OS PONTOS IMAGINÁRIOS NAS OBRAS DE PONCELET, CHASLES E LAGUERRE

Jansley Alves Chaves
Gerard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo da elaboração do conceito de pontos imaginários sob o ponto de vista de três autores: Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1793-1880) e Edmond Nicolas Laguerre (1834- 1886). Inicialmente, o conceito de pontos imaginários nos trabalhos de Poncelet surge em seus manuscritos de Saratoff. Posteriormente iremos encontrá-lo em sua memória *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques* [Poncelet, 1820], apresentado à Académie des Science de Paris e, com mais ênfase, em seu *Traité des propriétés projectives des figures* [Poncelet, 1822]. Poncelet considera, em seu trabalho, que todas as circunferências de círculos do plano se intersectam em dois pontos, os chamados pontos imaginários (pontos cíclicos). Esta noção é vista como uma das consequências do princípio de projeção e do princípio de continuidade. A ideia de Chasles em seu trabalho Géométrie supérieure [Chasles, 1852], é dar uma interpretação dos elementos imaginários através dos elementos reais. Laguerre, em três breves artigos [Laguerre, 1852, 1853a, 1853b], utiliza-se dos trabalhos de seus antecessores para apresentar uma brilhante solução da utilização das propriedades métricas das figuras e dos ângulos, quando trata de elementos imaginários.

Abstract

The goal of this work is to study elaboration of imaginary points concept from the point of view of three authors: Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1793-1880) and Edmond Nicolas Laguerre (1834-1866). Imaginary points notion concept appears at Poncelet's works into his Saratoff manuscripts. Later, it is found on his memoir *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques* [Poncelet, 1820], presented to the Académie des Sciences de Paris and, with more emphasis, on his *Traité des propriétés projectives des figures* [Poncelet, 1822]. Poncelet considers, during his work, that all circles'

Recibido el 10 de junio de 2019 — Aceptado el 26 de agosto de 2019
https://doi.org/10.47101/llull.2020.43.87.04chaves

circumferences of a plane intersect each other at two points, the so-called imaginary points (cyclic points). This notion is seen as one of the consequences of the principle of projection and the principle of continuity. Chasles' idea, at his work Géométrie supérieure [Chasles, 1852], is to give an interpretation of imaginary elements through real elements. Laguerre, along three short articles [Laguerre, 1852, 1853a, 1853b], when dealing with imaginary elements, uses his predecessors' works to present a brilliant solution for use of figures and angles' metrical properties.

Palavras-chaves: Pontos imaginários, geometria projetiva, Poncelet, Chasles, Laguerre.

Keys words: Imaginary points, projective geometry, Poncelet, Chasles, Laguerre.

Palabras claves: Puntos imaginarios, geometría proyectiva, Poncelet, Chasles Laguerre.

1. Introdução

Um dos aspectos mais interessantes da elaboração da geometria projetiva na primeira metade do século XIX, com Poncelet, Chasles e outros matemáticos, é como tentaram dar um sentido geométrico as expressões: elementos ao infinito e elementos imaginários.

As primeiras obras publicadas por Poncelet são, em geral, trabalhos de uma geometria projetiva com viés sintético. Mais tarde, a geometria projetiva seria elaborada em uma perspectiva analítica por Julius Plücker (1801-1868) e outros, com a introdução das coordenadas homogêneas. Aliás, com este tipo de coordenadas chega-se a uma representação analítica, não apenas dos pontos de uma figura traçada na geometria tradicional herdeira de Euclides, mas também dos pontos ao infinito, reais ou imaginários em termos de coordenadas o que, simples coordenadas cartesianas, não nos possibilitam. Na obra de Poncelet, e nos tratados de Chasles, o apelo é sintético, as coordenadas são para substanciar essas ideias de uma geométrica sintética, já que para os geômetras sintéticos são as figuras que desempenham um papel essencial. Coloca-se assim o problema de determinar em quais condições os conceitos de pontos imaginários ao infinito sugiram nas obras destes autores. Se a resposta é clara à reta dos pontos ao infinito, pois é a reta dos pontos de encontro das paralelas vista sob uma perspectiva central, há, no entanto, no caso dos pontos imaginários ao infinito, de se recorrer a diferentes tipos de argumentações. Poncelet justifica o uso dos elementos ao infinito ou dos elementos imaginários pelo princípio da continuidade. Chasles desenvolve a ideia de generalizar os métodos analíticos para justificar a utilização dos elementos imaginários em geometria pura, ou seja, considera as relações em uma figura qualquer e aplica estas relações mesmo quando os pontos da figura não são passíveis de construção. Assim os pontos reais justificam a existências dos imaginários e vice-versa. Laguerre expõe seu ponto de vista sobre os imaginários em geometria utilizando uma métrica.

Tentamos, neste breve artigo, descrever os diferentes tipos de argumentações a respeito da existência de tais pontos imaginários na geometria francesa da primeira metade do século XIX. Veremos, numa primeira parte, como esses pontos aparecem nos trabalhos de Poncelet e o emprego que ele considera para resolver algumas questões ligadas a família de circunferências de círculos e de cônicas. Em um segundo momento, analisaremos como Chasles articula esses conceitos em sua obra, utilizando um método que denominou de princípio das relações contingentes. Por fim, veremos as reflexões que apresenta o jovem Laguerre em seus artigos, que o conduzem a uma concepção projetiva da noção de ângulo, ou seja, segundo Laguerre se duas retas *d* e *d'* com um ponto comum real *O* e sendo *P* e *Q* pontos imaginários. Ele afirma que o ângulo entre as retas *d*, *d'* tem por valor o quociente do logaritmo da dupla razão dessas duas retas com as retas *OP* e *OQ* por *2i.*

Assim, neste artigo pretendemos seguir a elaboração destes três geômetras franceses sobre o conceito de pontos imaginários através de uma leitura dos seus artigos publicados, de seus trabalhos e das questões advindas delas.

