompeuse de la réalité de l'objet. Et la valeur informative de cette ombre est même presque totalement illusoire lorsque elle prend la forme du diamètre du cercle: car tout dessin, le plus abscons ou le plus merveilleux, situé dans ce plan vertical et à l'intérieur du domaine limité par les deux verticales passant par les extrémités du diamètre a pour ombre, pour projection cet unique segment.

La leçon générale des métaphores platonicienne et mathématique doit sans cesse être rappelée, notamment auprès des publics présents dans les auditoires. Ne pas déifier, ne pas prendre l'apparence, la représentation, le symbole, le nombre, le modèle physique, le modèle mathématique pour la réalité dans sa plénitude, pour le vrai absolu. Ce ne sont, aussi pertinents soient-ils, que des reflets incomplets, des indications sur certains aspects, sur la présence de certaines propriétés des objets que nous côtoyons, de manière fugace ou prolongée. De toute personne, de tout objet, nous n'en voyons que la face avant, rien de la face arrière, ni de l'intérieur.

Toute représentation est marquée dans l'espace et dans le temps. Elle possède une matérialité dont la stabilité spatio-temporelle, fonction notamment des données environnementales, s'inscrit à l'intérieur d'une très large échelle. Cette matérialité est marquée par la présence de phénomènes vibratoires locaux: vibrations chromatiques, comme celles associées aux couleurs plus ou moins noires des notes sur la portée musicale ou des lettres sur la page imprimée, comme celles attachées aux différentes touches du peintre sur sa toile ; vibrations sonores comme celles émises par le jeu de nos cordes vocales ou par celui des cordes de l'instrument de musique. Toutes ces formes d'expression de nos pensées sont en définitive des discours associés aux diverses représentations du monde extérieur ou de notre univers intérieur, et que nous élaborons avec plus ou moins de pertinence, d'exactitude, de précision, de vérité, en un mot avec plus ou moins de bonheur.

J'ai évoqué dans la première partie les liens évidents entre les mathématiques et les arts. En écrivant « L'art et la science, c'est tâcher de comprendre », Alberto Giacometti [8] fait preuve d'une acuité de pensée rare, semble introduire un lien nouveau, mais soulève dans l'esprit du lecteur la question : du contenu de quels domaines l'une des fonctions de l'art serait-elle de comprendre, ou bien que veut dire précisément l'auteur ? Il se trouve que Giacometti avait des problèmes particuliers de perception et de reconnaissance de l'étendue des formes: « Quand ma femme pose pour moi, au bout de trois jours, elle ne se ressemble plus. Je ne la reconnais absolument plus. …Justement, je travaille pour comprendre ce qui se passe. » En somme, la création de l'œuvre d'art, son contenu, sont révélateurs du fonctionnement de la machine humaine, sont en quelque sorte le résultat d'expériences scientifiques qu'il s'agit d'interpréter, d'analyser, dont il faut comprendre les tenants et les aboutissants. Cette problématique concerne les œuvres d'art de toute nature, bien au-delà du simple art visuel. Elle est en rapport avec celle de la typologie de l'esprit humain, qui comprend entre autres toutes les compositions subtiles entre esprit de géométrie et esprit de finesse, entre esprits essentiellement intuitifs et esprits purement rationnels, entre esprits figés voire bornés et esprits souples et ouverts, entre raisonneurs et calculateurs, entre continuateurs et créateurs. On trouvera dans la Newsletter de Juin 2017 de l'ESMA, les prémisses d'une description mathématisée de cette typologie.

Les conférences précédentes rappellent la distinction entre géométrie et topologie. Le monde géométrique est rigide, corseté par l'introduction de la distance précise et fixe entre deux points. La topologie s'évade de cette contrainte. Elle autorise aussitôt une grande souplesse dans l'apparence de la forme, caractérisée elle par la stabilité, en l'occurence l'invariance de certaines propriétés essentielles par déformation. On retrouve donc ici l'intérêt et la pertinence attachée à la notion de stabilité.

