

# Unidad curricular sobre el concepto de probabilidad en el contexto de la enseñanza para la comprensión<sup>1</sup>

*Diana Patricia Acevedo Vélez<sup>2</sup>*

*Carlos Mario Jaramillo López<sup>3</sup>*

*Pedro Vicente Esteban Duarte<sup>4</sup>*

## Resumen

Gracias a la utilidad que la estadística y la probabilidad tienen en la vida cotidiana y en la comprensión de las ciencias, algunos investigadores (Batanero, 2000; Batanero & Godino, 2005; Zapata Cardona, 2008; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997) han insistido en incluir su estudio en los currículos de matemáticas en las escuelas de todo el mundo. El propósito de este artículo es compartir una experiencia de aula, resultado de un trabajo de investigación (Acevedo, 2011), en el cual se diseñó una unidad curricular con el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) sobre el concepto de probabilidad.

Este enfoque facilita la construcción de estrategias que potencializan el desarrollo de la comprensión, generando en el estudiante la motivación e interés hacia el aprendizaje de la probabilidad a partir de las relaciones que puede establecer entre este concepto y su cotidianidad por la posibilidad

---

1 Este artículo es producto del trabajo de investigación *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado*, que se desarrolló en el marco del programa de maestría en Educación, en la línea de Matemáticas, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

2 Magíster en Educación por la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: [diana.acevedo@colsanignacio.edu.co](mailto:diana.acevedo@colsanignacio.edu.co)

3 Doctor en Ciencias Matemáticas. Profesor Titular del departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: [ama@matematicas.udea.edu.co](mailto:ama@matematicas.udea.edu.co)

4 Doctor en Ciencias Matemáticas. Profesor Titular del departamento de Ciencias básicas de la Universidad EAFIT. Correo electrónico: [pesteban@eafit.edu.co](mailto:pesteban@eafit.edu.co)

de realizar interpretaciones y análisis de fenómenos aleatorios, que le proporcionan herramientas para hacer predicciones y tomar decisiones.

La unidad curricular se construyó, a través del trabajo directo, con un grupo de estudiantes de décimo grado de una institución educativa de Medellín. Esta experiencia permitió una aproximación a la caracterización de la comprensión del concepto objeto de estudio.

**Palabras claves:** Enseñanza para la Comprensión, unidad curricular, comprensión, probabilidad.

### A curriculum unit on the concept of probability in the context of teaching for understanding

#### Abstract

Thanks to the usefulness of statistics and probability in everyday life and in the understanding of sciences, some researchers (Batanero, 2000; Batanero & Godino, 2005; Zapata Cardona, 2008; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997) have insisted in including its study in mathematics syllabuses in schools around the world. The purpose of this article is to share a classroom experience as a result of a research project (Acevedo, 2011) that designed a curriculum unit with a focus on teaching for understanding (TfU) on the concept of probability.

This approach facilitates the construction of strategies that strengthen understanding, thus generating motivation and interest among students in learning probabilities from the relationships they can establish between this concept and their daily lives due to the possibility of interpretations and analysis of random phenomena that provide them with tools to make predictions and make decisions.

The curricular unit was built through direct work with a group of tenth graders from a school in Medellín. This experience allowed a characterization of the understanding of the concept under study.

**Key words:** teaching for understanding, curriculum unit, comprehension, probability.

## Introducción

La importancia de investigar la forma como comprenden los estudiantes el concepto de probabilidad radica en la necesidad actual de la formación de futuros profesionales y de ciudadanos, que deben tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. En la literatura especializada se muestran las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria y de los primeros años de universidad en la resolución de problemas relacionados con este concepto (Fernández, 2001; Batanero, 2005; Barragués & Guisasaola, 2002, 2006). Pero poco se ha escrito sobre cómo los estudiantes lo pueden comprender de una forma adecuada para aplicarlo en diversas situaciones de su contexto.

Este artículo pretende aportar a los docentes una herramienta de planificación y de diseño de prácticas

de aula, llamada *unidad curricular*, que busca fomentar la comprensión del concepto de probabilidad a través de los cuatro elementos de la comprensión que plantea la Enseñanza para la Comprensión (EpC): *tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua y evaluación final*, con el fin de potencializar las cuatro dimensiones de la comprensión: *contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación*. Las actividades, que componen dicha unidad curricular, se enfocan desde los distintos significados que históricamente se le ha dado a la probabilidad (subjetivista, clásico, frecuencialista y axiomático), como una manera de ampliar la visión de los estudiantes y facilitarles unas herramientas para comprender, desde distintas perspectivas, el concepto de probabilidad. Esta unidad curricular hace parte del trabajo de investigación «Comprensión del concepto de probabilidad», que caracterizó la comprensión del

concepto en estudiantes de décimo grado. Es una herramienta que ha sido probada en el aula y que los docentes podrían tomar como referencia para construir sus propias prácticas.

## Marco de referencia

Investigaciones actuales han revelado que la comprensión del concepto de probabilidad por parte de los estudiantes viene acompañada de dificultades de diversa índole: errores al resolver problemas de probabilidad y su relación con los distintos significados del concepto a través de la historia (Batanero, 2005), ideas alternativas a las formales sobre el mismo concepto, aun después de la instrucción (Fernández, 2001; Barragués & Guisasola, 2002), visión determinista del mundo que impide dar el paso de lo intuitivo a lo formal (Batanero & Godino, 2005), heurísticos y sesgos al hacer investigación sobre los juicios y la toma de decisiones (Scholz, 1991; Muñoz, 1998; Sáenz, 1998; Serrano *et ál.*, 1996, 1998, citados por Barragués & Guisasola, 2002). Otras investigaciones se han centrado en el proceso de enseñanza, entre las cuales se encuentran algunas propuestas didácticas para el desarrollo de los contenidos mínimos a nivel conceptual, procedimientos y actitudes en los cursos de estadística y probabilidad (Nortes Checa, 1998). También Batanero & Díaz (2005) proponen, en este sentido, un trabajo por proyectos como estrategia para el desarrollo de las clases. Insunza, Gastélum & Álvarez (2009) desarrollaron un *software* para favorecer el aprendizaje y el razonamiento probabilístico desde una perspectiva frecuentista. Además, Batanero (2003) plantea las simulaciones en los experimentos aleatorios como un instrumento que permita a los estudiantes explorar y descubrir conceptos y principios relacionados con el azar y la probabilidad.

