MODELO DE PLANTA ÓPTIMA MULTIPRODUCTO

MODEL OF OPTIMAL MULTIPRODUCT PLANT

GABRIEL POVEDA RAMOS
Ingeniero Químico, Ingeniero Electricista. Doctor en Ingeniería. Profesor Emérito
Escuela de Formación Avanzada.Universidad Pontificia Bolivariana. mgt@logos.upb.edu.co

Recibido para revisar 15 de Abril de 2005, aceptado 6 de Mayo de 2005, versión final 6 de Mayo de 2005

RESUMEN: Se presenta un modelo matemático para planificar y determinar el tamaño óptimo de una planta industrial de procesos de transformación, que produce varios productos usando unos mismos equipos. Esta es una metodología completamente original del autor, que no aparece en libros ni en artículos de revista sobre Evaluación de Proyectos, Matemáticas Financieras, Diseño de Plantas y disciplinas análogas. El método ha sido aplicado por el autor al planeamiento y al dimensionamiento de varias plantas de industrias de procesos en Colombia.

PALABRAS CLAVE: Economía Matemática, Economía Industrial, Diseño de Plantas, Evaluación de Proyectos, Matemáticas Financieras.

ABSTRACT: This paper presents and explains a mathematical model for planning and dimensioning in an optimal way many kinds of industries which use processes of transformation of matter (so called process industries) and which produce several products using some determinate pieces or set of pieces of equipment. This methodology is completely original of the author and it does not appear in any book or article on Proyect Evaluation, Financial Mathematics, Plant Design and related subjects. The method has been applied by the author to the planning and dimensioning of several plants in process industries in Colombia.

KEY WORDS: Mathematical Economics, Industrial Economy, Plant Design, Project Evaluation, Financial Mathematics

1. INTRODUCCIÓN

Un aspecto de los proyectos industriales y de los de obras públicas al cual los analistas suelen darle poca atención es el de determinar cuál es la magnitud óptima de la obra que se propone construir. Es evidente que si la obra es muy pequeña, no alcanzará a cumplir los objetivos que se esperan de ella y que su producción de bienes o de servicios será insuficiente para atender a las demandas que se requiere satisfacer. Y que, si es demasiado grande, ello implicará un despilfarro de capital y producirá costos financieros o de capital que serán excesivamente altos. Debe existir, entonces un tamaño intermedio, ni demasiado pequeño ni demasiado grande, que permita atender adecuadamente la demanda que se prevé, sin incurrir en inversiones excesivas de capital y minimizando los costos financieros del bien o servicio que el proyecto va a producir.

En este artículo se presenta un método analítico para determinar la capacidad óptima de un proyecto de fábrica cuando ésta va a producir varios productos cuyo mercado se puede pronosticar cuantitativamente con suficiente fiabilidad, y en cuya producción predomina el concepto que los economistas llaman "las economías de escala". Este concepto aparece en Microeconomía pero muchos ingenieros lo conocen también como aquella situación en que la tecnología de una cierta industria o actividad económica permite que las unidades de producción de gran tamaño (como máquinas grandes) puedan construirse o adquirirse con un valor de inversión que es menor por unidad de capacidad que una unidad de producción pequeña. Este es el caso en muchísimos casos concretos de máquinas, o fábricas, o instalaciones, tales como refinerías de petróleo, destilerías de alcohol, motores eléctricos de inducción, locomotoras diesel, calderas acuatubulares, alternadores eléctricos, hornos de inducción para fundir metales, reactores químicos standard, plantas de ácido sulfúrico por contacto y un sinnúmero de otras unidades de producción (especialmente cuando en ellas se realiza un proceso químico o físico-químico).

2. CAPACIDAD DE MÁQUINAS Y SU COSTO

Hay diferentes maneras, según la tecnología del proyecto en cuestión, como se puede medir la capacidad de producción Q de una planta industrial, de una máquina, o, en general, de una unidad de producción. Puede ser en toneladas diarias de producto; o en litros de cierto insumo líquido por unidad de servicio; o en kilovatios de potencia eléctrica que requiera; o en *Btu* de calor que desprenda por hora; o en calorías que desprenda por día, etc. según el producto en cuestión y según la tecnología que se use para producirlo. En general, el costo de inversión (K) en la máquina o fábrica que se proyecta, está directamente relacionado (o correlacionado, si se quiere) con la capacidad (Q) del mismo: entre mayor sea la capacidad (Q) del proyecto, su costo como inversión (K) es mayor, y recíprocamente. Es decir, que entre una unidad grande, con capacidad Q_1, y que cuesta K_1, y una unidad pequeña, con capacidad Q_2 y que cuesta K_2, se cumple que

$$Q_1 > Q_2 \Leftrightarrow K_1 > K_2$$

Esta es una realidad empírica, obvia y universal en los mercados de casi todos los bienes de capital conocidos[1]. Pero también ocurre en estos mercados de maquinaria que:

$$K_1/K_2 < Q_1/Q_2 \text{ o sea que}$$

$$K_1/Q_1 < K_2/Q_2$$

Así por ejemplo: un horno rotatorio a carbón para hacer 1000 toneladas/día de cemento gris, vale bastante menos que 10 hornos del mismo tipo, con capacidad de 100 toneladas/día, cada uno.

