La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

Rodrigo Antonio Rendón Ramírez[1]
René Alejandro Londoño Cano[2]

Resumen

Nuestro objetivo fue diseñar y aplicar una entrevista semiestructurada de carácter socrático para describir cómo comprenden el concepto de continuidad cuatro estudiantes de cursos de cálculo diferencial de la educación media y de la universitaria en instituciones oficiales de la ciudad de Medellín. Se desarrolló una investigación de tipo cualitativo y se implementó el estudio de caso para la consecución de este objetivo; la entrevista semiestructurada de carácter socrático se convirtió en una estrategia metodológica para mejorar la comprensión de los estudiantes, de acuerdo con el marco de la teoría de Pirie y Kieren, que nos sirvió como sustento teórico.

Palabras claves: entrevista socrática, descriptores, función, comprensión, límite, infinitesimal.

Understanding the concept of continuity within the framework of Pirie and Kieren's theory

Abstract

Our objective was to design and implement a semi-structured interview of Socratic nature to describe how the concept of continuity is understood by four students of differential calculus courses in secondary and higher education institutions in the city of Medellín. It was a qualitative type

1 Profesor de cátedra de la Universidad de Antioquia. Profesor de tiempo completo del Municipio de Medellín. Magíster en Educación por la Universidad de Antioquia. Especialista en Matemática Avanzada por la Universidad Nacional de Colombia, Medellín. Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: ro.rendon@gmail.com

2 Magíster y Doctor en Educación, área de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. Correo electrónico: rene2@une.net.co

of research including a case study in order to achieve the objective; the Socratic semi-structured interview was strategy to improve the students' understanding, in accordance with the framework of Pirie and Kieren's theory, which served as a theoretical support.

Key words: socratic interview, descriptors, function, understanding, limit, infinitesimal.

1. Introducción: contextualización del estudio

Justificación

La comprensión de conceptos, entendida como «un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento» (Glasersfeld, 1987), es considerada como un objetivo deseable y prioritario. En nuestra hemos observado que el concepto de continuidad es particularmente dificultoso para ellos, ya que involucra la comprensión previa de otros conceptos fundamentales, como el de límite, y además es abordado por los docentes solo desde un componente visual geométrico asociado con las gráficas de las funciones, como lo establecen investigaciones anteriores, Campillo & Pérez 1998 y Cornu 1991, lo que genera la percepción errónea de la continuidad como una característica global de las curvas y no como un concepto local asociado al control de errores, Cauchy y Lacroix.

El problema de investigación

En el ámbito escolar, es común interpretar la continuidad como «no tener que levantar el lápiz al dibujar la gráfica de la función» (Campillo & Pérez, 1998: 71), razón por la cual los estudiantes tienden a interpretar este concepto desde una visión solamente geométrica o algebraica. Esta situación relega la continuidad a convertirse en un objeto estático, alejado de su sentido dinámico intrínseco, pues involucra procesos de razonamiento infinito y el trabajo con cantidades infinitesimales alrededor de un punto de abscisa $x = a$.[3]

Por esta razón, el estudio se centró en atender la siguiente pregunta: ¿Cómo comprenden el concepto de continuidad los estudiantes de un curso de cálculo diferencial, de acuerdo con los niveles del modelo de Pirie y Kieren?

La propuesta caracterizó *a priori* descriptores para los primeros cuatro niveles de comprensión del modelo en la teoría de Pirie y Kieren con respecto al concepto de continuidad.[4] Solo se tomaron estos niveles, ya que son los que involucran un fuerte componente visual geométrico, y el mecanismo elegido para trabajar la entrevista tiene esta característica. Posteriormente, producto del trabajo de campo, surgen pautas con el fin de que los descriptores preliminares sean refinados y se articulen de manera coherente con los niveles del modelo. Esto permite al investigador, por un lado, describir de manera detallada la forma como un estudiante amplía la comprensión en su progreso entre un nivel y el siguiente y, por otro lado, consolidar la estrategia metodológica.

La teoría de Pirie y Kieren para la comprensión matemática

Descripción y caracterización general de la teoría

Es una teoría desarrollada en Norteamérica por los profesores Susan Pirie y Thomas Kieren. Como ellos postularon una teoría de la comprensión matemática, reconocen que inicialmente aceptan el concepto de comprensión de Glasersfeld (1987). Pirie y Kieren postulan una teoría que consiste en un análisis de la gradación de la comprensión de conceptos matemáticos; proponen un modelo compuesto de ocho niveles, que describen la comprensión de un concepto matemático, y lo usan para trabajar inicialmente en aritmética (ver figura 1).