2. Jean-Victor Poncelet

2.2. *Os objetos geométricos imaginários nos cadernos de Saratoff*

Nesta parte e na parte seguinte do nosso artigo pretendemos seguir a elaboração por Poncelet do conceito de pontos imaginários de circunferência de círculos ou de cônicas através de uma leitura, primeiro, de alguns dos sete cadernos de Saratoff, segundo, dos outros sete cadernos que ele redigiu em Metz no período compreendido entre 1814 e 1822.

No Segundo caderno de Saratoff vemos a primeira aparição da noção de objetos geométricos imaginários. Depois de ter estudado a interseção de um cone e de um plano por via de sistema de equações, Poncelet [1862, pp. 68-78] observa que a equação da seção cônica pode ser escrita sob a forma: $My^2 \pm Nx^2 - Px = 0$.

Discutindo os valores possíveis do parâmetro, ele examina o caso de M e N positivos e $P=0$ e a equação se torna: $My^2+Nx^2=0$.

Desta maneira ele dá duas interpretações à equação:

- quando $x = y = 0$, caso do *ponto isolado*.

- quando $y = \pm\sqrt{-\frac{N}{M}}\,x$, caso das *retas imaginárias.*

Parece-nos que é, talvez, a primeira vez que um matemático não encontra dificuldade em estudar um caso onde trata naturalmente objetos geométricos imaginários. Deduz analiticamente das suas equações, que o vértice do cone está na origem do referencial. Discute a posição do cone nesta situação e constata que o cone, exceto o vértice, não tem interseção com o plano *xy*.

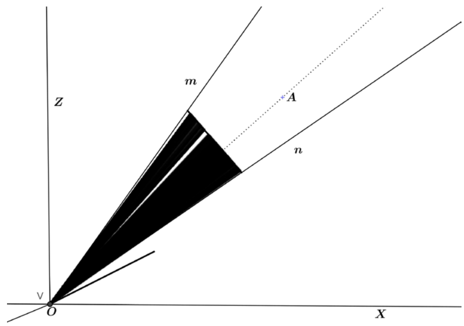

Figura 1. Cone: vértice real e geratrizes imaginárias
(Todas as construções geométricas do artigo foram feitas pelos autores utilizando o aplicativo de geometria dinâmica Geogebra)

Temos que observar que este tipo de desenho é uma representação antes do rebatimento no procedimento de construção de figura na geometria descritiva, ou seja, estamos diante do objeto em *3D*. Aliás, como veremos, em todos os desenhos, Poncelet utiliza o mesmo tipo de representação. Talvez seja a razão pela qual os procedimentos projetivos foram incluídos dentro da *geometria descritiva,* até Clebsch definir como *geometria projetiva* a área da matemática inaugurada por Poncelet. Clebsch usa o termo "projektiv geometrie" para descrever o trabalho coletivo de Poncelet, Gergonne, Möbius, Steiner, Plücker entre outros matemáticos no início do século XIX [Clebsch, 1871 *apud* Lorenat, 2015, p. 25].

Em seu terceiro caderno de Saratoff, Poncelet procura o lugar geométrico dos vértices *S* de um cone cuja projeção sobre o plano horizontal é uma circunferência de círculo de centro *c*. Assim, seja dado ainda uma reta *PL* horizontal, o ponto *S* deve estar tal que o plano da seção subcontrária seja paralelo ao plano definido pela reta *PL* e pelo vértice *S*. Quando a reta *PL* é exterior à circunferência de círculo de centro *C*, a construção de Poncelet segue os passos seguintes: o prolongamento do diâmetro *AB* encontra a reta *PL* em *K*. Traçando a tangente *KT* à circunferência de círculo de centro *C*, mostra Poncelet que os vértices *S* se encontram em um plano perpendicular à reta *PL* contendo o diâmetro *AB* (plano diametral) distante *KT* (raio) do ponto *K*. Segue a figura que Poncelet apresenta em seus trabalhos seguindo as regras do desenho descritivo (2a), e a nossa em perspectiva (2b):

Vejamos a explicação de Poncelet para determinar o vértice *S* em um plano diametral e distante *KT* do ponto *K*

Seja *S* o centro de projeção. Consideremos o cone oblíquo que terá seu vértice neste ponto e por base a seção cônica dada de diâmetro *AB*: esta será a superfície cônica projetante desta curva; consideremos um plano que contenha o ponto *S* e a reta dada *PL*: será o plano projetante desta reta. Segundo as condições do problema, deve existir um certo plano de projeção que corta a superfície cônica projetante segundo uma circunferência de círculo, e a reta *PL* é projetada, neste plano, ao infinito, ou seja, este plano de projeção deve ser paralelo ao plano *S - PL*; estas duas condições são incompatíveis se o plano projetante *S - PL* e a base do cone *C* se intersectarem. Então:

Em primeiro lugar a reta *PL* deve ser situada fora da seção cônica *C*, ou seja, ela deve ser uma corda ideal.