La situación que se plantea cuando se va a entrar a producir un bien o servicio en una nueva instalación (o nueva máquina), casi siempre, es que en los primeros tiempos (los del próximo futuro), la demanda irá creciendo con el transcurso del tiempo, sin copar del todo la capacidad Q de la instalación, y según un régimen cuantitativo de crecimiento que podemos y sabemos pronosticar mediante un

[1] Casi la única excepción importante es el mercado de equipos electrónicos del mundo.

buen estudio del mercado[2]. En la situación que tratamos se puede siempre estimar o prever al futuro el costo variable por unidad de producto que se va a fabricar o servicio que se va a dar, así como los gastos fijos de la empresa, y el precio a que se van a vender los materiales, o artículos, o servicios que se van a producir.

3. DATOS, CONDICIONES Y PARÁMETROS DE ESTE PROYECTO

El proyecto de que trata este artículo se adelanta bajo las siguientes bases, hipótesis, datos, supuestos y condiciones:

- Se trata de producir cuatro productos que llamaremos $Pr-1$, $Pr-2$, $Pr-3$ y $Pr-4$.
- El período de vida útil de la planta será, por lo menos, de 20 años $(T = 20\ años)$.

  Se le llama también horizonte de tiempo del proyecto.
- Acogiéndose a normas legales existentes en Colombia respecto a plantas industriales que trabajen 24 horas diarias (como deberá hacerlo ésta), ésta se va a depreciar en 10 años. O sea:

Período de depreciación de activos menores:	$T_m = 10\ años$
Período de depreciación de maquinaria:	$T_q = 10\ años$
Período de depreciación de edificios:	$T_e = 10\ años$
Tasa de depreciación de activos menores:	$d_m = 1/T_m = 0.10\ año^{-1}$
Tasa de depreciación de maquinaria:	$d_q = 1/T_q = 0.10\ año^{-1}$
Tasa de depreciación de edificios:	$d_e = 1/T_e = 0.10\ año^{-1}$

- El costo de oportunidad del dinero, a largo plazo, o tasa de descuento de los valores futuros, es del 6% anual acumulativo y en descuento continuo: $r = 0.06\ año^{-1}$.
- La producción y las ventas de los cuatro productos al momento de arrancar la planta y de salir al mercado son:

$$M_{01} = 6300\ toneladas\ /\ año\ de\ Pr-1$$
$$M_{02} = 2100\ toneladas\ /\ año\ de\ Pr-2$$
$$M_{03} = 1600\ toneladas\ /\ año\ de\ Pr-3$$
$$M_{04} = 3300\ toneladas\ /\ año\ de\ Pr-4$$

- La capacidad de una planta de este tipo es la del horno eléctrico en que se fabrican los cuatro productos, y se mide en megavatios. Esa capacidad da los siguientes rendimientos en los cuatro productos.

$$b_1 = 0.3125\ toneladas\ de\ Pr-1/MWh\ de\ energía$$
$$b_2 = 0.1052\ toneladas\ de\ Pr-2/MWh\ de\ energía$$
$$b_3 = 0.2000\ toneladas\ de\ Pr-3/MWh\ de\ energía$$
$$b_4 = 0.1818\ toneladas\ de\ Pr-4/MWh\ de\ energía$$

- Los cuatro productos pueden producirse independientemente unos de otros, pero los estudios de mercado han mostrado que, cuando la planta esté copada en su capacidad, y la producción de los cuatro productos no pueda ya responder a aumentos de las cuatro demandas de los respectivos mercados, la mezcla óptima económica de productos será:

  $f_1 = 0.35$ o sea 35% de la capacidad total Q en producir *Pr*-1

  $f_2 = 0.30$ o sea 30% de la capacidad total Q en producir *Pr*-2

  $f_3 = 0.10$ o sea 10% de la capacidad total Q en producir *Pr*-3

  $f_4 = 0.25$ o sea 25% de la capacidad total Q en producir *Pr*-4
- Los precios de venta netos, después de gastos variables y de descuentos y costos proporcionales a ellos (que denotamos p_i), y los costos de sus insumos, comisiones de ventas, energía eléctrica y otros variables, por tonelada de cada

[2] Esto lo hacen los mercadólogos que trabajan en el proyecto.

producto (que denotamos por q^i) son los siguientes:

Para *Pr*-1: $p_1 = 770$ dólares/tonelada y $q^1 = 485$ dólares/tonelada

Para *Pr*-2: $p_2 = 1223$ dólares/tonelada y $q^2 = 545$ dólares/tonelada

Para *Pr*-3: $p_3 = 862$ dólares/tonelada y $q^3 = 535$ dólares/tonelada

Para *Pr*-4: $p_4 = 800$ dólares/tonelada y $q^4 = 400$ dólares/tonelada

– Por lo tanto, los valores agregados por unidad de producto, son, respectivamente:

$v_1 =$ 285 dólares/tonelada

$v_2 =$ 688 dólares/tonelada

$v_3 =$ 327 dólares/tonelada

$v_4 =$ 400 dólares/tonelada

4. LA LEY DE WILLIAMS

En 1947 un ingeniero industrial norteamericano, R. Williams, publicó un descubrimiento suyo según el cual cuando se comparan en su capacidad (*Q*) y en su precio (*K*) varias unidades de distinto tamaño de una misma máquina o instalación, se encuentra que se cumple la relación empírica

$$K = A\,Q^{\alpha} \qquad (01)$$

donde α es un número fraccionario menor que 1.00 (uno) y que frecuentemente está alrededor de 0.6 ó 0.65. La constante *A* es propia de cada tipo de máquina (tractor, motor eléctrico, reactor químico, etc.). Posteriormente se ha visto en muchísimos casos que ésta relación vale también para muchos tipos de instalaciones industriales, cuando se trata con distintos tamaños de un cierto tipo tecnológico de ellas. Por eso admitiremos esta ley empírica para nuestro caso. El valor de α para esta clase de equipos se averigua en el mercado y vale α=0.9.