Il y a un siècle, Kandinsky [9] notait que « Chaque forme est aussi sensible qu'un petit nuage de fumée: le déplacement le plus imperceptible de l'une de ses parties la modifie d'*une façon importante* [le souligné sous forme d'italique est de Kandinsky] ». Il avait saisi la réalité de la souplesse topologique, mais également pressenti son importance, ces lignes sont prémonitoires: « une répétition véritablement exacte n'est pas possible. Aussi longtemps que nous ne sommes particulièrement sensibles qu'à l'ensemble de la composition, ce fait a plutôt une importance théorique. Mais au fur et à mesure que les hommes auront une sensibilité plus fine et plus forte par la pratique de formes de plus en plus abstraites (qui ne recevront aucune interprétation du corporel), ce fait gagnera en importance pratique. Et ainsi, d'une part, les difficultés de l'art croîtront, mais simultanément la richesse des formes augmentera, quantitativement et qualitativement. »

Le progrès mathématique a précisé la manière de déformer qui respecte certaines propriétés intrinsèques de la forme. Il permet aujourd'hui de contrôler la déformation.

L'exploitation de la souplesse topologique permet d'illustrer davantage la pertinence de la métaphore mathématique.

La suite de cet exposé permettra en outre de voir comment peut s'établir une forme de création mathématique, pour mieux réfuter, par l'exemple, le discours fallacieux de ceux qui, à une certaine époque, présentaient la mathématique comme une sorte de succursale de la logique. Non professionnels des mathématiques, ils ont contribué, avec le succès que l'on a connu, à diffuser une mauvaise approche du contenu et de l'enseignement de cette discipline.

Dans le corpus géométrique et topologique, les sphères de dimension topologique quelconque, à travers la réalisation de la plus primitive d'entre elle sous la forme du cercle, occupent une place centrale. La sphère usuelle est la surface d'un corps solide appelé une boule qu'on peut noter B^3 pour indiquer qu'elle se trouve dans notre espace dont on ne perçoit bien que 3 dimensions. La sphère céleste, le fait que la terre soit « ronde », que bien des cailloux, des parties du corps, des cellules participent de cette forme a conduit parfois à voir en elle la figure primitive et sinon primordiale de l'embryologie. Ainsi René Thom, dans son *magnum opus* Stabilité structurelle et Morphogénèse paru en 1972[1], considérait initialement « un être vivant A […] comme [ ] une boule B^3 de dimension trois ».

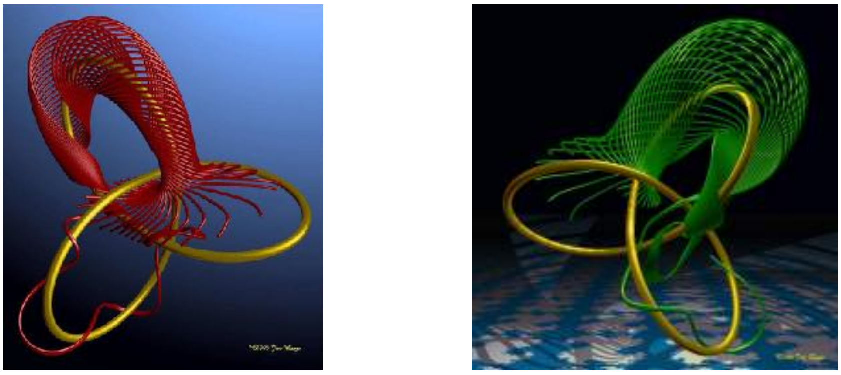
Les problèmes d'architecture, de mise en valeur esthétique des temples, de taille des pierres ont grandement contribué au développement de la géométrie. Ainsi les tores sont connus au moins depuis les Grecs: appelés alors ∑πιρα, ils participaient alors de la base des colonnes ioniques. Ce sont ces problèmes de taille de pierres et d'architecture qui, fondamentalement et l'étude de certains mouvements, sont à l'origine du développement de la géométrie différentielle en dimension 3, et non point la logique, pratiquement inexistante à l'époque où Monge et ses prédécesseurs étudiaient ces problèmes.