Todas estas propuestas son aportes válidos para la enseñanza de la probabilidad; pueden ser tenidos en cuenta cuando se trabaja con un marco conceptual como el de la EpC, que además de dar un aporte teórico sobre la comprensión, da a los profesores herramientas para la planificación y diseño de sus prácticas de aula para fomentar la comprensión. La EpC surge de la vivencia de los profesores en el aula; por lo tanto, la teoría y la práctica están estrechamente ligadas, pero claramente diferenciadas, de tal manera que la teoría ilumina la práctica y la práctica nutre la teoría. Con este paradigma de trabajo, no se pretende que los profesores copien un modelo sino que exploren y reflexionen sobre sus propios contextos,

realidades, intereses y necesidades para transformar sus prácticas educativas. Utilizando los elementos teóricos de este marco conceptual se logró construir una caracterización del proceso de comprensión del concepto de probabilidad a través de cuatro niveles de comprensión (ingenuo, principiante, aprendiz y experto) para cada una de las dimensiones de la comprensión (contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación), como un aporte teórico que puede servir a los docentes en el momento de construir sus experiencias de aula, para que todas ellas estén dirigidas a que el estudiante avance de un nivel a otro de comprensión. En este artículo se presentará lo correspondiente a la aplicación de los elementos de la comprensión mediante una unidad curricular.

Esta unidad curricular tiene por objetivo favorecer la comprensión del concepto de probabilidad. Desde la EpC se entiende la comprensión como esa «capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera» (Blythe & Perkins, 1999: 39). Lo anterior implica una visión de la comprensión vinculada con el “desempeño”, es decir, la comprensión de un estudiante se evidencia según sus acciones. Estas acciones o desempeños deben demostrar lo que sabe y además aplicarlo de forma novedosa. Por eso, cuando se quiere apreciar la comprensión de un estudiante en un momento determinado, se le pide que «haga algo que ponga su comprensión en juego, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, armando un producto» (Perkins, 1999: 71). Lo que los estudiantes respondan frente a estas actividades no solo demostrará su nivel de comprensión, sino que además les puede hacer avanzar. El hecho de enfrentar nuevos desafíos puede llevarlos a obtener mejores comprensiones del concepto estudiado. Para lograr esta comprensión se proponen, desde la EpC, cuatro elementos de la comprensión que sirvieron de soporte para la construcción de la unidad curricular.

El primer elemento son los tópicos generativos. Son temas centrales para una o más disciplinas, por lo que se pueden establecer múltiples relaciones entre unos temas y otros, incluso con la vida misma del estudiante. Estos tópicos deben ser llamativos e interesantes tanto para los estudiantes como para los docentes, porque tienen el poder de generar co-

nocimientos, relaciones y la necesidad de indagar sobre su origen. El docente debe partir del siguiente cuestionamiento para la determinación de los tópicos generativos: ¿Qué quiero que mis estudiantes comprendan?

El segundo elemento son las *metas de comprensión*. De acuerdo con Blythe *et ál.*, dichas metas son «enunciados o preguntas donde se expresan cuáles son las cosas más importantes que deben comprender los alumnos en una unidad o en un curso» (1999: 45). Esas cosas pueden ser conceptos, procedimientos o habilidades. El profesor debe hacer en este punto una rigurosa selección temática, puesto que lo que importa en este enfoque es la calidad de los aprendizajes y no la cantidad. Por esta razón, su consigna es “menos es más”. Los profesores deben hacerse las siguientes preguntas: ¿Qué es lo que quiero que mis estudiantes comprendan? ¿Por qué es importante que lo comprendan? Es esencial que los estudiantes conozcan estas metas para que sepan hacia dónde se orienta su proceso de aprendizaje.

El tercer elemento son los *desempeños de comprensión*. Son todas las actividades que los estudiantes hacen para desarrollar y demostrar su comprensión. Involucra a los estudiantes en un trabajo que hace que progresen en las metas de comprensión especificadas para la unidad curricular a través de desafíos suficientemente grandes como para ampliar sus conocimientos. Estas actividades van más allá de la memorización y la rutina, sin demeritar la importancia que estos elementos tienen en el aprendizaje. Ofrecen la posibilidad de utilizar múltiples estilos de aprendizaje y maneras de expresarlos, el espacio para que los estudiantes apliquen lo que saben en distintas situaciones y además la posibilidad, tanto para el profesor como para el estudiante, de constatar el desarrollo de la comprensión a lo largo del tiempo en situaciones innovadoras y retadoras. Existen tres tipos de desempeño de comprensión: *preliminares*, *investigación guiada* y *síntesis*.

Los *desempeños de comprensión preliminares* tienen la finalidad de que los estudiantes exploren los temas antes de darles la información. Por lo general, aparecen al inicio de la unidad curricular y sirven para ubicar al estudiante en el dominio del tópico generativo, quien verá la relación de éste con sus intereses y experiencias previas, lo que permite al docente conocer lo que los estudiantes ya saben y lo que están interesados en aprender.

Los *desempeños de investigación guiada* sirven para que los estudiantes se centren en problemas y cuestiones específicas, relacionadas con el tópico generativo y las metas de comprensión. La guía del profesor ayuda a los estudiantes a aplicar conceptos y métodos disciplinares, a integrar sus conocimientos y a poner en práctica una comprensión cada vez más elaborada y avanzada.

Los *desempeños de síntesis*, en fin, exigen a los estudiantes integrar las distintas comprensiones desarrolladas en los desempeños previos y, por ende, mostrar con claridad el dominio que tienen de las metas de comprensión establecidas. En este tercer elemento los profesores indagan: ¿Qué deben hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión?

El cuarto elemento, por último, es la *valoración continua y evaluación final*, que consta de dos componentes: establecer unos criterios de evaluación de cada desempeño, que deben ser conocidos por los estudiantes antes de iniciar los desempeños, y proporcionar una retroalimentación continua a los estudiantes para permitirles mejorar sus desempeños. Entre las estrategias usadas para la valoración continua y evaluación final se tuvo en cuenta la propuesta de Novak, Gowin & Otero (1999) sobre los mapas conceptuales, la cual facilitó conocer las redes conceptuales, que los estudiantes fueron construyendo en el proceso de comprensión del concepto de probabilidad.

En el siguiente apartado se presenta la unidad curricular diseñada y aplicada con estudiantes de décimo grado sobre el concepto de probabilidad, siguiendo, para su construcción, los cuatro elementos propuestos por la EpC que se explicaron anteriormente.

## Unidad curricular sobre el concepto de probabilidad

La unidad curricular tiene en cuenta los Estándares Básicos de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006). Su objetivo consiste en mostrar una propuesta para la enseñanza del concepto de probabilidad y buscar su comprensión.

La principal característica de esta unidad es llevar al estudiante a reflexionar y discutir sobre los con-

ceptos asociados a la probabilidad, como el azar, los experimentos aleatorios, los espacios muestrales, los eventos y la probabilidad, según sus distintas concepciones a través de la historia, a partir de diferentes aspectos relacionados con el entorno.