5. EL PROBLEMA

Consideremos pues que se trata de decidir la capacidad *Q* óptima económica que debe tener la planta que fabrique los cuatro productos ya dichos. Cada uno de éstos tiene unos requerimientos propios respecto a la capacidad de la presunta planta, exigencia que suele expresarse en la duración de tiempo que una unidad de *Q* tiene que trabajar para producir una unidad física de cada producto. Más arriba se dieron los rendimientos de la planta en estos cuatro productos.

6. COSTOS Y GASTOS

Los gastos de esta planta, incluyendo salarios y demás costos laborales van a ser todos gastos fijos, y van a valer, en moneda constante:

F= 300 000 dólares/año

Los gastos variables (no incluyendo insumos, energía y cargos proporcionales, que ya se consideraron) son el 10% de las ventas y ya están cargados a los precios y, por ende también a los valores agregados.

7. PROYECCIÓN DE LA DEMANDA

Los estudios previos de la demanda permiten pronosticar que la demanda de los cuatro productos va a crecer de manera geométrica, siguiendo las funciones

$$M_1(t) = M_{01}e^{k_1 t}$$
$$M_2(t) = M_{02}e^{k_2 t}$$
$$M_3(t) = M_{03}e^{k_3 t}$$
$$M_4(t) = M_{04}e^{k_4 t}$$

siendo las cuatro tasas de crecimiento iguales entre ellas:

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 5\%$ anual = 0.05/año

Puesto que estas tasas son relativamente lentas, las funciones exponenciales se pueden aproximar por parábolas de segundo grado, es decir:

$$M_1(t) = M_{01}\ e\,k_1 t \doteq M_{01}\left(1 + k_1 t + k_1^2 t^2/2\right)$$

$$M_2(t) = M_{02}\ e\,k_2 t \doteq M_{02}\left(1 + k_2 t + k_2^2 t^2/2\right)$$

$$M_3(t) = M_{03}\ e\,k_3 t \doteq M_{03}\left(1 + k_3 t + k_3^2 t^2/2\right)$$

La planta trabajará holgadamente, con capacidad sobrante, hasta el momento $t = \tau$ cuando ocurra que las cuatro producciones copen su capacidad, lo que será cuando

$$\sum_{i=1}^{4} M_i(\tau)/b_i = Q$$

o sea cuando

$$\sum_{i=1}^{4} \left[M_{0i}\left(1+k\,\tau+k^2\,\tau^2/2\right)\right]/\,b_i = Q$$

(02)

Llamemos

$$M_{1i} = M_{0i}\cdot k$$

$$M_{2i} = M_{0i}\cdot k^2/2$$

y pongamos por abreviar

$$\sum_{i=1}^{4} M_{0i}/b_i = B_0$$

$$\sum_{i=1}^{4} M_{1i}/b_i = B_1$$

$$\sum_{i=1}^{4} M_{2i}/b_i = B_2$$

De este modo la ecuación que fija el momento $t=\tau$ cuando la planta queda saturada, puede escribirse

$$B_0 + B_1\cdot\tau + B_2\cdot\tau^2 = \qquad (03)$$

Los coeficientes B_0, B_1, B_2 son evidentemente positivos y por eso Q es mayor que B_0. Resolviendo esta ecuación de segundo grado en τ se tiene

$$\tau = -B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4\,B_2\,(Q-B_0)}\;/\,(2\,B_2)$$

que es la raíz real y positiva de la ecuación.

$Si\,P_i\,(t)$ es la producción del producto i-ésimo, las utilidades por unidad de tiempo, antes de impuestos, pueden escribirse:

$$U(Q,t) = \begin{cases} U_1(t) = \sum M_i\,(t)\cdot v_i - F - d\left(AQ^{\alpha}+K_2\right), \\ \text{para } 0<t<\tau \\ U_2(t) = \sum P_i\,(t)\cdot v_i - F - d\left(AQ^{\alpha}+K_2\right) \\ \text{, para } \tau<t<T_e = 10 \text{ años} \\ U_3(t) = \sum P_i\,(t)\cdot v_i - F\,, \\ \text{para } T_e < t < T = 20 \text{ años} \end{cases}$$

en donde K_2 es el valor de los activos depreciables que no dependen del tamaño Q del proyecto.

Por lo tanto el valor presente de las utilidades de los 20 años, después de impuestos, es:

$$Y(Q,t) = \Big[\int_0^{\tau} U_1(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + \int_{\tau}^{T_e} U_2(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + \int_{T_e}^{T} U_3(t)\cdot e^{-rt}\Big](1-x) \qquad (04)$$

en donde x es la tasa del gravamen del impuesto sobre la renta.