L'étude des mouvements, des trajectoires, a renouvelé à partir du dix-neuvième siècle l'intérêt pour les tores. Le rôle du trajet circulaire a évidemment été fondateur. Ces trajectoires en forme de cercle peuvent se rassembler en anneau plan. Mais dans

[1]Sa signature sur mon exemplaire porte la date du 12.11.72. Mais j'en avais reçu quelques bonnes feuilles bien des mois auparavant. L'ouvrage aurait pu paraître un an plus tôt environ, à quelques modifications près.

l’espace usuel elles peuvent aussi s’enrouler autour d’anneaux spatiaux comme les anneaux de mariage, des tores standard. C’est le cas par exemple des trajectoires suivies par nos deux danseurs et que l’on voit dans l’animation précédente. Ces trajectoires particulières sont appelées des nœuds de trèfle, ce sont des exemples de nœuds toriques puisqu’elles peuvent d’enrouler sur la surface d’un tore plein:

Nœuds toriques dessinés par Jos Leys, respectivement à trois (nœud de trèfle) et cinq feuilles



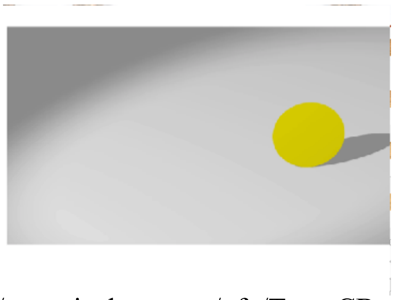
Nœuds de trèfles créés par Jos Leys, ici des attracteurs autour desquels s’enroulent des trajectoires

C’est en préparant en 1980 un cours pour des élèves-instituteurs que j’ai succinctement présenté le corps humain comme un tore et non pas comme une boule[2]. Evidemment, il ne s’agit pas du tore standard, bien régulier, bien symétrique, que l’on peut réaliser uniquement à l’aide de cercles. Il s’agit d’un tore topologique, une déformation continue du tore standard.

L’illustration de cette déformation a été préparée pour la conférence Lausanne [3]. Elle a été précédée par la réalisation d’une animation qui fait bien voir un autre

[2] Thom a repris cette présentation dans un texte ultérieur. Je dois à Miguel Espinoza d’avoir rafraîchi ma mémoire: « chez Thom, j’ai vu cette idée de représenter l’organisme animal comme un tore à plusieurs endroits et pour l’instant je le vois ici : Esquisse d’une sémiophysique. Physique aristotélicienne et Théorie des catastrophes, Ch. 4 pp. 78 et ss ». Cet ouvrage a été publié en1988.

mode de déformation du tore standard, débouchant sur la vision globale d'une architecture classique, celle du cirque romain, de l'arène.



http://www.josleys.com/gfx/Tore_CB_01.mov

Il ne restait plus qu'à dessiner les divers protagonistes présents dans une telle arène[3]. On trouvera [3] la description du processus de déformations du tore standard aboutissant au contenu des tableaux suivants.

Le cycle est donc bouclé. On est parti d'une œuvre architecturale et artistique, la colonne ionique, pour aboutir, via les mathématiques et dans sa partie récente, la

[3] La signature de l'artiste se trouve au verso des tableaux.

topologie, à une autre œuvre architecturale et artistique, le cirque romain. Je ne prétends nullement que l'illustration finale soit une œuvre d'art, il faudrait en travailler les couleurs pour améliorer son statut. Elle participe toutefois de ce courant d'idées.

J'ajouterai un mot avant de quitter ce paragraphe. On peut émettre l'hypothèse que nombre d'éléments qui accompagnaient l'architecture du temple grec avaient une valeur symbolique. On peut alors imaginer que la colonne représenterait le dieu participant au support de la voûte céleste, le toit du temple, les éléments toriques qui figurent à la base de la colonne mais aussi près de son chapiteau représentant le mouvement circulaire du monde - les tores pleins sont des cercles épaissis -, les deux spirales symétriques enfin formant le chapiteau, symbolisant le mouvement de naissance et de déploiement de l'univers.

A travers l'art et les mathématiques, ce serait encore une vision du monde physique qui serait ainsi représentée.

Il n'est pas déraisonnable penser que, depuis les origines, l'art a joué un rôle moteur dans le développement des mathématiques, aussi discret soit-il.

Décorer des motifs, créer un bijou, un pavage, une mosaïque, bâtir et orner une demeure d'éternité, un temple ne peuvent être faits sans l'emploi de rudiments de géométrie et d'arithmétique.

A travers les Pythagoriciens, l'art musical a contribué à bâtir la théorie des nombres et celle des proportions. Au delà de la perpective, on connaît le stimulant apporté à la Renaissance par l'art visuel à la naissance et au développement de la géométrie projective.