## Tópico generativo y metas de comprensión

El primer paso que se dio en la construcción de la unidad curricular fue diseñar el *tópico generativo* partiendo de un tema o pregunta que fuera transversal al proceso de comprensión del concepto de probabilidad, relacionara distintos aspectos de la disciplina y además generara en los estudiantes el interés por su estudio. Luego de algunas búsquedas y discusiones se llegó a la siguiente pregunta: ¿En qué situaciones de la cotidianidad se puede aplicar la probabilidad? Durante el tiempo de implementación de la unidad curricular los estudiantes estuvieron en la búsqueda de respuestas; sin embargo, para que fuera guiada, se construyeron *metas de comprensión*, que iban delineando el camino para el logro del tópico generativo. Inicialmente se construyó una *meta de comprensión a largo plazo o hilo conductor*, que guiaría todo el proceso: los estudiantes comprenderán la probabilidad como una medida del azar. Después, para poder alcanzar esta meta a largo plazo, se plantearon algunas *metas de comprensión a corto plazo*:

- Los estudiantes comprenderán las diferencias y similitudes entre los experimentos o fenómenos aleatorios y los deterministas, a través de distintas situaciones de su entorno.
- Los estudiantes comprenderán la probabilidad como un concepto asociado solamente a fenómenos aleatorios, usando distintas situaciones de su entorno.
- Los estudiantes comprenderán las distintas concepciones que ha tenido la probabilidad a través de la historia: clásica, frecuencialista, subjetivista y axiomática, para aplicarlas a la resolución de situaciones problema de diversas ramas del saber y de su cotidianidad.

## Desempeños de comprensión

Para lograr estas metas de comprensión, se diseñaron las siguientes actividades o *desempeños de comprensión* para cada una de las fases propuestas por la EpC. Cada uno de los desempeños se ejemplificará con algunas producciones de los estudiantes en la aplicación de la unidad curricular.

### Fase de exploración

Se hizo una lluvia de ideas en la cual los estudiantes aportaron sobre lo que consideraron como experimentos aleatorios y los que no lo son. Algunas de estas ideas previas dadas fueron:

Tabla 1. Paralelo entre experimentos aleatorios y experimentos deterministas.

Experimentos aleatorios	Experimentos deterministas
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los experimentos aleatorios no buscan algo específico, sino lo que pueda pasar.</li> <li>• Realizar una actividad donde uno no busca una actividad específica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Son demostrativos y se espera llegar a un fin específico.</li> <li>• Se realizan para probar algo.</li> </ul>

En estas ideas se evidencia que los estudiantes reconocen algunas diferencias entre los experimentos deterministas y aleatorios, pero no se vislumbran las similitudes ni la asociación de estos últimos con la probabilidad.

Luego los estudiantes consultaron las definiciones de estas dos clases de experimentos para establecer un

comparativo con sus ideas iniciales, determinar las diferencias y relaciones existentes entre ellos y construir un mapa conceptual para compartir con los compañeros de clase.

Uno de los mapas conceptuales construido por uno de los estudiantes se muestra a continuación:

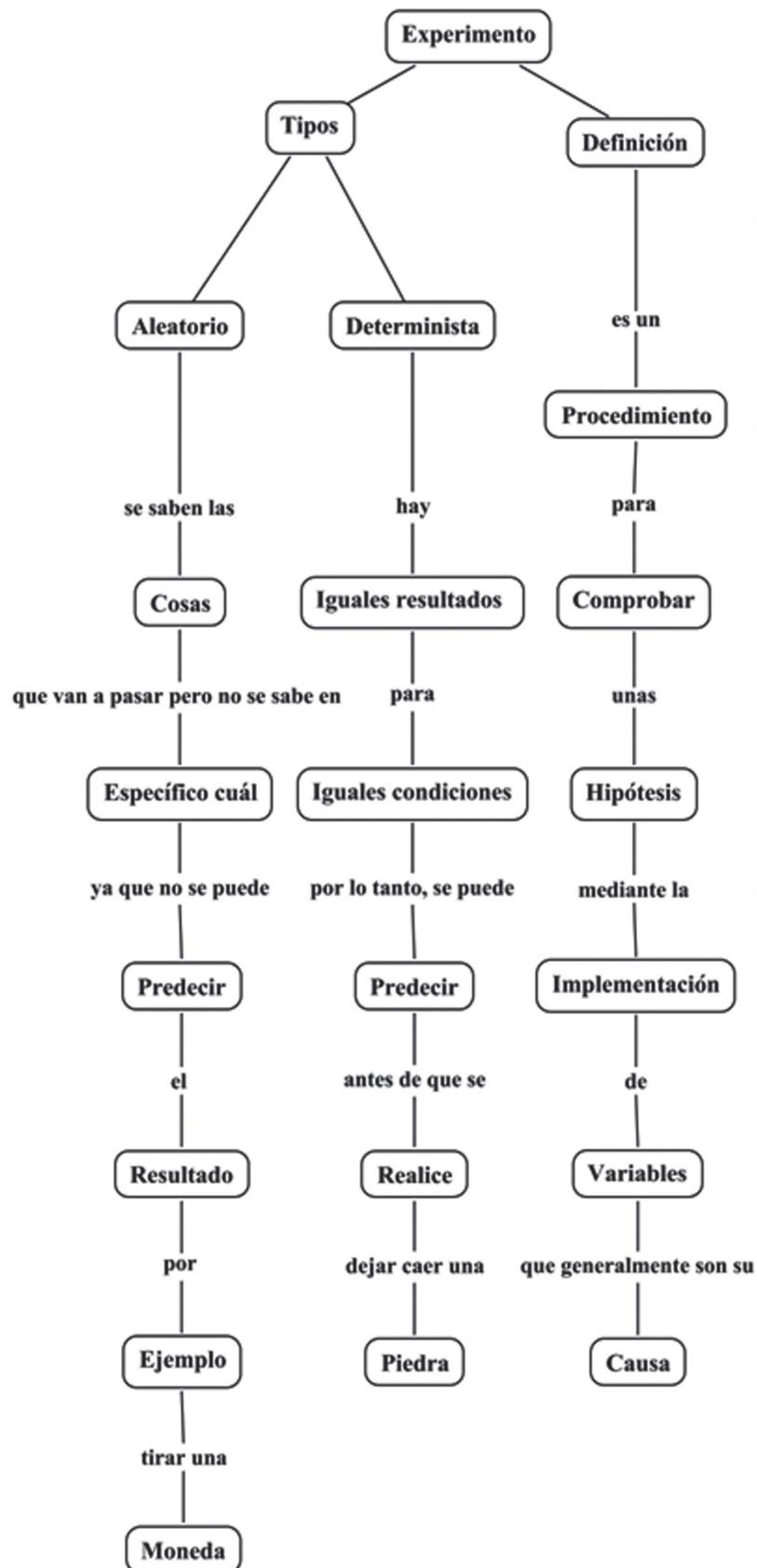


Figura 1. Mapa conceptual que muestra las ideas sobre el concepto de experimento.