3 En este trabajo, «un infinitesimal es simplemente una variable que tiende a cero» (Tall, 1991), según la concepción de Cauchy.

4 El modelo de Pirie y Kieren (dentro de la teoría) hace referencia al gráfico fractal en el cual se exhiben los niveles de comprensión expuestos por la teoría y no a toda la teoría como tal.

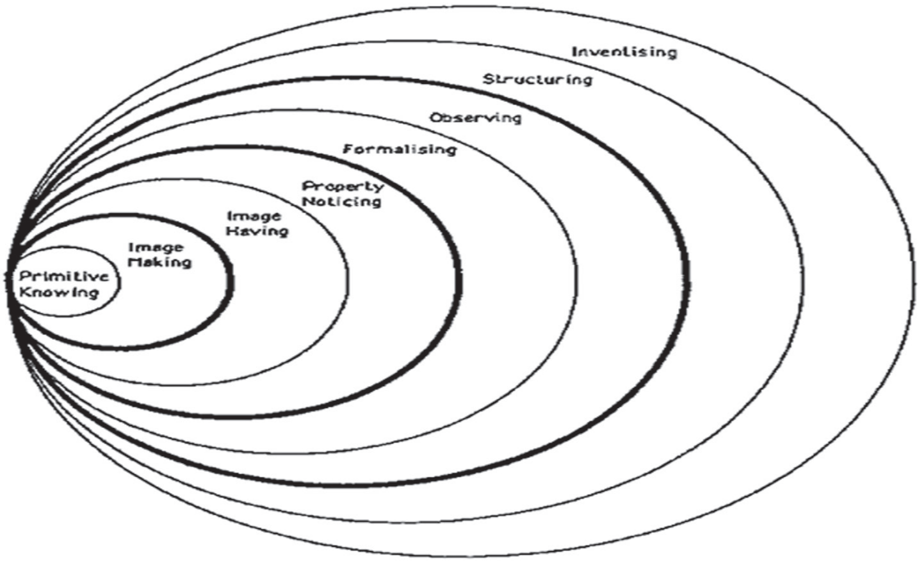

Figura 1. Una representación diagramática del modelo. Los límites de falta de necesidad se representan por líneas más gruesas (tomado de Pirie y Kieren, 1994).

La teoría tiene tres características fundamentales:

Folding back. Es el elemento más importante; constituye una de las principales diferencias con otros modelos y teorías. Según Londoño (2011), el *folding back* se refiere a la posibilidad de "redoblar" o volver hacia atrás en un proceso dinámico que asegura al final la efectividad de la comprensión. Este elemento permite a una persona que está en un nivel externo regresar a uno de los niveles internos, con el fin de retomar un concepto o afinar elementos que no fueron necesarios en el paso por dicho nivel, pero que es necesario para la superación y avance en los niveles exteriores. El sujeto que avanza, retrocede o redobla hacia el nivel interno perfecciona elementos y regresa al nivel externo para continuar con el proceso.

La necesidad de redoblar aparece como consecuencia del proceso de crecimiento en la comprensión; es individual, no propia del concepto, sino del sujeto que comprende, y no necesariamente constituye un acto de comprensión como tal.

Los límites de falta de necesidad. Ellos constituyen procesos de comprensión más elaborados y estables para un concepto.

La complementariedad de la acción y la expresión. Ocurre en todos los niveles a excepción del primero y el último. Se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, los progresos en los respectivos niveles.

Nomenclatura de los niveles

La descripción de cada uno de los niveles de comprensión obedece a la necesidad de mostrar claramente cuáles son los comportamientos de los estudiantes que evidencian el nivel en el cual comprenden en un momento dado. Esta situación permite además diseñar estrategias de intervención en el proceso de enseñanza para mejorar la comprensión de un concepto matemático en particular.

El nombre de cada nivel se toma de Meel (2003).

Nivel 1. *Primitive knowing* (conocimiento primitivo)[5]

Nivel 2. *Image making* (creación de imagen)

Nivel 3. *Image having* (comprensión de la imagen)

Nivel 4. *Property noticing* (observación de la propiedad)

Nivel 5. *Formalizing* (formalización)

Nivel 6. *Observing* (observación)

5 En la teoría de Pirie y Kieren, la palabra *primitivo* no se refiere a un conocimiento bajo en su nivel de matemáticas, sino al nivel de partida que se requiere como base para abordar determinado concepto.