Em segundo lugar, se estas condições são satisfeitas em relação a certo plano de projeção, serão, também, por todos os planos paralelos a este plano, pois a reta *PL* será, sempre, projetada ao infinito.

Este texto é amplamente comentado por Friedelmeyer [FRIEDELMEYER, 2011, pp. 55-158] que encontra nele a primeira intuição de Poncelet do princípio de continuidade. Ao nosso artigo, interessa apenas a discussão que Poncelet traz após a construção:

> Lorsque la droite *PL* (fig. 55) rencontre le cercle *(c)*, la construction précédente devient impossible ; car le point *k* se trouvant alors dans l'intérieur du cercle, il est impossible géométriquement aussi, de lui mener des tangentes par ce point. Néanmoins, dans le même cas, l'analyse fait voir que le centre *i*, du cercle conjugué à *(c)* n'a pas cessé d'exister, quoique ce cercle ou son rayon soit devenu imaginaire. La raison en est que le point est lié à *k* par une relation algébrique qui subsiste quelle que soit la position de la droite *PL* à l'égard du cercle *(c)*. [PONCELET, 1862, p.123].

Com efeito, se o ponto *K* está no interior da circunferência de círculo, a tangente *KT* é uma reta imaginária com um único ponto real, o ponto *K*. Poncelet pela primeira vez evoca implicitamente o caso das tangentes imaginárias à circunferência de círculo. Para fazê-lo deve-se basear sobre as relações algébricas. É a análise, portanto, que guia o seu raciocínio geométrico. Aliás nas páginas que seguem, Poncelet [1862, pp. 124-125] enfatiza as relações entre equações algébricas e as propriedades geométricas, observando que se certas quantidades se tornam imaginárias, as relações persistem apesar dos objetos geométricos não serem efetivamente passíveis de construção. Há, todavia, um análogo ao raciocínio algébrico. Poncelet observa que o ponto *K* percorrendo a reta *AB*, e sendo entre os pontos *A* e *B*, as tangentes são imaginárias, mas sendo o ponto *K* exterior ao diâmetro *AB* as tangentes se tornam de novo passíveis de construção. Temos então o que Poncelet irá chamar de princípio de continuidade. Ou seja, a permanência das propriedades.

Em seu quarto caderno, Poncelet estuda um problema de lugar geométrico de um ponto (α), em relação a uma circunferência de círculo, que conduz à equação de uma cônica, e discute os pontos de tangência desta cônica (α) e da circunferência de círculo. Um dos parâmetros da equação é a distância entre um ponto *A* da construção e o centro da circunferência de círculo. Quando este ponto *A* está no exterior da circunferência de círculo, o contato se torna imaginário. Poncelet acrescenta:

> Il faut bien distinguer encore cette impossibilité, qui n'est que relative, de celles qui sont absolues: celle-là n'a leu que pour des cas particuliers, celles-ci subsistent toujours; et, quoique dans le premier cas, une relation descriptive puisse cesser d'être géométriquement, pour une série de positions des parties de la figure, elle doit cependant être rangée au nombre des propriétés générales de cette figure. Ainsi il est permis de dire que la propriété qu'ont le cercle (C) et la courbe (α) d'être tangentes en deux points déterminés, est une propriété spécifique dont ces courbes doivent être censées jouir,

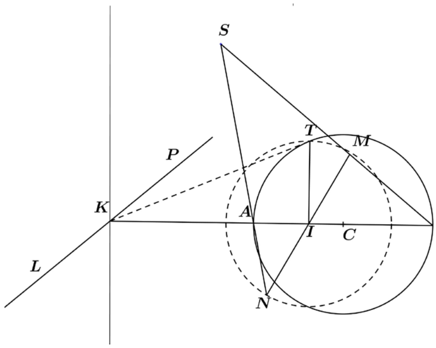

Figura 2a Poncelet, 1862, p. 122

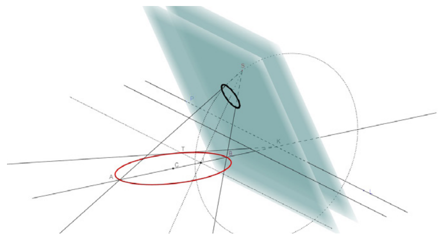

Figura 2b Representação em perspectiva

> même dans le cas où le contact devient imaginaire; les conséquences géométriques tirées de cette propriété étant vraies aussi, généralement parlant, mais pouvant cesser d'offrir un sens géométrique pour une série de positions particulières des données de la figure [Poncelet, 1862, p.203].

Poncelet parece aqui oscilar entre duas posições: primeiro, atribui ao "contato imaginário" uma significação geométrica. Mas num segundo tempo ele afirma que estes casos onde as soluções algébricas são imaginárias não oferece plenamente um sentido geométrico. A gente vê nesta hesitação a dificuldade de admitir os pontos imaginários como pontos que tem o mesmo status dos pontos reais.