Al comparar las ideas previas con las consultadas y expuestas en el mapa, se puede notar cómo los estudiantes tenían preconcepciones que los acercaban a las definiciones. Sin embargo, con la consulta se muestran algunas relaciones nuevas. Pero el mapa conceptual muestra cómo encuentran diferencias entre los experimentos, aunque no similitudes.

Se dieron luego algunos ejemplos de fenómenos deterministas y de fenómenos aleatorios cercanos a la vida de los estudiantes. En el caso de los deterministas se citaron algunos de la física: medir el

tiempo de caída de un cuerpo que se arroja verticalmente desde una determinada altura o comprobar alguna teoría sobre reacciones químicas. Para el caso de los fenómenos aleatorios se citaron los juegos de azar: loterías, juegos de cartas, de dados, de ruletas.

Posteriormente, se hizo otra lluvia de ideas en la cual los estudiantes dieron sus aportes sobre lo que para ellos significa la probabilidad y los conceptos con los que la relacionan en su cotidianidad. Al respecto, algunas ideas dadas por los estudiantes fueron:

Tabla 2. Ideas iniciales sobre el concepto de probabilidad.

Ideas de los estudiantes	Análisis
Número de casos en que puede suceder algo.	Se nota cómo los estudiantes asocian la probabilidad con el conteo, sin pensar en la razón.
Opciones de que algo pase.	
Posibilidad de obtener un resultado específico.	Al entender la probabilidad como posibilidad, se la está asociando con fenómenos que no necesariamente son aleatorios.

Después se expuso a los estudiantes un mapa conceptual en el que se muestra una red de ideas alrededor del concepto de probabilidad con el fin de introducir este tópico.

Luego se propuso a los estudiantes que respondieran: ¿En qué situaciones de mi cotidianidad puedo aplicar la probabilidad? Para responder este cuestionamiento los estudiantes usaron distintas fuentes de información: preguntar a alguien, consultar en Internet o simplemente la experiencia propia. Después socializaron las ideas encontradas por ellos, conformaron grupos de tres o cuatro y eligieron un problema de probabilidad que les interesara resolver y estuviera relacionado con su vida. Cada grupo compartió de manera detallada el tipo de problema que había seleccionado y las ideas preliminares de cómo pensaban solucionarlo.

Algunos de los problemas o preguntas que inicialmente se plantearon fueron:

Estudiante 1: «Nuestra situación problema está enfocada en las loterías, en especial El Baloto, porque nos produce curiosidad saber la probabilidad que hay de ganar contando con que hay miles de personas que

también lo juegan, además, saber si es muy difícil tener 6 números iguales a los ganadores, sabiendo que por cada número se pueden escoger 45».

Estudiante 2: «Si hay 200 cabinas en el metro-cable, y todas dan 30 vueltas al cable en un día. ¿Qué probabilidad hay de que en 10 días, yendo a diferentes horas, me vuelva a tocar en la misma cabina?»

Estudiante 3: «¿Qué probabilidad hay de obtener en el juego de póker un *full house*?»

Estudiante 4: «La revista *Vogue* está rifando un premio de 300.000 dólares en mercancías de sus tiendas asociadas; se debe escoger por lo menos una de tres llaves entre 5.000, de las cuales existen 3 colores: amarillo, rojo y verde. Hay una de cada color que abre la caja con el premio. Cuando llegamos, decían que quedaban 500 llaves amarillas, 200 llaves rojas y 700 verdes y se podían escoger 3 verdes, 1 amarilla y 2 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que me gane el premio?»

Cada una de estas situaciones evidencia cómo cada estudiante, desde sus intereses, gustos y moti-

vaciones, se hace preguntas que pueden convertirse en proyectos propios, que con la orientación del docente les puede llevar a comprender el concepto de probabilidad. Y con este tipo de trabajos el docente puede valorar la apropiación a nivel conceptual, procedimental, de comunicación y de relación con la realidad que alcanzan los estudiantes. Por otro lado, se puede reconocer cómo las situaciones son realmente sencillas de resolver para una persona con algún conocimiento básico de probabilidad. Sin embargo, para los estudiantes, son todo un reto.

### Fase de investigación guiada

Cada grupo de estudiantes empezó a indagar sobre el tema elegido, las condiciones en que se presenta y algunas ideas de cómo resolverlo. Además, se les propusieron algunas actividades para explorar las distintas concepciones de probabilidad que se han dado a través de la historia, como un insumo para la solución del problema de interés. Se inició con el desarrollo de la actividad *Lo probable y lo improbable*, con la cual se pretendió que los estu-