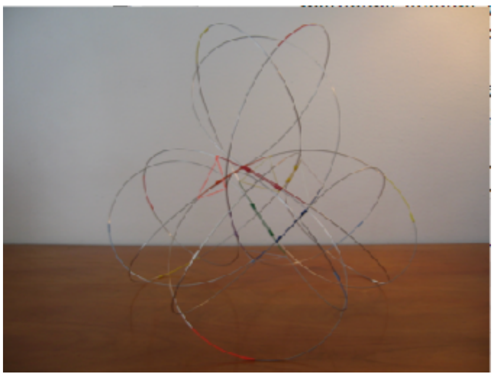
Comme je l'ai rappelé plus haut, la sculpture et l'architecture ont grandement favorisé le développement de la géométrie différentielle et de l'analyse, notamment à travers les travaux de Monge et son célèbre traité d'Analyse appliquée à la Géométrie.

Il faudrait interroger aujourd'hui Mike Field et Roger Penrose pour savoir ce que leurs travaux mathématiques doivent à leur vif intérêt pour les pavages et pour leurs qualités esthétiques.

La même question peut être posée aux géomètres allemands et américains qu'ils pratiquent la géométrie algébrique ou la géométrie différentielle. Que Richard Palais, mathématicien américain de premier plan, ait créé un musée virtuel des mathématiques, et se soit adjoint plusieurs mathématiciens de qualité, est très significatif. Les artistes Luc Bénard et Jean Constat ont trouvé auprès de leurs sites et de leurs personnes les éléments mathématiques et informatiques à l'aide desquels ils ont réalisé leurs meilleures œuvres.

L'un des rôles de l'ESMA est non seulement de favoriser la création artistique en mettant de nouvelles techniques intellectuelles, de nouvelles formes à la disposition des artistes, en promouvant l'emploi des œuvres d'art à des fins pédagogiques, mais aussi d'encourager la création mathématique en s'appuyant sur les réflexions et les créations des artistes eux-mêmes.

C'est dans ce dernier cadre que j'ai tenté moi-même d'œuvrer quelque peu. Stimulé par les nouveautés en architecture introduites par Dmitri Kozlov s'appuyant sur la théorie des nœuds, également par mes contacts avec Philippe Rips qui travaille dans le domaine de la tenségrité, j'ai introduit une nouvelle problématique qui, pour l'instant, se définit comme établir l'inventaire des nœuds que l'on peut construire à partir des arêtes extérieures et intérieures des polytopes. Il est possible que ces nœuds aient une signification physique utile. Il existe par exemple quatre noeuds de trèfle présents sur le cuboactaèdre, ainsi visualisés:

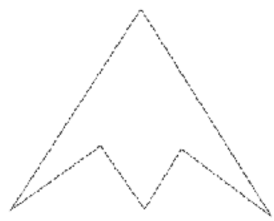


Bruter-Rips. Représentation symbolique de la surface Boy.

La célèbre recommandation lancée par Cézanne en 1904, « Traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône, le tout mis en perspective, soit que chaque côté d'un objet, d'un plan, se dirige vers un point central », m'a rappelé que les mathématiciens avaient consacré de nombreux travaux à l'étude des sphères en général, mais que celle des cônes était restée un parent pauvre, avait plutôt été laissée à l'abandon. Or ces cônes figuraient à titre élémentaire dans ma vision de la théorie des espaces fibrés avec singularités - que j'avais appelés des « montagnes ». Je me suis donc remis à envisager ces cônes, conçus de manière beaucoup plus générale que l'habituelle, à considérer les manières dont on pouvait les assembler pour reconstruire des objets classiques, y compris les sphères et les tores, ou au contraire pour en définir de nouveaux.

La découverte touristique de la quantité étonnante de frises géométriques de toute beauté qui ornent les murs de la Chapelle Palatine à Palerme, et, tout proche, de la Cathédrale de Monreale, m'a conduit à essayer de faire l'inventaire des motifs présents dans ces frises. Nombre d'entre eux ne sont pas convexes. Si la convexité a depuis longtemps fait l'objet de nombreux travaux, il n'en a pas été de même pour la non-convexité. Or finalement, celle-ci est très présente dans la majorité des objets physiques ou biologiques. J'ai établi un invariant élémentaire qui caractérise le degré de non-convexité des objets. On peut alors ramener l'étude de tout objet usuel à celle d'un polytope, également défini de façon plus générale que l'ordinaire, également pas forcément convexe. Voici mon exemple plaisant et inattendu préféré, ces deux figures sont en un certain sens les mêmes:

A smiling (2,6)-motive



A (2,6)-motive: the « butterfly »

Dans tous les exemples que nous venons de rencontrer, l'observation préalable a joué un rôle majeur. Bien sûr, l'observation attentive participe du fondement de la bonne représentation. Observation qui permet ou dont le but est de faire surgir, de dégager les caractéristiques essentielles, universelles que présentent les propriétés des objets, de familles d'objets. Observation qui permet d'établir des regroupements, des analogies, et par suite de transposer et d'étendre à l'analogue les propriétés et les comportements déjà relevés et bien établis sur des objets sources.