Para no complicar exageradamente el ejemplo, estamos admitiendo que en toda la historia del proyecto, posterior a $t=\tau$, las proporciones de los cuatro productos en el "product mix" van a ser constantes después de copar la planta, y que son las que ya se indicaron.

Volviendo al problema numérico, calculemos los coeficientes que necesitamos para hallar a τ. Ellos son:

$M_{11} = M_{01}\cdot k_1 = 6300\cdot 0.05$ ton/año^2 = 315 ton/año^2

$M_{12} = M_{02}\cdot k_2 = 2100\cdot 005$ ton/año^2 = 105 ton/año^2

$M_{13} = M_{03}\cdot k_3 = 1600\cdot 0.05$ ton/año^2 = 80 ton/año^2

$M_{14} = M_{04}\cdot k_4 = 3300\cdot 0.05$ ton/año^2 = 165 ton/año^2

$M_{21} = M_{01}\cdot k_1^2 = 6300\cdot\left(0.05^2/2\right)$ ton/año^2 = 7.82 ton/año^2

$M_{22} = M_{01}\cdot k_{21}^2 = 2100\cdot\left(0.05^2/2\right)$ ton/año^2 = 2.62 ton/año^2

$M_{23} = M_{03}\cdot k_3^2 = 1600\cdot\left(0.05^2/2\right)$ ton/año^2 = 2.00 ton/año^2

$M_{24} = M_{04}\cdot k_4^2 = 3300\cdot\left(0.05^2/2\right)$ ton/año^2 = 4.12 ton/año^2

De estos resultados obtenemos:

$$B_0 = M_{01}/b_1 + M_{02}/b_2 + M_{03}/b_3 + M_{04}/b_4 =$$

$$(6300\cdot 3.2 + 2100\cdot 9.5 + 1602\cdot 5.0 + 3300\cdot 5.5)\cdot(MWh/año) = 7.56\;MW$$

$$B_1 = M_{11}/b_1 + M_{12}/b_2 + M_{13}/b_3 + M_{14}/b_4 = (315 \cdot 3.2 + 105 \cdot 9.5 + 80 \cdot 5.0 + 165 \cdot 5.5) \cdot$$

$$\left(MWh/año^2\right) = 0.378\ MW/año$$

$$B_2 = M_{21}/b_1 + M_{22}/b_2 + M_{23}/b_3 + M_{24}/b_4 = (7.82 \cdot 3.2 + 2.62 \cdot 9.5 + 2.00 \cdot 5.0 + 4.12 \cdot 5.5) \cdot$$

$$\left(MWh/año^3\right) = 0.0942\ MW/año^2$$

Entonces el valor agregado por año y por megavatio de capacidad en uso, cuando la planta se cope, y siga trabajando copada, es

$$Ve^* = f_1 \cdot v_1 \cdot b_1 + f_2 \cdot v_2 \cdot b_2 + f_3 \cdot v_3 \cdot b_3 + f_4 \cdot v_4 \cdot b_4 =$$
$$= (0.35 \cdot 2.85 \cdot 0.3125 + 0.30 \cdot 6.88 \cdot 1.1052 +$$
$$010 \cdot 3.27 \cdot 0.200 + 0.25 \cdot 400 \cdot 0.1818)\, dol/MW - hora$$
$$= 77.60\ dólares\ /\ MW - hora = 679\ 821\ dólares\ /\ MW - año$$

La duración como vida útil que se prevé para la planta es de T= 20 años.
Usaremos en este problema como criterio de optimización del proyecto para calcular su tamaño óptimo, el de hacer máximo el valor descontando de las utilidades de los 20 años, en valor presente, después de impuestos. Esto requiere, como bien se sabe, las dos condiciones

$$dY(Q,t)\ /\ dQ = 0 \qquad (05)$$

$$d^2\, Y(Q,t)\ /\ dQ^2 < 0 \qquad (06)$$

Cuando la planta esté copada (en $t = \tau$ y después de τ) se tendrá para la producción P_i de cada producto, que

$$\sum_{i=1}^{4} P_i\,(t)/b_i = Q$$

y la parte "o cuota" de cada producto en el "product-mix" será

$$f_i = P_i\,(t)\ /\ (b_i\, Q)$$

De manera que

$$P_i = Q\, b_i\ f_i$$

Ahora bien. La utilidad contable de los 20 años futuros, descontada a su valor presente en $t = 0$, y después de impuestos, vale

$$Y(Q) = (1-x)\Big\{ \int_0^{\tau} [D_0 + D_1 t + D_2 t_2 - F$$
$$-\left(K(Q) + K_2\right)/Te\Big] e^{-rt} \cdot dt$$
$$+ \int_{\tau}^{Te} \Big[\sum v_i\, Q F_i - F - \left(K(Q) + K_2\right)/\ Te\Big] e^{-rt} \cdot dt$$
$$+ \int_{Te}^{T} \Big[\sum v_i\, Q\, f_i - F\Big] e^{-rt} \cdot dt$$

o, lo que es lo mismo

$$Y(Q) = (1-x)\Big\{ \int_0^{\tau} \left(D_0 + D_1 t + D_2 t^2\right) e^{-rt} \cdot dt +$$
$$\int_{\tau}^{T} Ve^* \cdot Q \cdot e^{-rt} \cdot dt - F \int_0^{T} e^{-rt} \cdot dt - F$$
$$\int_0^{T} e^{-rt} \cdot dt -$$
$$-\left[\left(K(Q) + K_2\right)/\ Te\right] \int_0^{Te} e^{-rt} \cdot dt \Big\} \qquad (07)$$