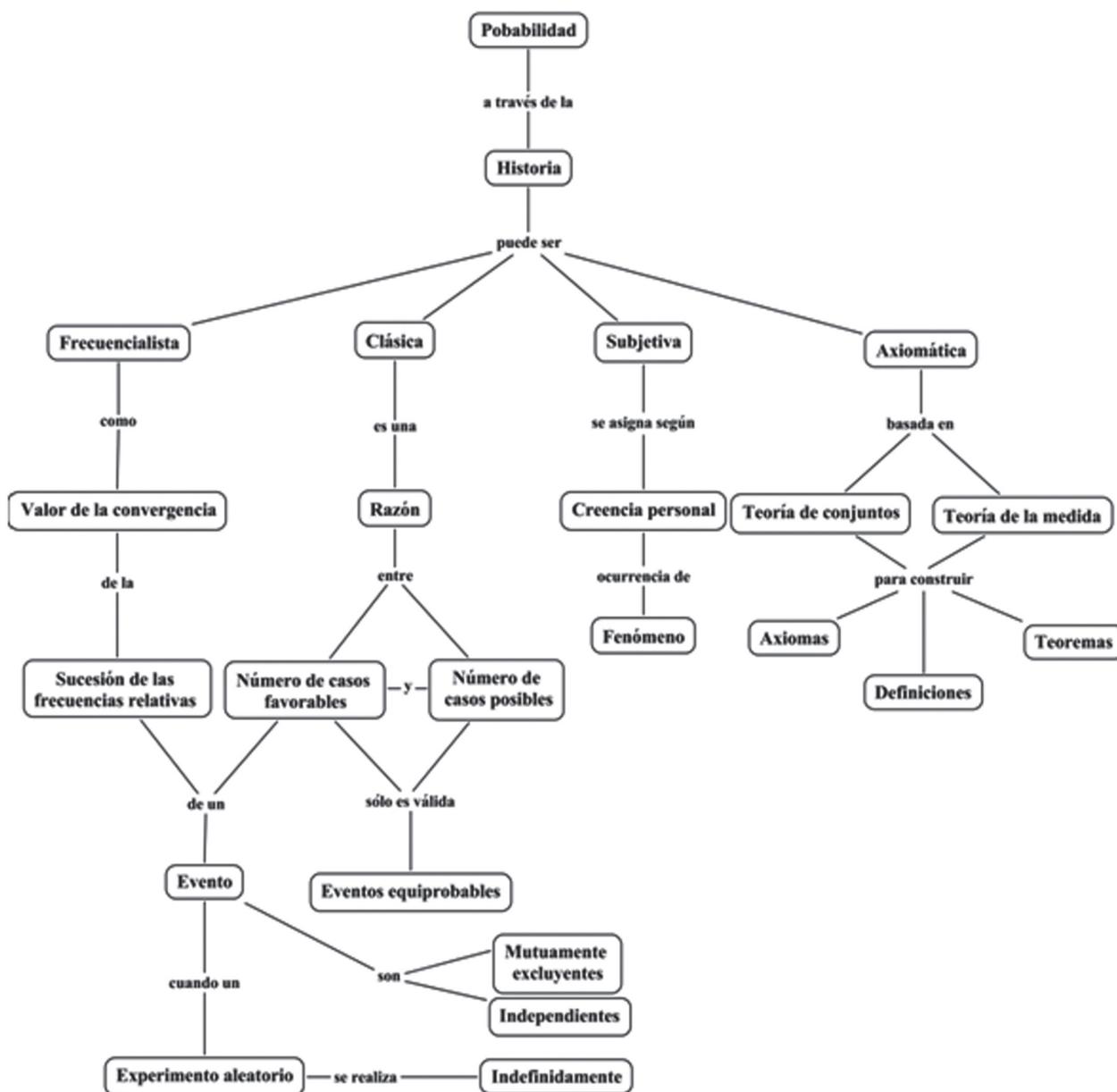


Figura 2. Diferentes tipos de probabilidad.

diantes pudieran asignar niveles de probabilidad a distintos eventos. Con esta actividad se exploró la concepción subjetivista de la probabilidad. Con la actividad experimental: ¿Cómo se comporta el azar?<sup>5</sup>, los estudiantes exploraron sus ideas sobre el azar y las reglas que este sigue, a la vez que se introdujeron en las concepciones frecuentista y clásica de la probabilidad a través de experimentos aleatorios como lanzar una moneda y analizar el valor al que tienden las frecuencias relativas del evento “salir cara” a medida que aumenta el número

de lanzamientos. A continuación se muestran algunos fragmentos de la actividad.

*Van a trabajar en parejas. Cada pareja realizará 3 experimentos, y cada uno de ellos lo repetirá 20 veces. Después juntaremos todos los resultados obtenidos en la clase.*

**Experimento 1:** *Lancen una moneda y anoten C si sale cara o S si sale sello. Después calculen la frecuencia de cada uno de los resultados.*

Tabla 3. Resultados de los lanzamientos de una moneda.

Experimento	Resultados										Frecuencia	
Moneda (C) (S)	C	C	C	C	S	S	S	C	C	S	Cara	Sello
	C	S	S	S	C	S	C	C	S	S	11	9

*Una vez recogidos sus resultados, agrupen los datos de toda la clase en la siguiente tabla y construyan el respectivo gráfico de frecuencias relativas.*

*anotar el número de caras obtenidas y después calcularán la frecuencia acumulada y la frecuencia relativa.*

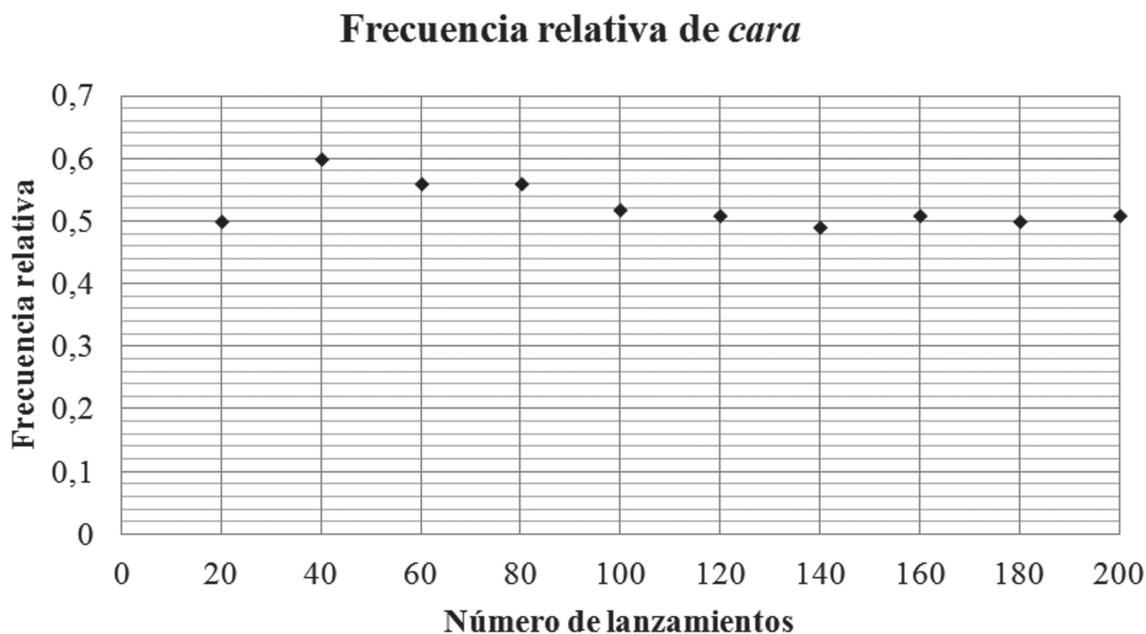
*Completen la tabla 4 con los resultados de la clase correspondientes al lanzamiento de una moneda. Van a*

*construya en el plano cartesiano una representación gráfica que relacione el número de lanzamientos acumulados con la frecuencia relativa.*

Tabla 4. Lanzamiento de una moneda: frecuencia de cara.