Nivel 7. *Structuring* (estructuración)

Nivel 8. *Inventising* (invención)

Los cuatro primeros niveles permiten usar la visualización como una herramienta para mejorar la comprensión, de acuerdo a la sugerencia de Miguel de Guzmán (2001).

La visualización matemática

La visualización en matemáticas se ha convertido en una herramienta de investigación de gran valor en la actualidad, pues permite establecer las condiciones para llegar al rigor de las formalizaciones. (2001), la visualización debe permitir acercar al sujeto a la gran riqueza de contenidos visuales que encierran las representaciones geométricas y conducirlo intuitivamente al estudio y comprensión de los conceptos.

En el presente trabajo usamos la visualización apoyando las representaciones en papel y tablero con el uso del computador. En especial usamos el programa de distribución libre Geogebra, para que los estudiantes pudieran manipular las gráficas de funciones, recreando los efectos de un proceso de tipo infinito y permitiendo acercamientos cada vez más finos de las curvas que resultan, lo que ha dado la posibilidad de determinar el control de errores en las mismas.

2. Metodología

Este estudio busca hacer un análisis de la comprensión del concepto de continuidad en un grupo pequeño de individuos, y no es nuestra pretensión generalizar resultados, pero sí ofrecer algunas herramientas de análisis que puedan ser tomadas en cuenta por docentes e investigadores en futuros trabajos.

Paradigma en que se enmarca este estudio

El paradigma que hemos elegido para este estudio es la investigación cualitativa, con el fin de hacer relevante el caso de cada uno de los cuatro estudiantes que colaboraron en ella.

Para lograr responder la pregunta de investigación, iniciamos una ruta metodológica: la recolección de los datos y, finalmente, el análisis de la información suministrada por ellos. Se pasa por una etapa de codificación de los mismos y se muestra la pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren, como marco teórico de este trabajo.

Hernández, Fernández & Baptista afirma: «Hay una realidad que describir, construir e interpretar. La realidad de la mente» (2008: 11).

El método

En el contexto de este trabajo de investigación hemos decidido usar el método del estudio de caso, ya que sus características se ajustan a las necesidades planteadas por el trabajo de investigación. Según Hernández, Fernández & Baptista (2008), en una recolección de opiniones de varios autores sobre este método.

Decidimos seleccionar cuatro estudiantes de la interfase bachillerato-universidad del sistema educativo colombiano: dos de una institución educativa de carácter oficial de la ciudad de Medellín y dos de una universidad pública de la misma cuidad, matriculados en un programa de formación de maestros en matemáticas y física. La elección de los estudiantes se hizo sobre los que manifestaron voluntariamente el interés en participar y que además mostraban habilidades de comunicación en sus respectivos contextos, ya que consideramos la facilidad para expresar sus ideas como un requisito indispensable en el trabajo de campo.

El diseño y la identificación de los cuatro casos

Este estudio comienza con la identificación del problema de investigación, el cual surgió de la propia experiencia del investigador en su quehacer docente al servir cursos de cálculo diferencial en el bachillerato y la universidad. Estos dos espacios, a pesar de sus diferencias sustanciales, tienen en común las dificultades de comprensión que han mostrado los estudiantes frente al concepto de continuidad.

Para poder cumplir con el objetivo trazado, el siguiente paso fue la elección, dentro de un amplio abanico de posibilidades, del marco teórico que mejor pudiera ayudarnos a dar respuesta a la pregunta de investigación. La teoría de Pirie y Kieren se convierte en una opción debido a que constituye un reto, dado que se conocen pocas investigaciones que la usen como marco teórico.

La entrevista de carácter socrático

Investigaciones como las de Campillo & Pérez (1998) y Jurado & Londoño (2005), dan cuenta de la entrevista socrática como un instrumento efectivo en la detección de niveles de razonamiento en estudiantes, además de ser un instrumento valioso de intervención en el aula, que les permite el crecimiento de la comprensión del concepto propio de un determinado estudio.

La entrevista permite entonces no solo detectar los niveles de razonamiento, sino que el estudiante progrese en la comprensión del concepto, ya que lo lleva desde las creencias y concepciones iniciales hacia un conocimiento elaborado y profundo mediante sus propias reflexiones.