Derivemos esta expresión respecto a Q, teniendo en cuenta la conocida Regla de Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \phi(\lambda, x)\, dx =$$
$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial \phi(\lambda, x)}{\partial \lambda}\, dx + \phi \frac{db}{d\lambda}$$
$$- \phi(\lambda, a) \frac{da}{d\lambda}$$

además de la condición de continuidad

$$D_0 + D_1 \cdot \tau + D_2 \cdot \tau^2 = Ve^* \cdot Q$$

Obtenemos así

$$dY(Q)\ /\ dQ =$$
$$(1-x)\Big\{\left(D_0 + D_1 \cdot \tau + D_2 \cdot \tau^2\right) e^{-r\tau}$$
$$(d\tau\ /\ dQ) + \int_{\tau}^{T} Ve^* \cdot e^{-rt} \cdot dt -$$
$$-Ve^* \cdot Q \cdot e^{-rt}\,(d\tau\ /\ dQ) - A \cdot \alpha \cdot Q^{\alpha-1}$$
$$\left(1 - e^{-rTe}\right)\ /\ (rTe) + \left(Ve^*/\ r\right)\left(e^{-r\tau} - e^{-rT}\right)$$

Sustituyendo lo anterior en la condición

$$dY(Q)\ /\ dQ = 0$$

y despejando a Q se obtiene

$$Q = \left[\frac{\alpha A}{Te\, Ve^*}\ \frac{1 - e^{-r\,Te}}{e^{-r\tau} - e^{-rT}}\right]^{1\ /\ (1-\alpha)}$$

o bien (omitiendo escribir las unidades para simplificar la escritura):

$$Q^{*\,0.1} = \frac{0.9 \cdot 3.7767 \cdot 10^6}{10 \cdot 679\ 821}\ \frac{1 - e^{-0.6}}{e^{-0.06\,\tau} - e^{-1.2}} = \frac{0.2255}{e^{-0.06\,\tau} - e^{-1.2}}$$

(08)

Dado que $Q(\tau = 0) = 0$ (como se ve más arriba), y que toma en $\tau \neq 0$ el valor

$$\left[\alpha A \Big/ \left(Te\, Ve^{*}\right)\right]\left(1-e^{-rTe}\right) \Big/ \left(e^{-r\tau}-e^{-rT}\right)$$

mientras que en $\tau=\infty$ toma el valor $+\infty$, se deduce que la ecuación

$$\tau=\frac{-B_1+\sqrt{B_1^2+4B_2\,(Q-B_0)}}{2B_2^2}$$

tiene una raíz real en el intervalo $(0,T)$ si y solo si

$$B_0^{1-\alpha}>\left[\alpha A \Big/ \left(Te\,Ve^{*}\right)\right]\left(1-e^{-rTe}\right) \Big/ \left(e^{-r\tau}-e^{-rT}\right)$$

como se ve en la figura anexa.

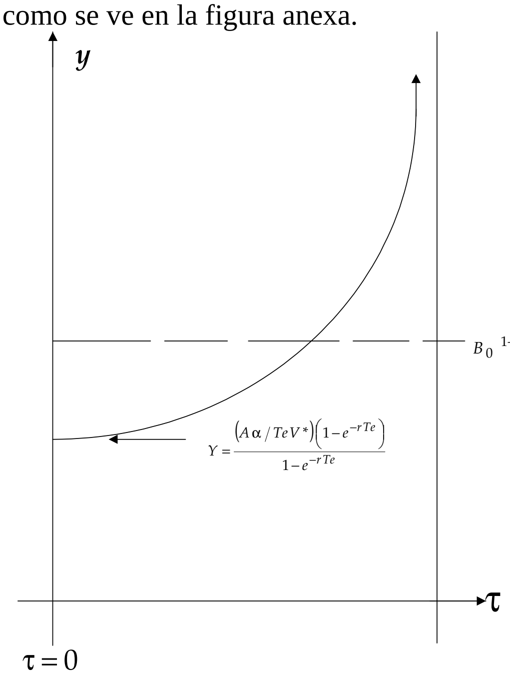

Figura. Variación de parámetros

Figure. Variation of parameters

Para verificar la segunda condición del óptimo, calculamos la segunda derivada de $Y\,(Q,t)$ respecto a *Y*, para obtener:

$$\frac{d^2\,Y(Q)}{d\,Q^2}=\frac{\alpha(1-\alpha)A}{TeQ^{2-\alpha}}\,\frac{1-e^{-rT}}{r}-Ve^{*}\,e^{-r\tau}\,\frac{d\tau}{dQ}=$$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha)AK}{TeQ^2}\,\frac{1-e^{-rT}}{r}-\frac{Ve^{*}}{2B_2\,\tau+B_1}\,e^{-r\tau}$$