Parejas	Repeticiones lanzamiento de moneda	Frecuencia de cara	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
1.a	1-20	10	10	$10/20 = 0,5$
2.a	21-40	14	24	$24/40 = 0,6$
3.a	41-60	10	34	$34/60 = 0,56$
4.a	61-80	11	45	$45/80 = 0,56$
5.a	81-100	7	52	$52/100 = 0,52$
6.a	101-120	9	61	$61/120 = 0,51$
7.a	121-140	8	69	$69/140 = 0,49$
8.a	141-160	12	81	$81/160 = 0,51$
9.a	161-180	10	91	$91/180 = 0,5$
10.a	181-200	12	103	$103/200 = 0,51$

5 Adaptada de Azcárate & Deulofeu (1998).



**Figura 3.** Frecuencia de *cara* en el lanzamiento de una moneda.

*Observen las frecuencias relativas en su gráfico, a medida que se van acumulando más datos:*

*Pregunta: ¿La frecuencia varía mucho o se va manteniendo más o menos en el mismo valor?*

*Respuesta: Se va manteniendo más o menos el mismo valor.*

*Pregunta: Si la frecuencia se mantiene más o menos igual, ¿alrededor de qué valor se mantiene?*

*Respuesta: Alrededor de 0,5.*

*Pregunta: ¿El lanzamiento de la moneda se hizo siempre de la misma manera?*

*Respuesta: Sí.*

*Pregunta: ¿Cree que esto influyó en los resultados?*

*Respuesta: Sí, ya que al tratarla de una manera pa-recida se podría obtener algunos resultados iguales.*

De la misma manera, los estudiantes analizaron la tendencia de las frecuencias relativas para el evento “sacar 5” en el lanzamiento de un dado en repetidas ocasiones (experimento 2) o “sacar cara y sello” en el lanzamiento de dos monedas (experimento 3). Con preguntas alrededor de estos experimentos, los estudiantes construyeron algunas ideas sobre el azar y la probabilidad, como las siguientes:

Para el caso del lanzamiento de una moneda, algunos estudiantes encontraron que las frecuencias relativas del evento “sacar cara” se mantienen alrededor de 0,5 cuando se lanza 200 veces. En el experimento de lanzar el dado 200 veces, las frecuencias relativas del evento “sacar 5” se van manteniendo alrededor de 0,12 y 0,2. Y en el experimento de lanzar dos monedas 200 veces, las frecuencias relativas del evento “sacar cara y sello” estuvieron alrededor de 0,4 y 0,51. Algunos estudiantes compararon estos valores con la razón entre los casos que favorecen cada evento y los casos posibles de cada experimento, haciendo una relación inmediata con la definición clásica de la probabilidad, es decir,  $1/2$  para el primer experimento,  $1/6$  para el segundo y  $2/4$  ó  $1/2$  para el tercer experimento. Además, encontraron que en el azar se pueden dar algunas regularidades, como las frecuencias relativas, con lo que posteriormente se concluyó que a este valor se le llama *probabilidad*.

Con la actividad *Algunos juegos de azar*, los estudiantes exploraron el campo desde donde surgió la probabilidad usando juegos de cartas, dados cúbicos, dados dodecaédricos, balotas y monedas y algunas combinaciones de ellos para aplicar la definición clásica de la probabilidad e ir verificando desde la práctica algunos teoremas (eventos imposibles, contrarios y compatibles) y aplicando algunas definiciones

(probabilidad condicional, eventos independientes y probabilidad conjunta) y axiomas (eventos seguros e incompatibles) de la teoría axiomática de la probabilidad.

A medida que se avanzó en la realización de estas actividades de exploración, los estudiantes comenzaron a resolver el problema elegido por ellos, utilizando lo que habían consultado, las herramientas teóricas que sobre el concepto de probabilidad se habían construido con las dos actividades anteriores y las discusiones de clase.

**Fase de síntesis**

En esta fase los estudiantes mostraron la comprensión del concepto de probabilidad a través de la exposición del problema elegido al inicio del curso y de la solución o soluciones encontradas. A continuación se presenta uno de los problemas que resolvieron los estudiantes.

*Descripción del problema:*

*El metrocable de Medellín, ruta Acevedo-Santo Domingo Savio, cuenta con 60 cabinas que le dan una vuelta completa al circuito en 30 minutos. Su funcionamiento comienza a las 5 a.m. y finaliza a las 10 p.m., funcionando así un total de 17 horas diarias.*

*Se eligió la cabina número 20 para determinar las probabilidades de que al ir a una hora seleccionada de manera aleatoria, ésta se encuentre en la estación donde comenzó el circuito para poder abordarla.*

*¿Qué probabilidad hay de que en diez días, yendo a horas aleatorias, una vez por día al punto de partida (primera estación), pueda abordar la cabina número 20 durante las diez visitas? (Esta fue la pregunta que investigaron.)*

*Desarrollo:*

*Espacio muestral ( $\Omega$ ): Cada día la cabina número 20 comienza a dar la vuelta por el circuito a las 5:10 a.m. (esto quiere decir que cada medio minuto hay una cabina en el punto de partida, que en este caso es la primera estación). Como el recorrido total hasta llegar de nuevo al punto de partida dura 30 minutos, esta cabina estará allí a las siguientes horas cada día: tiempos en los que la cabina número 20 estará en la primera estación ( $\Omega$ ).*

5:10 a.m.	1:40 p.m.	9:40 a.m.	6:10 p.m.
5:40 a.m.	2:10 p.m.	10:10 a.m.	6:40 p.m.
6:10 a.m.	2:40 p.m.	10:40 a.m.	7:10 p.m.
6:40 a.m.	3:10 p.m.	11:10 a.m.	7:40 p.m.
7:10 a.m.	3:40 p.m.	11:40 a.m.	8:10 p.m.
7:40 a.m.	4:10 p.m.	12:10 p.m.	8:40 p.m.
8:10 a.m.	4:40 p.m.	12:40 p.m.	9:10 p.m.
8:40 a.m.	5:10 p.m.	1:10 a.m.	9:40 p.m.
9:10 a.m.	5:40 p.m.		

*Si cada medio minuto hay una cabina lista para ser abordada, quiere decir que en las 17 horas de funcionamiento del sistema habrá 2.040 abordajes. Este total lo encontramos convirtiendo 17 horas en medios minutos, es decir, (17 horas)(2)(60 minutos) = 2.040 medios minutos en 17 horas.*

*Entonces, al haber 34 momentos en que la cabina elegida estará en el punto de partida, la expresión para determinar la probabilidad es la siguiente:*

*$P(\text{cabina número 20 en el punto de partida}) = (34/2.040) = 0,0166$ , que en términos de porcentaje es del 1.66% por cada día.*

*Ahora bien, como son 10 días los seleccionados para el experimento, las probabilidades son las del primer día y\* [multiplicada] las del segundo día, y\* [multiplicada] las del tercer día, [...] y\* [multiplicada] las del décimo día. Es decir:*

*$\frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60}$ , que*

*simplificando queda  $\left(\frac{1}{60}\right)^{10} = 1.6538 \times 10^{-18}$ . En*

*términos de porcentaje (multiplicando por 100), esto es  $1.6538 \times 10^{-16} = 0,00000000000000016538\%$  de probabilidad de que esto suceda.*

Este es un problema que nació de la curiosidad de los estudiantes. Con un poco de consulta y los elementos teóricos estudiados, como la definición clásica de probabilidad y los eventos independientes, los estudiantes lograron resolverlo.