Decálogo para el diseño de una entrevista de carácter socrático

En la investigación llevada a cabo por Jurado & Londoño (2005) se determinó el llamado *decálogo de la entrevista socrática*. Según los autores, se puede inferir después de un estudio detallado del diálogo *Menón*. Este decálogo es la base del guión entrevista aplicado a los participantes.

1. La intencionalidad de la entrevista
2. El lenguaje
3. Los conceptos básicos
4. Las experiencias previas del entrevistado
5. El diálogo inquisitivo
6. La movilización del pensamiento
7. El aporte de información
8. La problematización con las ideas
9. El paso por los tres momentos
10. La red de relaciones

En principio se realizaron cuatro entrevistas semiestructuradas de carácter socrático a cuatro estudiantes del grado once de la respectiva institución educativa. Estas sirvieron como base para la construcción del guión entrevista, que se aplicó a los estudiantes del estudio y con quienes finalmente se refinó, y también sirvieron para redactar los descriptores hipotéticos, que se usaron como base para llegar a la versión definitiva con los estudiantes del estudio de caso. En estas entrevistas piloto se detectó la necesidad de precisar varias preguntas que no resultaban suficientemente comprensibles por los estudiantes y también se vio la necesidad de incluir procesos de razonamiento infinito, ya que se detectaron dificultades adicionales en la comprensión del concepto de límite y en el manejo de la terminología propia de relaciones, funciones límites e incluso de la continuidad misma.

Entre los cuatro estudiantes del estudio de caso, uno de ellos no logra superar el nivel de comprensión 1 (conocimiento primitivo) del modelo de Pirie y Kieren, dos llegan al nivel 3 (comprensión de la imagen) y el cuarto logra ubicarse en el nivel 4 (observación de la propiedad).

Finalmente se realiza el análisis de los datos, teniendo en cuenta tres fuentes diferentes: la entrevista semiestructurada de carácter socrático, la observación y los documentos escritos producidos por los estudiantes. En la entrevista se presta especial atención a los momentos de *redoblado* que evidencian los estudiantes, cuando deben regresar a conocimientos anteriores y no solo hacer una simple recordación de ellos, sino una revisión y reelaboración de los mismos, para regresar de nuevo al nivel externo y poder avanzar al siguiente nivel del modelo diagramático mostrado en la figura 1.

Según Hernández, Fernández & Baptista (2008), algunos elementos esenciales del diseño fenomenológico elegido son:

> El investigador contextualiza la experiencia en términos de su temporalidad, espacio, corporalidad y contexto relacional.
>
> Las entrevistas, grupos de enfoque y recolección de documentos se dirigen a encontrar temas sobre experiencias personales.
>
> El diseño fenomenológico se basa en el análisis de discursos y temas específicos, así como en la búsqueda de sus posibles significados.

La recolección de la información

La recolección se hace mediante tres instrumentos primordiales: la observación, el análisis de documentos escritos de los participantes y la entrevista semiestructurada de carácter socrático. La misma entrevista constituye el instrumento fundamental de acuerdo con el objetivo planteado; se valida al realizar la triangulación de la información y los resultados del análisis de ella con los hallazgos propios de la observación y el material escrito producido en cada caso.

El trabajo de campo

Con el fin de describir y analizar las respuestas de los estudiantes durante las entrevistas, fueron identificados para cada uno de los cuatro casos los momentos de *folding back* o "redoblado" de que trata la teoría. El programa para análisis de datos cualitativos ATLAS.ti 6.2 se usó como herramienta para realizar el análisis, dada su versatilidad para «segmentar datos en unidades de significado, codificar datos y construir teoría» (Hernández, Fernández & Baptista, 2008: 669). También vamos teniendo en cuenta los resultados arrojados por la observación de los estudiantes y la documentación escrita, ya que nos permite enriquecer el análisis, dar cuenta de los descriptores de nivel y ubicar con mayor claridad los momentos de "redoblado" que se evidenciaron. Asimismo, todos los elementos anteriores nos permiten analizar cómo están comprendiendo el concepto estos cuatro estudiantes, objetivo principal de esta investigación.

Como mencionamos, los bloques de preguntas están en correspondencia con los cuatro niveles del modelo de Pirie y Kieren. Por esta razón, orientamos el análisis desde el nivel uno en adelante y avanzamos a los siguientes niveles de acuerdo con las evidencias mostradas por cada estudiante y su progreso dentro de la entrevista.