O sétimo caderno é um resumo dos cadernos que Poncelet pretendia apresentar à Academia de St-Petersburg, mas sua libertação, com o acordo de paz em julho de 1814, interrompeu suas pretensões. Esta memória era de fato um resumo dos seis primeiros cadernos e constatamos uma nova observação de Poncelet:

> Un système quelconque de cercles sur un plan, devant toujours être censé avoir une corde commune l'infini, si l'on suppose, de plus, que ces cercles en aient une commune à distance finie, il est évident que ces deux cordes seront conjuguées entre elles, et que les autres cordes que ces cercles sont en commun, analytiquement parlant, sont toutes quatre illusoires ou imaginaires [Poncelet, 1862, p. 424].

Podemos ilustrar o pensamento de Poncelet pela figura seguinte, onde os pontos *I* e *J* são os dois pontos imaginários ao infinito que pertençam a todos as circunferências de círculos do plano projetivo. A corda real é *AB* podendo ser ideal, mas sempre a uma distância finita. As quatro cordas imaginárias são: *AI, AJ, BI, BJ*. E a corda comum ao infinito é a que contém os pontos cíclicos: *I* e *J*.

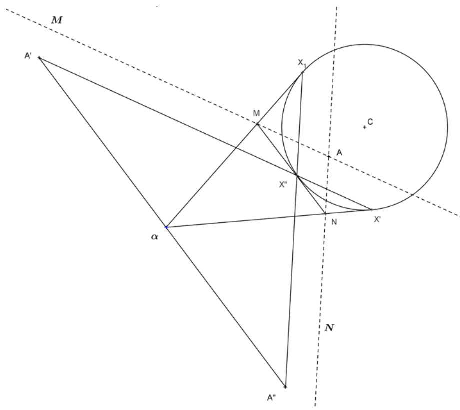

Figura 3. O ponto α descreve uma cônica

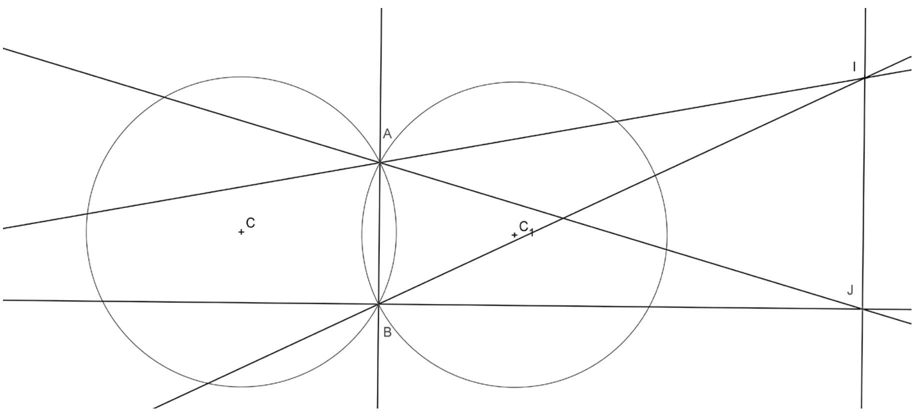

Figura 4. As seis cordas comuns a um sistema de circunferências de círculos quaisquer

Com efeito, a observação de Poncelet só pode ser entendido com a existência dos pontos *I* e *J* imaginários ao infinito.

Observa-se aqui e em todo pensamento de Poncelet que existe o fato de nunca perder de vista a figura, mesmo quando não for passível de construção ou cessão de existir, do ponto de vista geométrico, isto porque todos seus princípios são fundamentados na Análise algébrica.

2.2. Os objetos imaginários nos cadernos de Metz

Chamamos *Cadernos de Metz* os sete manuscritos que Poncelet redigiu ao retornar à França após a sua libertação de Saratoff até a publicação de seu tratado, período que compreende 1814 a 1822. Poncelet irá publicar em 1864 toda documentação relativa a este período (artigos, cartas, memórias, ...).

No primeiro caderno, Poncelet trata das propriedades descritivas dos polígonos cujos vértices são variáveis sobre certas condições. Na proposição XXI, Poncelet considera duas cônicas bitangentes e um triângulo *ABC* inscrito numa das cónicas. Um dos lados deste triângulo *BC* sendo tangente à segunda cônica e outro lado *AB* passando por um ponto fixo *P*. Poncelet quer mostrar que, quando os pontos *A* e *C* percorrem sobre *O*, a cônica exterior, o lado *AC* envelopa uma terceira cônica que também será tangente à cônica *O*.

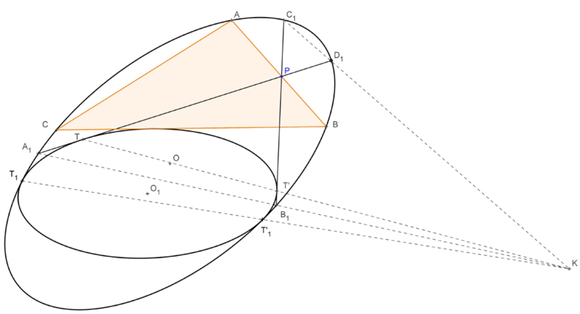

Figura 5. Duas cônicas bitangentes

Para demonstrar esta proposição, Poncelet observa que duas cônicas bitangentes são projeções de duas circunferências de círculos concêntricos, e que basta então demostrar esta propriedade apenas no caso de duas circunferências de círculos concêntricas, ressaltando após a demonstração o fato que os pontos comuns as duas cônicas são projeções dos pontos imaginários ao infinito:

> On peut remarquer aussi que les trois droites *AB, tt', CD* sont parallèles entre elles, et qu'ainsi elles vont concourir à l'infini sur la corde commune aux deux cercles concentriques *(O)* et *(o)* (Principes de projection, t. I) [Poncelet, 1862, p. 116]

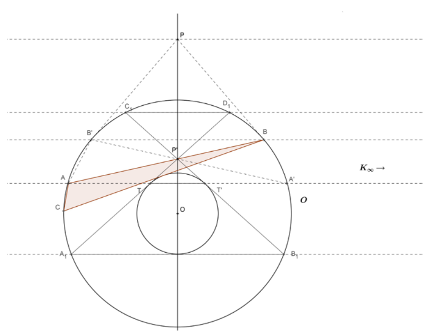

Figura 6. Perspectiva de duas cônicas bitangentes: duas circunferências de círculos concêntricas

No terceiro caderno, artigo 64, Poncelet considera as construções possíveis da média geométrica de duas quantidades *Ax* e *xB*, sendo *x*uma variável situada entre *A* e *B*. Este problema já havia sido analisado por Carnot [1801, pp. 181-185].

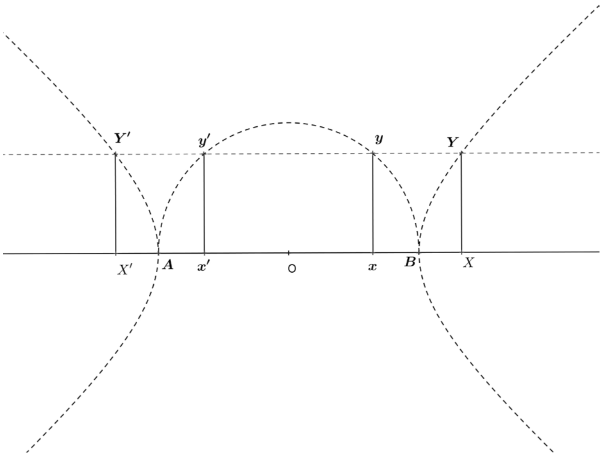

Figura 7. Média geométrica de dois segmentos.

Poncelet segue aqui a construção de Euclides, traçando uma circunferência de círculo de centro *O* e de diâmetro *AB*, sendo as soluções, simétricas em relação ao eixo perpendicular ao diâmetro em *O*, e verificando $Ax.xB = (xy)^2=k^2$. A interseção da circunferência de círculo e da reta de equação $y = k$ determina as soluções *xy* do problema. Poncelet constata que se procurarmos as soluções do problema se *x* está exterior ao segmento *AB*, as quantidades *Ax* e *xB* se tornam de sinais contrários, e portanto a equação a ser considerada é $Ax.xB=-(xy)^2=-k^2$, e a construção dessas soluções sendo a interseção da reta $y = k$ com a hipérbole equilátera de equação x^2-y^2=r^2, com r=AB/2. Mas, a simetria das construções respectivas se explica segundo Poncelet, pelo fato de a hipérbole equilátera estar em correlação complexa com a circunferência de círculo. A correlação complexa de Carnot consiste em substituir na equação da circunferência de círculo a variável *y* por *iy*. Podemos observar que Poncelet sabe e utiliza os números complexos para entender as relações geométricas. Já, implicitamente, surgem as propriedades geométricas da relação entre circunferência de círculo e hipérbole, através desta correlação complexa, as assíntotas imaginárias da circunferência de círculo se tornam assíntotas reais da hipérbole [Nabonnand, 2016, p. 79].

Poncelet volta a considerar uma correlação complexa no caso da construção de tangentes a uma circunferência de círculo [Poncelet, 1864, p. 237]. Assim, por um ponto exterior a uma circunferência de círculo, há duas tangentes em *T* e *T'*. Se o ponto *S* é interior à circunferência de círculo, Poncelet observa que os pontos de contato *T* e *T'* se tornam imaginários. Aqui Poncelet não chega a falar de tangentes imaginárias à circunferência de círculo, mas, utilizando a correlação complexa, os pontos *T* e *T'* se tornam pontos de tangência da hipérbole equilátera.

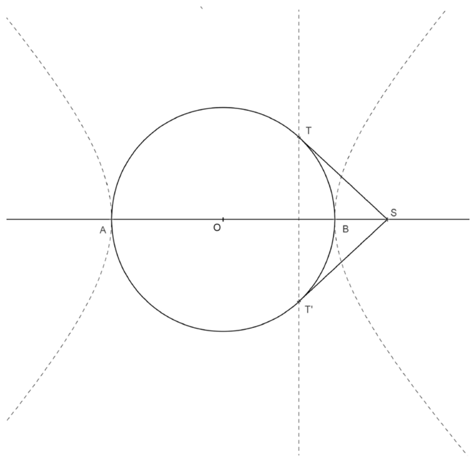

Figura 8. Cônica suplementar

No final do quarto caderno, Poncelet [1864, p. 348] define, de uma maneira mais precisa, a noção de ponto e reta situados ao infinito, assim como, no caso do espaço, a noção de planos e pontos ao infinito.