## Valoración continua y evaluación final

En este proceso los estudiantes desarrollaron un portafolio de actividades para recoger sus producciones.

### Fase de exploración

A continuación se describen los desempeños de comprensión que se aplicaron durante la fase de ex-

ploración y la manera como se hizo la valoración de cada uno de ellos según criterios y su respectiva retroalimentación.

Mediante los desempeños descritos, en esta fase se buscó conocer los conceptos previos de los estudiantes para iniciar el estudio de la probabilidad. De la misma manera, se quiso generar en ellos la inquietud sobre la relación de este concepto con su vida y cómo pueden solucionar una situación problema.

Tabla 5. Valoración continua en la fase de exploración.

Desempeños de comprensión	Valoración continua	
	Criterios	Retroalimentación
Los estudiantes construyeron un mapa conceptual sobre los conceptos previos necesarios para el estudio del concepto de probabilidad: teoría de conjuntos y técnicas de conteo.	Riqueza y veracidad de las relaciones entre conceptos.	Informal: El docente, durante las clases posteriores, afinó algunas definiciones que no eran válidas o a las que les faltaba profundidad.
Se hizo una lluvia de ideas en que los estudiantes aportaron sobre aquello que consideraron como experimentos, experimentos aleatorios y experimentos deterministas.	Claridad en los aportes hechos.	Informal: Entre los estudiantes y el docente se amplió la lluvia de ideas.
Los estudiantes consultaron las diferencias y relaciones existentes entre los experimentos deterministas y los aleatorios para compartir con los compañeros de clase. Además, se dieron algunos ejemplos de los dos tipos de experimentos.	Claridad y profundidad en las ideas consultadas. Variedad en los ejemplos aportados.	Informal: El docente y sus estudiantes compararon las diferencias o similitudes que se dieron entre las ideas aportadas en la lluvia de ideas y lo consultado y sacaron conclusiones al respecto.
Posteriormente, elaboraron un mapa conceptual sobre los dos tipos de fenómenos.	Riqueza y veracidad de las relaciones entre conceptos.	Formal: El docente hizo comentarios por escrito de los mapas conceptuales.
Los estudiantes dieron sus ideas sobre lo que significaba, para ellos, la probabilidad y los conceptos con los cuales la relacionan en su vida.	Claridad y coherencia de las ideas presentadas.	Informal: Entre el docente y los estudiantes se amplió la lluvia de ideas.
Se propone a los estudiantes que respondan las siguientes preguntas: ¿En qué situaciones de mi cotidianidad puedo aplicar la probabilidad? ¿Cuáles situaciones me ayudan a solucionar la probabilidad de la carrera que tengo en mente para mi futuro? Para responder estos cuestionamientos los estudiantes usaron distintas fuentes de información.	Variedad en las situaciones presentadas.	Formal: El docente hizo por escrito las observaciones pertinentes a las respuestas dadas por los estudiantes.
Partiendo de las respuestas a estos interrogantes, los estudiantes, en grupos de dos o tres, eligieron un problema para ser resuelto por ellos utilizando la probabilidad y teniendo relación con su vida. Posteriormente, cada grupo narró de manera detallada el problema que propuso resolver y las ideas preliminares de cómo piensan ellos que pueden hacerlo.	Complejidad y pertinencia del problema propuesto.	Formal: El docente escribió las observaciones pertinentes a los problemas presentados por los estudiantes para que siguieran profundizando y empezaran a resolverlo.

## Fase de investigación guiada

En este apartado se presentan los desempeños de comprensión que se llevaron a cabo durante la fase de investigación guiada, con su respectiva valoración, teniendo en cuenta los criterios y la retroalimentación.

Mediante los desempeños de comprensión descritos en esta fase, se ofreció a los estudiantes las herramientas conceptuales y procedimentales sobre la probabilidad, que les sirvieron para resolver la situación problema que se propusieron en la fase anterior.

Tabla 6. Valoración continua en la fase de investigación guiada.

Desempeños de comprensión	Valoración continua	
	Criterios	Retroalimentación
Los estudiantes desarrollaron la actividad <i>Lo probable y lo improbable</i> , con la que se pretendía que pudieran asignar probabilidades a distintos eventos. Con esta actividad los estudiantes exploraron la concepción subjetivista de la probabilidad.	Desarrollo de la actividad con claridad y de forma completa.	Informal: Los estudiantes y el docente socializaron sus ideas y llegaron a acuerdos.
Con la actividad experimental <i>¿Cómo se comporta el azar?</i> , los estudiantes exploraron sus ideas sobre el azar y las reglas que este sigue, a la vez que se introdujeron en las concepciones frecuencialista y clásica de la probabilidad.	Desarrollo de la actividad de forma completa y participación en su socialización con aportes argumentales.	Informal: Discusiones de los estudiantes mediada por el docente.
Con la actividad <i>Algunos juegos de azar</i> , los estudiantes exploraron el campo desde donde surgió la probabilidad. Fueron abordando algunos axiomas, definiciones y teoremas de la teoría axiomática de la probabilidad, a la vez que siguieron aplicando la definición clásica de probabilidad.	Desarrollo de toda la actividad y aplicación correcta de la definición clásica de la probabilidad y de los axiomas y teoremas construidos mediante la actividad.	Informal: Los estudiantes y el docente discutieron las soluciones dadas a las distintas situaciones propuestas y su validez o no.

## Fase del proyecto final de síntesis

En la tabla 7 se describen los desempeños de comprensión correspondientes a la fase del proyecto final de síntesis, con su respectiva valoración, teniendo en cuenta los criterios y el proceso de retroalimentación.

En esta fase los estudiantes mostraron de distintas formas la manera como comprenden el concepto de probabilidad.

Este apartado sobre valoración continua y evaluación final permite visualizar, de una manera sintética, el proceso seguido con los estudiantes para comprender el concepto de probabilidad, por lo que ofrece un posible camino para los docentes en la construcción de sus prácticas de aula.