3. Resultados

Comprensión para el caso de Juan en correspondencia con los descriptores

Juan es estudiante del grado once. Una vez finalizado el trabajo de campo, Juan muestra evidencias de comprensión, tales como el reconocimiento gráfico de funciones básicas, utiliza con propiedad los nombres de dichas funciones y muestra progreso en la determinación de sus características. Se da cuenta de que la expresión analítica o la gráfica de la curva no son necesarias para establecer una correspondencia entre variables que se pueda definir como una función; usa criterios gráficos como la recta vertical, para reconocer funciones dada una curva en el plano, y puede hallar límites de funciones básicas tanto usando métodos algebraicos como la visualización.

Por ejemplo, la pregunta 7 indaga a Juan sobre la descripción de funciones y sus características:

«¿Qué procedimientos haría yo? Yo primero miraría lo normal, miraría su dominio, sus puntos de intercepción, si sería simétrica o asimétrica; después, intercepción, dominio, simetría, puntos de reflexión; pues miraría a partir de su gráfico, tomaría su rango, o muchas veces si la función me lo permite tomar antes el rango, la hago, y a partir de ello lo haría».

En cuanto al concepto de continuidad local, tiene dificultades para relacionar la aproximación infinita con el concepto de límite y a su vez con el de continuidad; todavía presenta dificultades para reconocer la existencia de funciones por tramos y no logra establecer condiciones gráficas para que una curva pueda ser controlada por una ventana de aproximación. Finalmente no logró decidir en forma general cuándo existe el límite de una función en un punto y tampoco cuándo dicha función es continua en el punto, a pesar de haber progresado en reconocer que un límite es alcanzable mediante un proceso infinito de aproximación y que su existencia es una condición necesaria para la continuidad (ver figura 2).

Por las razones anteriores, el estudiante no sobrepasó el nivel 1 del modelo de Pirie y Kieren. Sin embargo, progresó notablemente en su comprensión de los tres conceptos involucrados aquí.

Comprensión para el caso de Sofía, en correspondencia con los descriptores

Sofía es estudiante universitaria del primer semestre; cursa actualmente cálculo diferencial. Sofía logra avanzar y superar los descriptores para los cuatro niveles del modelo de Pirie y Kieren; reconoce y diferencia con propiedad tanto funciones básicas como funciones por tramos, trascendentes y aquellas con comportamientos "extraños" poco utilizadas a nivel escolar y en clases de cálculo diferencial por los docentes.

Al indagar a Sofía sobre la existencia y características de las funciones por tramos («¿Qué es para ti una función por tramos?»), responde:

«Por tramos, está definida en cierto intervalo, están definidas por una expresión, por decirlo así, por ejemplo de 0 a 1 que sea por ejemplo a 2, hasta antes que 1, por ejemplo $2x$, y que 1 a 2 sea otra expresión, o sea en cierto intervalo del dominio está representada por una expresión la función».

Al abordar el análisis gráfico de funciones, ella puede caracterizarlas y usar la terminología apropiada para cada aspecto. Gracias al trabajo de campo, esencialmente el de la entrevista, ella logra vincular los procesos infinitos con el concepto de límites de funciones, establece condiciones gráficas para la existencia del límite sin la ayuda de la expresión analítica y supera los obstáculos iniciales propios de las funciones por tramos en este aspecto.