Les données de base, primaires, de l'observation sont étonnamment simples. Cette observation est celle de tous les règnes de la nature, de toutes les manifestations des activités auxquelles nos appareils naturels ou que nous avons créés sont sensibles, de tout ce qui est présent, dans nous mêmes et dans notre environnement: le corpus de mathématique déjà établi fait ainsi partie de notre univers observable et attentivement regardé.

Ces données font partie des principes et des axiomes qu'elles engendrent, auxquels on se plie, mais qu'on peut mettre en doute. Le jeu de leurs conséquences diverses, nombreuses car elles dépendent en général de contextes eux-mêmes susceptibles de changer, le jeu de leurs interactions, souvent et rapidement complexes, font l'objet d'analyses et de reconstructions plus ou moins difficiles.

Ce sont ces jeux que décrit le mathématicien quand il relate une démonstration, une preuve au sein d'une représentation plus ou moins bien adaptée au pan d'univers observé. La causalité active dans ce pan d'univers, exprimée par l'implication et qualifiée de causalité formelle voire logique, y est éminemment présente, explicite, ou implicite. Dans cette représentation, la causalité active que reprend la causalité formelle est en général masquée par l'emploi du langage symbolique dont le propre est de condenser de manière si possible optimale l'information. La signification physique des calculs intermédiaires échappe souvent à son auteur. Il n'est également que de comparer la présentation et la description d'un phénomène physique, par exemple celui des modalités de la propagation d'une onde électromagnétique: un fort long discours en langage vernaculaire, compréhensible par la plupart d'entre nous, fera place à quelques équations dans le langage mathématique, dont l'interprétation et la signification exacte ne sera accessible qu'à quelques-uns. La mathématique est une science d'observation, au sein de laquelle on procède souvent à des expériences préalables, science dont le développement est également dicté et par la causalité interne, et par la recherche de la plus grande généralité, d'une généralité ambitieuse qui veut tendre vers l'universalité.

Références

[1 C.P. BRUTER *Mathématiques et Arts, Deux Conférences, Première Partie,* Scripta Philosophiae Naturalis, 11 Janvier 2017, 1-27 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/claude-p-bruter-mathc3a9matiques-et-arts-deux-confc3a9rences1.pdf).

[2] C.P. BRUTER Mathématiques & Arts, Art & Mathématique, Conférence Florence (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Florence_Conference_2016.pdf)

[3] C.P. BRUTER Mathématiques & Arts, Art & Mathématique, Conférence Lausanne (http://www.math-art.eu/Exhibitions/Lausanne/Lausanne_Conference/Conférence%20Lausanne%206_10_2016%282%29.pdf)

[4] C.P. BRUTER Des Mathématiques et des Arts, Conférence Suresnes, (http://www.math-art.eu/Exhibitions/Suresnes2017/Conference_Suresnes.pdf)

[5] C.P. BRUTER Exposé devant les Gagnants du Concours du Tournoi régional des équipes lycéennes Ile-de-France de Mathématiques, Ecole Centrale, 2 Avril 2017 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Ecole_Centrale_-_copie_2_bonne.pdf)

[6] C.P. BRUTER *Mathematics for the working artist*, Part II, *An Introduction to the qualitative theory of cones*, Mathematics and Art III (C. P. Bruter Ed.) Cassini 2015, 139-168 (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Cagliari2013/mathematics-working-artist.pdf).

[7] C.P. BRUTER *Merveilles siciliennes, Regards sur le mode de construction des frises*, A paraître (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Ljubljana2016/Ljubljana_2.pdf).

[8] A. GIACOMETTI *Pourquoi je suis sculpteur*, Editions Fondation Giacometti et Editions Hermann, Paris, 2016.

[9] W. KANDINSKY *Du Spirituel dans l'art, et dans la peinture en particulier*, Denoel, Paris, 2016.