## Discusión y conclusiones

La utilización de unidades curriculares, como la que se presenta en este artículo, implica varias acciones por parte de los docentes y de los estudiantes. Por parte del docente, requiere la elaboración de prácticas de aula en las que el estudiante construya conceptos, proponga procedimientos y haga relaciones de éstos con situaciones de su entorno, experimentando, conjeturando, consultando en distintas fuentes y discutiendo. Además, implica un acompañamiento continuo y personalizado del proceso de aprendizaje del estudiante, haciendo la retroalimentación de cada actividad o desempeño que este realice. En el caso del concepto de probabilidad fue de gran utilidad el uso de las simulaciones y las situaciones de contexto real, lo cual está acorde a algunas de las estrategias propuestas en las investigaciones actuales sobre la enseñanza de la probabilidad.

Tabla 7. Valoración continua en la fase del proyecto final de síntesis

Desempeños de comprensión	Valoración continua	
	Criterios	Retroalimentación
Exposición del problema elegido al inicio del curso y de la solución o soluciones encontradas.	<p><i>Contenido:</i> Utiliza los conceptos estudiados apoyándose en ellos para la argumentación y validación de la solución dada a su problema de aplicación.</p> <p><i>Métodos:</i> Propone creativamente estrategias para solucionar el problema seleccionado.</p> <p><i>Propósitos:</i> Logra relacionar eficientemente los conceptos aprendidos con la situación de la vida diaria elegida para abordar durante el período.</p> <p><i>Formas de comunicación:</i> El material elaborado es creativo. Posee dominio del lenguaje relacionado con el concepto de probabilidad. Facilidad para comunicarse entre los integrantes del equipo y para comunicar sus ideas a sus compañeros y al docente.</p>	Formal: Los estudiantes y el docente valoraron las exposiciones de sus compañeros con una matriz que contiene los criterios de valoración de acuerdo con las cuatro dimensiones de la EpC.
Entrega del portafolio de actividades de los estudiantes.	<p><i>Contenido:</i> Guías de las actividades desarrolladas, pruebas escritas, diarios de campo, mapas conceptuales, planteamiento y solución del problema de aplicación.</p>	Formal: El docente hizo comentarios por escrito de las fortalezas y debilidades de los portafolios construidos.
Desarrollo de una prueba escrita que contiene una serie de situaciones problema acerca de la probabilidad.	Solución creativa de los distintos problemas, argumentando con base en la teoría estudiada sobre el concepto de probabilidad.	Formal: El docente revisó la solución de las situaciones problema y escribió los comentarios pertinentes.

Por otro lado, cada actividad que se realice debe tener unos criterios de evaluación para que los procesos de retroalimentación ayuden al estudiante a avanzar en su comprensión del concepto de probabilidad.

El concepto de probabilidad es fundamental en la formación del pensamiento aleatorio en los estudiantes de educación media. Por lo tanto, el diseño de experiencias de aprendizaje que favorezcan su comprensión les dará la oportunidad de comprender otros conceptos, como el teorema de Bayes y las distribuciones de probabilidad, por citar algunos ejemplos. Además, les beneficiará en la toma de decisiones al resolver situaciones de su entorno, tanto en la vida estudiantil como en la profesional.

## Referencias bibliográficas

ACEVEDO VÉLEZ, Diana Patricia (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de*

*décimo grado*. Tesis de maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

AZCÁRATE JIMÉNEZ, Carmen y DEULOFEU PIQUET, Jordi (1998). *Guías Praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas: contenidos, actividades y recursos*. Barcelona: Praxis.

BARRAGUÉS FUENTES, José Ignacio y GUIASOLA ARANZÁBAL, Jenaro (2002). «Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad». En: *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 20, N.º 2, pp. 285-302. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Institut de Ciències de l'Educació (ICE).

BARRAGUÉS FUENTES, José Ignacio y GUIASOLA ARANZÁBAL, Jenaro (2006). «La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios». En: *Enseñanza de las*

*Ciencias*, Vol. 24, N.º 2, pp. 241-256. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Institut de Ciències de l'Educació (ICE).

BATANERO BERNABEU, María del Carmen (2000). «Cap on va l'educació estadística?» En: *Biaix*, N.º 15, pp. 2-13. Barcelona: Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya.

BATANERO BERNABEU, María del Carmen (2003). «Simulación como instrumento de modelización en probabilidad». En: *Revista Educación y Pedagogía*, Vol. 15, N.º 35, pp. 37-54. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.

BATANERO BERNABEU, María del Carmen (2005). «Significados de la probabilidad en educación secundaria». En: *Relime*, Vol. 8, N.º 3, pp. 247-264. México, D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).

BATANERO BERNABEU, María del Carmen y DÍAZ, Carmen (2005). «El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística». En: I Congreso de Estatística e Investigaçao Operacional da Galiza e Norte de Portugal. VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións. Guimarães.

BATANERO BERNABEU, María del Carmen y GODINO, Juan D. (2005). «Perspectivas de la educación estadística como área de investigación». En: LUENGO GONZÁLEZ, Ricardo (Ed.). *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas*, pp. 203-226. Badajoz: Universidad de Extremadura.

BLYTHE, Tina y PERKINS, David (1999). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.

FERNÁNDEZ MORALES, Antonio (2001). «Obstáculos para la enseñanza de la probabilidad en los estudiantes

de economía y administración y dirección de empresas». En: *Jornadas Europeas de Estadística*. Palma de Mallorca, Universidad de Málaga.

INSUNZA, Santiago, GASTÉLUM, Diego Alonso y ÁLVAREZ, Anselmo (2009). «TIC: desarrollo de software para el aprendizaje y razonamiento probabilístico: el caso de SIMULAPROB». En: *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, N.º 18, pp. 135-149. Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM).

JONES, Graham A., LANGRALL, Cynthia W., THORNTON, Carol A. y MOGILL, A. Timothy (1997). «A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability». En: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 32, N.º 2, pp. 101-125. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

NORTES CHECA, Andrés (1998). «Estadística y probabilidad: una propuesta didáctica para la enseñanza secundaria». En: *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, N.º 32, pp. 59-72. España: Asociación Universitaria de Formación del Profesorado.

NOVAK, Joseph Donald, GOWIN, D. Bob y OTERO, José (1999). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

PERKINS, David (1999). «¿Qué es la comprensión?» En: STONE WISKE, Martha (Comp.ª). *La enseñanza para la comprensión*, pp. 69-92. Buenos Aires: Paidós.

ZAPATA CARDONA, Lucía (2008). «Teachers' understanding of students' conceptions about chance: An expert-novice contrast». Disertación doctoral no publicada. Estados Unidos: Universidad de Georgia.



Artículo recibido: 12-08-2013. Aprobado: 09-11-2013