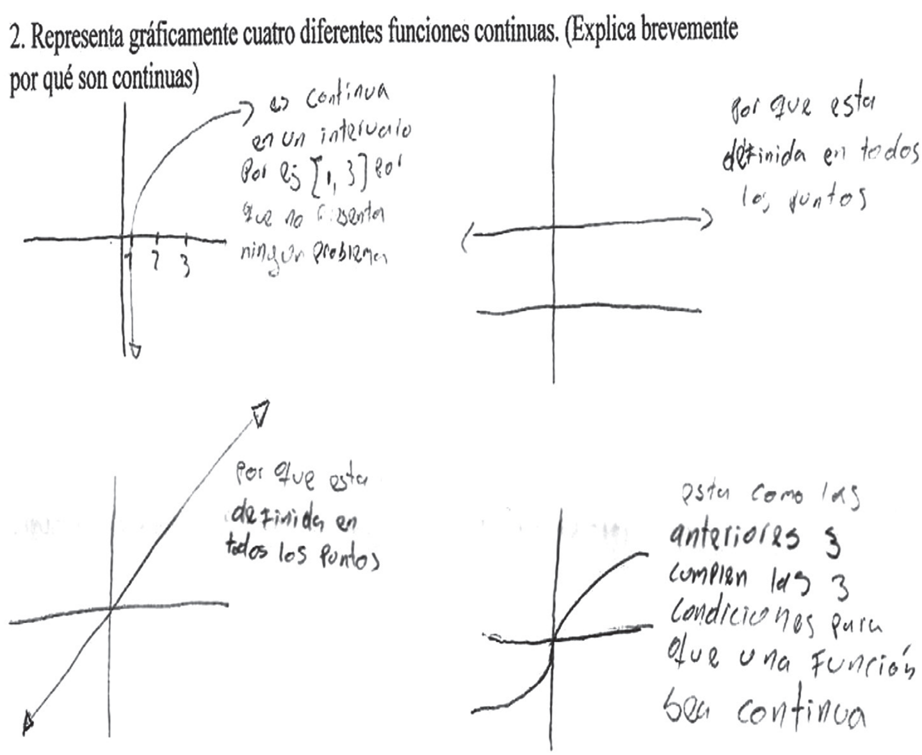

Figura 2. Explicaciones dadas por Juan sobre por qué algunas funciones son continuas o no.

También vincula las condiciones algebraicas para la existencia del límite con la gráfica de la función, y desde allí establece parámetros visuales y geométricos que garanticen la controlabilidad de la curva y su respectiva continuidad; por ejemplo, la existencia de la función en el punto, la posibilidad de establecer una ventana de control con centro en dicho punto, el comportamiento de la porción de curva encerrada en la ventana al sufrir las variaciones en la base de la ventana, entre otros.

Entrevistador: «Entonces, ¿qué condiciones debería cumplir una curva en la ventana de control para tener un límite?»

Sofía: «A medida que hacemos los *zooms*, ella se debe ir estirando, salirse por los lados y no por arriba».

Entrevistador: «¿Qué quiere decir, que no se salga por encima o por debajo?»

Sofía: «Pues, que a medida que hacemos mas pequeña la base, o sea, que los lados se acercan al centro, la curva va estabilizándose en el valor del límite, se va convirtiendo en línea recta».

En la figura 3 se evidencia la situación que ella explica al usar el Geogebra en la manipulación de una curva.

Este análisis cualitativo nos permite concluir que cada uno de los fenómenos evidenciados en los cuatro casos (Juan, Diego, Santiago y Sofía) da cuenta de cómo los descriptores están en correspondencia de manera directa con cada uno de los cuatro primeros niveles del modelo de Pirie y Kieren:

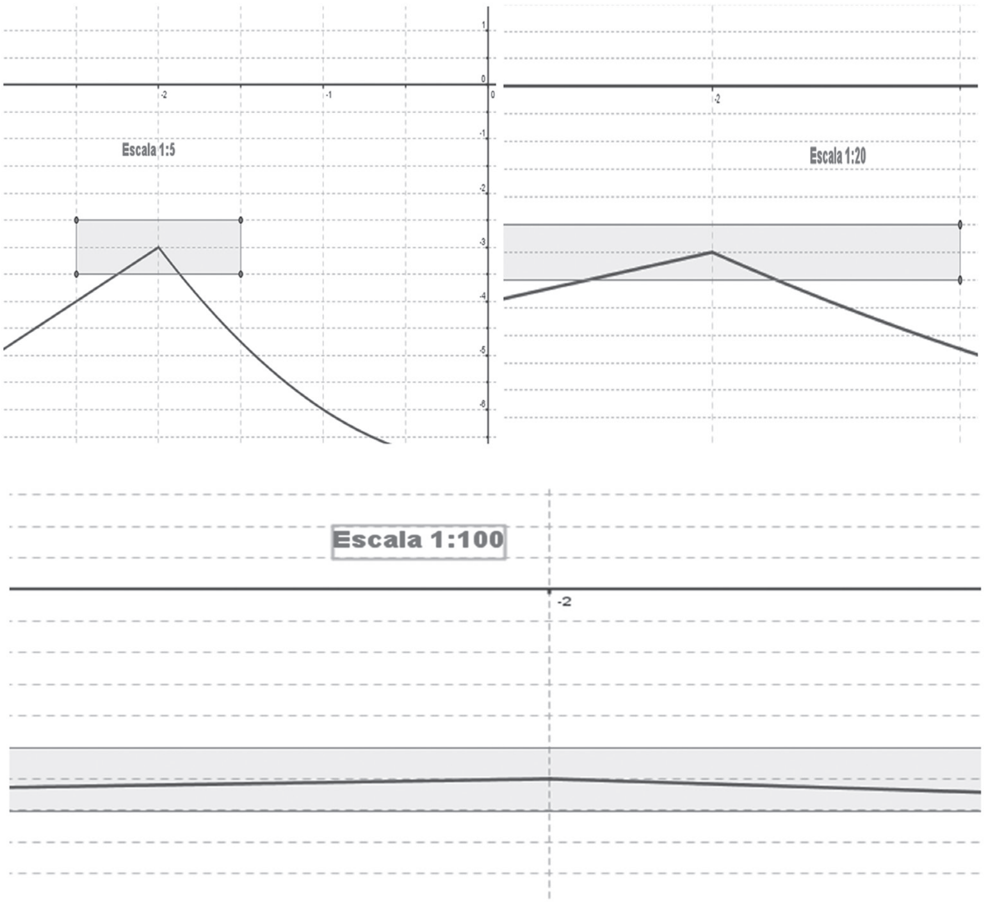

Figura 3. Comportamiento de una función continua en un punto evidenciado por Sofía al manipular la herramienta virtual.

Descriptores para los primeros cuatro niveles del modelo con respecto al concepto de continuidad

Nivel 1. Conocimiento primitivo

De acuerdo con las entrevistas, y durante todo el proceso de ellas, se requiere que los estudiantes muestren evidencias de los procesos de aprendizaje que tienen que ver con los siguientes descriptores:

1. Reconoce una función como una relación entre variables establecida por una regla.
2. Usa el criterio de la recta vertical para diferenciar visualmente una relación de una función.
3. Reconoce y traza funciones básicas de la forma $y = f(x)$ en el plano cartesiano.[6]
4. Manifiesta una idea intuitiva de límite, haciendo uso de la visualización geométrica para calcular su valor en funciones básicas.

Descriptores de separación...

5. No relaciona el proceso analítico con el de aproximación visual, cuando calcula límites de funciones básicas.
6. Presenta dificultades para reconocer la existencia de funciones por tramos.

6 En este trabajo, funciones básicas son las usadas con mayor frecuencia dada su fácil representación gráfica y simple expresión analítica. Entre ellas se puede apreciar:
$y=c,\ y=mx+b,\ y=x^2,\ y=x^3,\ y=\sqrt{x},\ y=\sqrt[3]{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{1}{x^2},\ y=|x|,\ \ldots$

Nivel 2. Creación de la imagen

En este nivel de la comprensión, el entrevistado crea imágenes mentales, que no necesariamente son pictóricas, para transmitir significados a través de ellas; dichos significados permiten obtener información sobre el objeto matemático. Sus descriptores son:

1. Reconoce la existencia de funciones por tramos.
2. Encuentra el dominio y el rango de una función.
3. Describe el comportamiento de una función desde su representación gráfica.

Descriptor de separación...

4. Se le dificulta encontrar el límite de una función por tramos, haciendo uso de la visualización geométrica o de una tabla de valores.

Nivel 3. Comprensión de la imagen

En este nivel los estudiantes reemplazan las imágenes asociadas con una sola actividad por imágenes mentales que se consideran orientadas por un solo proceso. De acuerdo con esta consideración, los descriptores de este nivel son:

1. Establece el valor de una función en un punto, haciendo uso de un proceso de aproximación.
2. Usa la gráfica de una función para aproximar su valor en un punto, sin tener en cuenta su expresión analítica.
3. Establece que no es posible aproximar el valor de la función en un punto, si las variaciones de ella son demasiado grandes alrededor de dicho punto.
4. Plantea condiciones para la existencia del límite de una función en un punto.
5. Reconoce que el valor límite se puede alcanzar en un punto a través de un proceso de aproximación infinito.

Descriptor de separación...

6. No relaciona la existencia del límite de una función en un punto con la continuidad de ella en dicho punto.
7. No interioriza el mecanismo de la ventana de control como una herramienta adecuada para determinar la continuidad de una función en forma visual geométrica.