Considerando a interseção de uma reta e uma curva, no caso de uma interseção vazia no plano real, os pontos de interseção passam a ser imaginários, e sendo esta reta, a reta dos pontos ao infinito, os pontos imaginários se tornam pontos imaginários ao infinito. Poncelet acrescenta em nota:

> Quoique les points à l'infini cessent véritablement d'exister d'une manière géométrique, il est pourtant essentiel de ne pas confondre ceux qui d'abord étaient réels avec ceux qui, au contraire, étaient imaginaires. Les premiers se distinguent des autres en ce qu'ils retiennent encore quelque chose des propriétés qui appartiennent aux points géométriques et absolues. Pour ne pas créer un nouveau terme, nous disons que ce sont des points réels à l'infini et que les autres, au contraire, sont des points imaginaires à l'infini [Poncelet, 1864, p. 350, Nota de 1818].

Este comentário mostra, que para Poncelet, os pontos reais ao infinito e pontos imaginários ao infinito ganham o estatuto de objetos geométricos tão legitimo que os pontos do plano real.

Depois de ter analisado os números de pontos de interseção reais ou imaginários de uma reta e de uma curva de grau *m*, em particular quando a reta intercepta a curva ao infinito, Poncelet aborda o caso das curvas de grau 2:

> D'après ces notions, les courbes du second degré ne peuvent avoir, au plus, que deux asymptotes; ainsi elles ne sauraient offrir que ces trois caractères distincts: deux asymptotes réelles ou deux points distincts et réels à l'infini, deux asymptotes imaginaires ou deux points imaginaires à l'infini, enfin deux asymptotes réunies en une seule à l'infini ou deux points consécutifs à l'infini [Poncelet, 1864, p. 353]

Percebemos neste caderno o resultado das reflexões dos cadernos de Saratoff e dos cadernos de Metz precedentes: uma elipse, em particular uma circunferência de círculo, tem duas assíntotas imaginárias e dois pontos imaginários ao infinito; uma hipérbole tem duas assíntotas reais e dois pontos reais ao infinito; a parábola tem apenas um ponto duplo ao infinito, sendo a reta do infinito tangente neste ponto.

O quinto caderno *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques* [Poncelet, 1820], *é a* memória submetida à Académie des Sciences de Paris, aonde Poncelet apresenta os dois princípios fundamentais: o Princípio da projeção e o Princípio de continuidade. Neste caderno encontramos muitos desdobramentos das ideias desses dois princípios. Um exemplo clássico desta interação, que aparece nos cadernos de Saratoff e que aqui ganha mais riqueza de propriedades, é o teorema IX, que trata de encontrar o lugar geométrico dos vértices de um cone oblíquo de base cônica, tal que uma reta *MN*, coplanar à base, seja projetada ao infinito quando a sub-contrariante é projetada como uma circunferência de círculo.

> Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passé entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle... [Poncelet, 1822, p. 53]

Para demonstrar este Princípio de uma maneira completa, Poncelet reformula o problema:

> Étant données une section conique *C,* et une droite, située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique *C* y soit en même temps représentée par un cercle [Poncelet, 1822, p. 54]

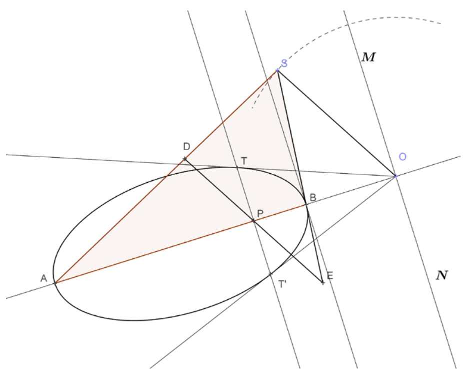

Figura 9. O ponto S pertence ao plano diametral AB

Suponha o problema resolvido: seja *S* o centro de projeção; considere agora o cone oblíquo que teria o seu vértice neste ponto e base a secção cônica dada. A projetante desta curva será uma superfície cônica; considere um plano que passe pela reta *MN* e pelo ponto *S*, será o plano projetante desta reta. Conforme a condição do problema existe certo plano de projeção que secciona a superfície cônica segundo uma circunferência de círculo, dita sub-contrariante, e conduz a reta *MN* ao infinito.

Então:

1. A reta dada *MN* não deverá intersectar a secção cônica dada, ou seja, *MN* é uma secante ideal.

2. Os planos paralelos ao plano projetante da reta *MN* seccionam a superfície cônica segundo uma circunferência de círculo, dita, sub-contrariante ou conjugada da cônica dada.

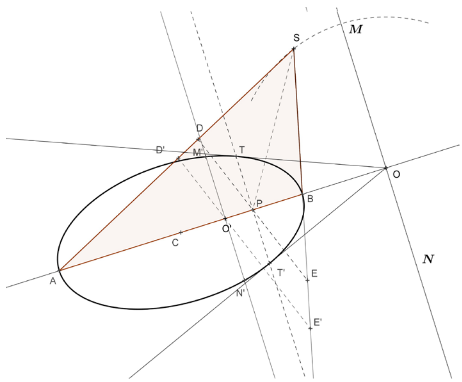

Figura 10. A sub-contrariante

Estudemos a construção: considere um plano por *SAB*, conf. Fig.10, este plano chamaremos de diametral. Observa-se que ele secciona os diâmetros das sub-contrariantes ao meio e contém o vértice *S*. A circunferência de círculo de centro *O* e raio *OT* contida no plano diametral é o L.G. dos pontos *S* procurados. De fato, o traço *SO* é paralelo à *D'E'* e são ambos perpendiculares ao diâmetro *AB* no ponto *O* e *O'* respectivamente, assim o traço *SO* é também perpendicular à corda ideal *MN* no ponto *O*.