Obsérvese que

$$2B_2\,\tau+B_1=d\,P\,(t=\tau)\,/\,dt$$

y además, que

$$Ve^{*}=\sum_{i=1}^{4} f_i\,v_i\,b_i=\left[U_1\,(Q,\tau)+F+(K_1+K_2)\,/\,Te\right]/\,Q$$

En este caso es posible calcular primero a τ que a *Q*, igualando las dos expresiones que ya hemos establecido para *Q*, esto es, escribiendo que

$$Q=B_0+B_1\,\tau+B_2\,\tau^2=7.56+0.378\,\tau+0.0942\,\tau^2$$

y teniendo en cuenta la ecuación (03), se puede escribir

$$\left(7.56+0.378\,\tau+0.0942\,\tau^2\right)^{0.1}=\frac{0.2255}{e^{-0.06}-e^{-1.2}}$$

exigiendo que la solución τ sea mayor que 0 (cero) y menor que 20 años.

Esta ecuación se resuelve por los conocidos métodos numéricos de Newton, "regula falsis" o bisección, o en el computador con el sencillo "paquete" de Mathcad. Así se obtiene que

$$\tau=12.84 \text{ años}$$

y la capacidad óptima es

$$Q^{*}=7.56+0.378\cdot 12.84+0.0942\cdot 12.84^2=27.94 \text{ MW}$$

El valor de la inversión total $K(Q)$ que es dependiente de *Q*, en esta planta, será

$$K_1=K(Q)=3.7763\cdot 10^6\cdot 27.94^{0.9} \text{ dólares}$$

$$=75.62\cdot 10^6 \text{ dólares}$$

Los coeficientes D_0, D_1, D_2 son:

$$D_0=\sum v_i\,M_{0i}$$

$$D_1=\sum v_i\,M_{1i}$$

$$D_2=\sum v_i\,M_{2i}$$

Además, al realizar las integraciones que se indican a continuación se encuentra que

$$\int_0^{\tau} D_0\,e^{-rt}\,dt=(D_0\,/\,r)\left(1-e^{-r\tau}\right);$$

$$\int_0^{\tau} D_1\cdot t\cdot e^{-rt}\cdot dt=(D_1\,/\,r)\left(1/r-e^{-r\tau}\,/\,r-\tau\,e^{-r\tau}\right)$$

$$\int_0^{\tau} D_2\cdot t^2\cdot e^{-rt}\cdot dt=(2\,D_2\,/\,r)$$

$$\left(1/r^2-e^{-r\tau}/r^2-\tau\,e^{-r\tau}/r-\tau^2\,e^{-r\tau}/2\right)$$

Luego las utilidades totales futuras de 20 años, descontadas en valor presente y después de impuestos, valen

$$Y(0)=\left\{(D_0 / r)\left(1-e^{-r\tau}\right)+(D_1/r)\left(1/r-e^{-r\tau} / r-\tau e^{-r\tau}\right)+\right.$$

$$+\left(2D_2 / r\right)\left(1/r^2-e^{-r\tau} / r^2-\tau e^{-r\tau} / r-\tau^2 e^{-r\tau} / 2\right)+$$

$$\left.+\left[\left(D_0+D_1\tau+D_2\tau^2\right)/r\right]\left(F/r\right)\left(e^{-rTe}-e^{-rT}\right)\right\}(1-x)$$

$$\left(e^{-r\tau}-e^{-rT}\right)-\left(F+K_1/Te\right)\left(1-e^{-rTe}\right)/r-$$

Los valores de los coeficientes D_0, D_1, D_2, son:

D_0 = 285 (dol/ton) (6300 ton/año) + 688 (dol/ton) (2100 ton/año) + (327 dol/ton) (1600 ton/año) + (400 dol/ton) (330 ton/año) = 3'895 500 dol/año

D_1 = 285 (dol/ton) (315 ton/año^2) + 688 (dol/ton) (105 ton/año^2) + 327 (dol/ton) (80 ton/año^2) + 400 (dol/ton) (165 ton/año^2 = 254 175 dol/año^2

D_2 = 285 (dol/ton) (7.87 ton/año^3) + 688 (dol/ton) (ton/año^3)+ 327 (dol/ton) (2.00 ton/año^3) + 688 (dol/ton) (4.12 ton/año^3) = 7 534 dol/año^3

Así que el valor presente de la utilidades futuras, antes de impuestos, será:

$$\left[\frac{3'895\,500}{0.06}\left(1-e^{-0.06\cdot 12.84}\right)+\right.$$

$$\frac{254\,175}{0.06}\left(\frac{1}{0.06}+\frac{e^{-0.7704}}{0.06}-0.06\cdot e^{-0.7704}\right)+$$

$$+\frac{2\cdot 7534}{0.06}\left(\frac{1}{0.062}+\frac{e^{-0.7704}}{0.06^2}-12.84\,\frac{e^{-0.7704}}{0.06}-164.8656\,\frac{e^{-0.7704}}{2}\right)+$$

$$+\frac{3'895\,500+254\,175\cdot 7\,534\cdot 1'648\,656}{0.06}$$

$$\left(e^{-0.7704}-e^{-1.2}\right)-\frac{300\,000+10.5\cdot 10^6}{0.06}$$

$$\left.\left(1-e^{-0.6}\right)-\frac{300\,000}{0.06}\left(e^{-0.6}-e^{1.2}\right)\right] \text{ dólares } =$$