Nivel 4. Observación de la propiedad

El estudiante que comprende en este nivel está en la capacidad de construir un concepto-definición, creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas en vez de las imágenes desconectadas. Por tal razón, los descriptores correspondientes a este nivel de comprensión serán:

1. Relaciona el control de errores con el concepto de continuidad, estableciendo rangos admisibles para dichos errores.
2. Establece que no es necesaria una representación geométrica o algebraica de una función, si se conocen los errores generados alrededor de una ordenada, dadas variaciones “infinitesimales” en la abscisa.

Además se concluye que la continuidad es una característica local de las curvas y da un sentido geométrico claro a las condiciones previamente establecidas para su reconocimiento.

La entrevista semiestructurada de carácter socrático es un instrumento en la movilización de la comprensión desde los niveles iniciales hacia los externos, lo que involucra madurez conceptual y episodios de redoblado, que a cada uno de los entrevistados, desde sus particularidades en el aprendizaje, les permitió reconstruir sus concepciones iniciales, darles el sentido de acuerdo con las definiciones formales y apropiar conocimientos y lenguaje nuevos sobre los conceptos matemáticos pertinentes aquí.

4. Conclusión

Consecución de los objetivos

En general se buscaba diseñar una entrevista de carácter socrático que permitiera analizar cómo comprenden los estudiantes del estudio de caso el concepto de continuidad. El objetivo se logró ampliamente: tanto la entrevista como la observación de los estudiantes y los registros escritos permitieron hacer un acercamiento profundo a las evidencias de comprensión de los estudiantes participantes. Pudimos constatar que en los casos analizados también hay dificultades con la comprensión de otros conceptos asociados a la continuidad, como el de función y de derivada; en esta medida se hace importante dotar el concepto del componente visual geométrico de la ventana de control, para prescindir notoriamente de la utilización de términos confusos para ellos y generar la comprensión a través de la manipulación de los procesos infinitos y la controlabilidad de la curva en el interior de la misma. Esta última parte deja abonado el terreno de la formalización propia de la definición épsilon-delta y facilitaría notablemente la comprensión de la definición formal.

Respuesta a la pregunta de investigación

Los descriptores finales nos permitieron caracterizar el proceso de comprensión de los cuatro estudiantes del estudio de caso y descubrir el nivel en que estaban comprendiendo el concepto. Estos descriptores refinados cumplieron con las propiedades generales de los niveles del modelo diagramático de Pirie y Kieren y fueron fundamentales para determinar las evidencias de comprensión de cada estudiante, ubicarlo en el nivel correspondiente y explicar cómo se presentaba en él la comprensión que pretendíamos analizar. De acuerdo con el marco teórico elegido, se constató que durante el paso por los niveles el estudiante mostraba un lenguaje propio de su estado de comprensión y que, gracias a la entrevista, iba depurando y enriqueciendo dicho lenguaje y avanzando a la superación de los niveles. Otro aspecto importante fue el hecho de que varias de las preguntas generaron en los estudiantes experiencias de *folding back*, que les hacían regresar a niveles anteriores y perfeccionar actos de comprensión para continuar avanzando a niveles superiores.

Referencias bibliográficas

Campillo Herrero, Pedro y Pérez Carrera, Pedro (1998). «La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van-Hiele». En: *Divulgaciones Matemáticas*, Vol. 6, N.º 1, pp. 69-80. Maracaibo: Universidad de Zulia.

Cornu, Bernard (1991). «Limits». En: Tall, David (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166. Dordrecht: Springer.

Guzmán, Miguel de (2001). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Madrid: Pirámide.

Hernández SAmpieri, Roberto, Fernández Collado, Carlos y Baptista Lucio, Pilar (2008). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.

Jurado, Flor María y Londoño Caro, René Alejandro (2005). *Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Meel, David E. (2003). «Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE». En: *RELIME. Revista Latinoamenricana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 6, N.º 3, pp. 221-278. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).

MInisterio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá, Colombia. Fecha de consulta: noviembre 21 de 2009 Cf. http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html

Pirie, Susana y Kieren, Thomas (1994). «Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?» En: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 26, N.os 2-3, pp. 165-190. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Tall, David (1991). «The psychology of advanced mathematical thinking». En: Tall, David (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 3-21. Dordrecht: Springer.

Glasersfeld, Ernst von (1987). *The Construction of knowledge. Contributions of conceptual semantics*. Seaside: Intersystems Publications.

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Artículo recibido: 31-05-2013. Aprobado: 20-11-2013