Observa-se que o vértice *S* deve necessariamente se encontrar sobre a reta *SO* perpendicular à corda ideal *MN* pelo ponto *O*; como há infinitas perpendiculares à corda *MN* pelo ponto *O*, todas sobre o plano diametral, o centro *S* procurado incide sobre uma circunferência de círculo de centro *O* e raio *OT* sobre o plano diametral.

Sejam *AS* e *SB* arestas da superfície cônica situadas no plano diametral. *D'E'* o traço deste plano sobre a seção circular *M'N'*. Este traço é um diâmetro da secção circular *M'N'* (sub-contrariante), perpendicular à corda *M'N'* no ponto *O'*. De tal forma que:

$$O'M'^2 = O'\,D'.O'E'$$

Mas, as retas *D'E'* e *SO* são paralelas, os triângulos *AO'D'*, *AOS* são semelhantes, assim como os triângulos *BO'E'*, *BOS*, e por consequência:

$$SO:AO::O'D':O'A, \qquad SO:OB::\ O'E':O'B$$

Multiplicando os termos,

$$SO^2:OA.OB :: O'D'.O'E' : O'A.O'B,$$

Por fim,

$$SO^2:OA.OB :: O'M'^{2'} : OA.OB :: B^2 : A^2$$

A e B são semi-diâmetros conjugados da direção da secante ideal MN.

Os enunciados mais precisos e progressivos manifestam o desejo de Poncelet de explicitar cuidadosamente o que rege o seu método: o Princípio de projeção e o Princípio de continuidade.

Poncelet acrescenta:

> Comme il n'y a aucune autre condition à remplir, on peut conclure qu'il existe une infinité de positions du centre auxiliaire S, qui satisfont aux données de la question proposée; mais, pour cela, il faut que la droite donnée MN, sans cesser d'avoir une situation générales et indéterminée à l'égard de la courbe, soit pourtant de l'espèce de celles que nous avons nommées cordes idéales, c'est-à-dire qu'elle ne doit pas rencontrer cette courbe; autrement, en effet, le rayon SO et, par suite, la circonférence qui renferme le centre de projection deviendraient entièrement imaginaires [Poncelet, 1864, p. 436]

Se a reta MN intersecta a cônica, o ponto O passa a ser interior à cônica, e as tangentes deste ponto a cônica são impossíveis de construir tornando-se as tangentes imaginárias. Vemos claramente e em todo desenrolar do raciocínio expressado por Poncelet que os Princípios de projeção e de continuidade envolvem os objetos geométricos, pontos imaginários ao infinito.

2.3. O Traité des propriétés projectives des figures

A ideia de pontos ao infinito, retas ao infinito, pontos imaginários ao infinito e retas imaginárias ao infinito é sutil nos primeiros trabalhos de Poncelet. Se pensarmos em polaridade e plano euclidiano estendido a ideia de pontos e retas ao infinito começam a fazer sentido. E é isso que Poncelet está esboçando em seus primeiros trabalhos. Ao pensar em continuidade, ele tenta acrescentar à geometria o que a análise já apresenta: trabalhar com elementos abstratos e ao mesmo tempo, no caso da geometria, não perder a figura de "vista". Com a reciprocidade polar, fica claro o trabalho com pontos ao infinito, como por exemplo, a polar do centro de uma circunferência de círculo que é levada ao infinito.

Segundo Poncelet, dois princípios permitem estudar as propriedades projetivas das figuras. O primeiro é o princípio de projeção, que evidencia as propriedades que restam invariantes por perspectiva, quer as propriedades de incidência de retas, quer de curvas, em particular as cônicas. O segundo, aliás intimamente ligado ao primeiro, é o chamado princípio de continuidade. Este consiste em abranger de uma vez só todas as transformações que sofrem as figuras quando o ponto de perspectiva varia é o que podemos chamar de permanência das propriedades. Desta forma, para Poncelet, os elementos ao infinito, imaginários ou não, estão intimamente atrelados à ideia de continuidade.

Observamos quando Poncelet faz um estudo de um feixe de circunferências de círculos a pontos limites. Neste estudo surgem pela primeira vez no seu tratado de 1822 os pontos imaginários [PONCELET, 1822, p. 123][1].

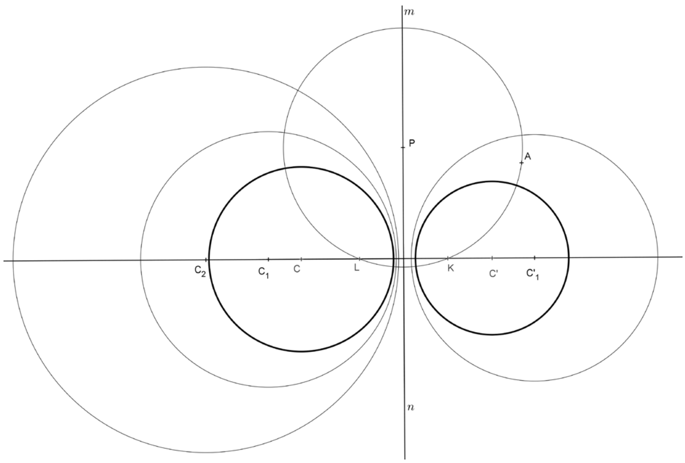

Figura 11. Sequência de circunferência de círculos, pontos limites

Poncelet considera, conforme a Fig.11, uma sequência de circunferências de círculos de centros incidentes à reta *CC'*, e simétricos em relação à reta *mn* (eixo radical). Ele considera, também, um ponto *A* do plano, não incidente à reta *mn* e a família *P* das circunferências de círculos passando por *A*, ortogonais às circunferências de círculos de centro incidente à reta *CC'*. O centro *P* das circunferências de círculos é incidente à reta *mn*, e intersectam a sequência das circunferências de círculos de centro sobre *CC'* em dois pontos *K* e *L* simétricos em relação ao eixo radical *mn*.