= (34'875.898 + 103'164.105 + 67'590.958 + 22'631.960 -
- 81'213.905 - 1'238.087) dólares =
145'810.929 dólares

de lo cual queda, después de impuestos

$$(1-0.38)\cdot 145'810.929 \text{ dólares } =$$

90'402.775 dólares

De acuerdo con la expresión que ya obtuvimos para la segunda derivada de Y respecto a Q, el valor de ella en el punto Q^* que hace máxima a $Y(Q)$ es:

$$\frac{d^2Y(Q)}{d\,Q^2}=\frac{\alpha\,(1-\alpha)\,A}{Te\,Q^{2-\alpha}}\,\frac{1-e^{-rTe}}{r}-V^*\,e^{-r\tau}\,\frac{d\tau}{dQ}=$$

$$=\frac{\alpha\,(1-\alpha)\,K}{Te\,Q^2}\,\frac{1-e^{-rTe}}{r}-\frac{V^*}{2B_2\,\tau+B_1}=$$

$$=\left[\frac{0.9\cdot 0.1\cdot 75.62\cdot 10^6}{10\cdot 27.94^2}\,\frac{1-e^{-0.6}}{0.06}-\frac{679\,821}{2\cdot 0.0942\cdot 12.84+0.378}\right]$$

$$=\frac{dólares-año}{MW^2}-236\,492.85\left(dólares-año/MW^2\right)$$

que es negativo y que confirma que Q^* es efectivamente el óptimo para $Y(Q)$.

Si se quiere obtener el valor presente descontado de la generación de fondos que va a producir el proyecto, basta sumarle a $Y(t)$ el valor presente de las futuras depreciaciones. Así se obtiene

$$N=Y+\left(d\cdot K/r\right)\left(1-e^{-rTe}\right)=\left(145'810\,929+56'864.773\right)$$

dólares = 202'675 702 dólares

El procedimiento para resolver un problema como el anterior sigue las siguientes etapas que constituyen una metodología y un algoritmo para este caso y para casos análogos:

a. Examinar detalladamente todos los aspectos técnicos y económicos del proyecto de planta.
b. Establecer cuantitativamente las proyecciones de crecimiento de la demanda, de la producción y de las ventas esperadas, a corto, mediano y largo plazo. Supondremos en lo que sigue que, en un caso específico dado (como el del ejemplo que se acaba de dar) esas proyecciones son representables y expresables por una función cuadrática del tiempo o por una función exponencial o lineal del mismo.
c. Establecer en sus respectivos mercados los precios netos p_i de los productos (restándoles los gastos de ventas, los costos variables, los descuentos, etc.), los precios de los insumos q_j y los valores agregados v_i por unidad física de cada producto.
d. Confirmar que $K(Q)$ cumpla la Ley de Williams y determinar numéricamente los parámetros A y α de esa ley, mediante estudios del mercado de

equipos y de bienes de capital para este tipo de plantas.

e. Determinar por medio de estudios técnicos cuáles son los valores numéricos de los valores de los coeficientes b_i.

f. Por estudios económicos y técnicos de la planta que se proyecta, determinar los gastos fijos por unidad de tiempo *F*, el período de depreciación Te y la vida útil que se espera de la planta *T*. Calcular el coeficiente de depreciación $d = 1/Te$.

g. Calcular numéricamente los coeficientes B_0, B_1, B_2 mediante las ecuaciones que los definen.

h. Calcular o definir los factores f_i que expresan la participación de cada producto en el "product-mix" que se desea constituir.

i. Calcular el valor V^* que da el valor agregado por unidad de capacidad (como unidad de potencia y por unidad de tiempo) de la planta, cuando ésta ya esté copada en su capacidad.

j. Mediante el estudio financiero del mercado monetario, establecer el valor de la tasa r de descuento continuo para valores futuros en dinero.

k. Resolver numéricamente las ecuaciones simultáneas

$$\tau = \left(-B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4\,B_2\,(Q - B_0)}\right) \Big/ (2\,B_2)$$

$$Q = \left[\frac{\alpha \cdot \alpha \cdot A}{V^*} \, \frac{1 - e^{-r\,Te}}{e^{-r\,\tau} - e^{-r\,T}}\right]^{1/(1-\alpha)}$$

para obtener la capacidad óptima Q^* y su plazo τ para coparse. Esta solución se puede obtener usando métodos numéricos bien conocidos o usando un software de cálculo numérico como el "mathcad" o el "mathlab".

l. Verificar que la función que da a $d^2\,Y(Q) \big/ d\,Q^2$ en $Q = Q^*$ sea negativa.

m. Calcular los parámetros D_0, D_1 y D_2 mediante las fórmulas que los definen.

n. Calcular el valor presente óptimo de las utilidades futuras, después de impuestos, en la vida útil desde $t = 0$ hasta $t = T$, descontadas al momento del arranque de la planta, es decir, valorar numéricamente la expresión $Y\left(Q^*\right)$.

o. Decidir administrativamente si la cantidad así encontrada es satisfactoria económicamente para los inversionistas.

Este modelo puede generalizarse en varios sentidos, como lo podrá comprobar el lector interesado en el tema.

REFERENCIAS

Bibliografía consultada sin encontrar referencias útiles

[1] ALLEN, R.G.D. Economía Matemática.2 ed. Madrid, Aguilar. 1967. 931 p.

[2] ARBOLEDA, Benjamín. Ingeniería económica: métodos para el análisis de alternativas de inversión. Medellín: Asociación de Ingenieros Industriales de la Universidad de Antioquia. 1980. 502 p.

[3] BACA URBINA, Gabriel. Evaluación de proyectos. 3. ed. Bogotá: Mc Graw-Hill, 1997, 339 p.

[4] BATTERSBY, Albert. Planificación y Programación de Proyectos Complejos. 2 ed. Barcelona: Ariel, 1973. 431 p.

[5] BEHRENS, W y P.M. Hawranek. Manual para la preparación de estudios de viabilidad industrial. Viena: Organización de las Naciones Unidas para el Desarrollo Industrial, 1994. 400 p.

[6] BEHRENS, W. Manual para la preparación de estudios de viabilidad industrial. Viena: ONUDI, 1994. 400 p.

[7] BLANK, Leland y JACQUIN Anthony J. Ingeniería económica. México: Mc Graw-Hill, 1996. 546 p.

[8] CANADA, John R.; SULLIVAN William G. y WHITE John A. Análisis de la inversión de capital para ingeniería y administración. 2 ed. Bogotá: Prentice Hall Hispanoamericana, 1997. 566 p.

[9] CASTRO RODRÍGUEZ, Raul y MOKATE Karen Marie. Evaluación económica y social de proyectos de inversión. Bogotá: Uniandes, 1998. 424 p.

[10] CORRONS Prieto, Luis. Técnicas de ingeniería y tecnología de la producción. Bilbao: Ediciones Deusto, 1979. 435 p.

[11] CREUES SOLÉ, Antonio. Fiabilidad y seguridad de procesos industriales. Barcelona: Boixereu Editores, 1991. 124 p.

[12] CHOULEUR, Jacques. Las técnicas matemáticas en la empresa. Bilbao: Ediciones Deusto, 1968. 485 p.

[13] COLOMBIA. Departamento Nacional de Planeación. Manual metodológico para la identificación y evaluación de estudios de preinversión. Bogotá: Banco de la República, 1994. s.p.

[14] GRANT, Eugene L.; GRANT, Ireson; y LEAVENWORTH, Richard. Principios de ingeniería económica. México: CECSA, 1984. 710 p.

[15] INFANTE VILLARREAL, Arturo. Evaluación económica de proyectos de inversión. 3 ed. Cali: Banco Popular, 1977. 236 p.

[16] KING, Charles. Quantitative analysis for managerial decisions. Reading, Massachusets: Addison Wesley, 1976. 552 p.

[17] MARTÍNEZ ARIAS, César. Evaluación integrada de proyectos de inversión. Medellín: Universidad Pontificia Bolivariana. Facultad de Ingeniería Mecánica, 2000. 518 p.

[18] ONUDI. Manual para la preparación de estudios de viabilidad industrial. New York: ONUDI, 1978. 268 p.

[19] PARK, Chan J.; SHARP-BETTE, Gunther P. Advanced engineering economics. New York: John Wiley and Sons, 1990. 740 p.

[20] RIGGS, James L. Modelos de decisión económica para ingenieros y gerentes de empresa. Madrid: Alianza Editorial, 1973. 508 p.

[21] ROMERO, C. Modelos económicos en la empresa. Bilbao: Ediciones Deusto, 1977.

[22] SAPAG CHAIN, Nassir y SAPAG CHAIN Reynaldo. Preparación de proyectos. 4 ed. Bogotá: Mc Graw-Hill, 2000. 439 p.

[23] TAYLOR, George A. Ingeniería económica. México: Limusa, 1978. 556 p.

[24] THUESEN, H.G.; FABRICKY, W.J.; y THUESEN, G.J. Ingeniería económica: edición revisada del proyecto de ingeniería. Bogotá: Prentice Hall, 1981. 592 p.

[25] TYLER, Chaplin. Chemical engineering economics. New York: Mc Graw-Hill, 1948. 321 p.

[26] VARELA, Rodrigo. Evaluación económica de inversiones. Cali: Editorial Norma, 1993. 512 p.

[27] VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas financieras. México: Grupo Editorial Iberoamericana, 1993. 776 p.

Nota: Ninguna de estas publicaciones contiene nada sobre el tema tratado en este documento, a pesar de que son numerosas publicaciones, a pesar de que son libros muy conocidos, y a pesar de la importancia del tema tratado aquí.

Bibliografía con algunas referencias útiles

[28] COURANT, Richard y FRITZ, John, Introduction to calculus and analysis. New York: Interscience, 1964. 661 2 volúmenes.

[29] RIGGS, James L. Modelos de decisión económica. Madrid: Alianza Editorial, 1973. 508 p.

[30] HENDERSON, James M. y QUANDT, Richard E. Microeconomic theory: a mathematical aproach. New York: Editorial, 1958. 291 p.

[31] FERGUSON, C.E. y GOULD, J.P. Theoria microeconomica. Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1978. 551 p.

[32] KAUFMANN, Arnold. The science of decision-making. Londres; World University Library, 1968. 253 p.