> Quand la droite est une sécante réellement commune aux cercles de la suite *(C), (C'…*, les points limites *K* e *L* deviennent imaginaires, et les raisonnemens qui précèdent cessent d'ètre applicables ; mais, comme la courbe existe toujours, il résulte du principe de continuité qu'elle devra ètre encore une section conique, ayant la droite *CC'* pour sécante idéale commune avec tous les cercles *(P)* [PONCELET, 1822, p. 45]

Mesmo quando os pontos *K* e *L* não aparecem no diagrama, ou seja, quando se tornam imaginários, esses pontos tem sua existência garantida pelas relações que envolvem esses pontos, como por exemplo, a igualdade de potência em relação a uma circunferência de círculo: *SA'.SB'=SK.SL*. Onde *A'* é o recíproco de *A* e *B'* é o recíproco de *B*, considerando-se, agora, uma reta qualquer no plano passando por *A* e intersectando a circunferência de círculo de centro *P* em *B*. A reta *A'B'* é paralela à reta *AB* e intersecta a reta *CC'* em *S*. Logo, *SA'.*

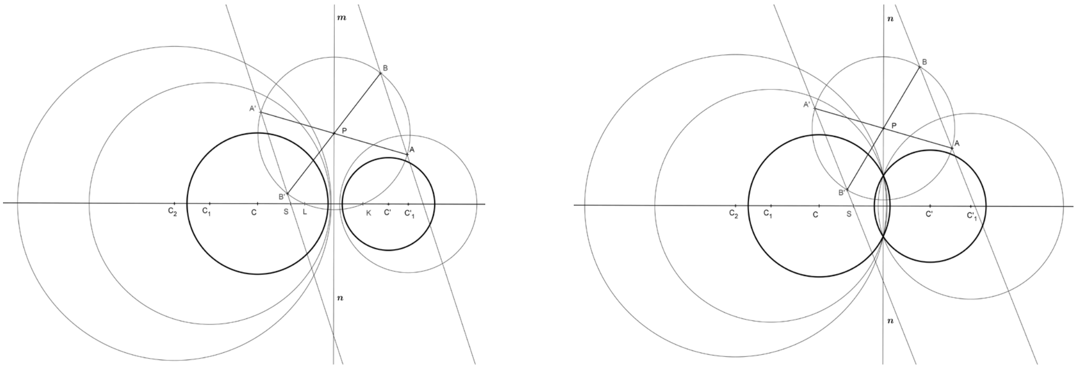

Figura 12a e 12b Existência dos pontos limites K e L

SB'=SK.SL o que garante a existência dos pontos *K* e *L* sendo a reta *CC'* real ou ideal à circunferência de círculo de centro *P*. Conforme Fig.12. Relação que indica que todos os pontos *A'* e *B'* estão sobre uma cônica, pois a curva passa também por *K* e *L*.

A razão disso é que o feixe ortogonal de um feixe de circunferências de círculos a pontos limites, de centro sobre uma reta *r*, é um feixe de círculos que se intersectam em dois pontos reais *K* e *L* da reta *r*. Reciprocamente, se considerarmos um feixe de circunferências de círculos que se intersectam em dois pontos reais *K* e *L*, o feixe ortogonal a tal feixe é um feixe a pontos limites, cujas circunferências de círculos não se intersectam, a não ser os dois pontos imaginários ao infinito pelos quais todas as circunferências de círculos do plano passam.

Quando Poncelet aborda as famílias de elipses semelhantes surge, também, a noção de ponto imaginário.

Estudando o caso de uma família de elipses semelhantes e concêntricas e de suas hipérboles suplementares.

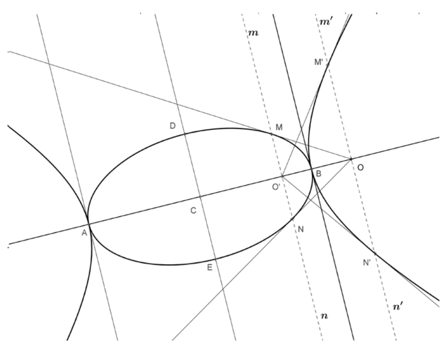

Figura 13. Elipses e suas cônicas suplementares

Poncelet utiliza a ideia de diâmetro conjugado para explicar que o ponto médio da corda *MN* (paralela ao diâmetro *DE*), ou seja, o ponto *O* é incidente ao diâmetro *AB*. Da mesma forma, o ponto *O'*, intersecção das tangentes à elipse nos pontos de contato da corda *MN*, é incidente no prolongamento do diâmetro *AB* Os pontos *A, B, O, O'* são conjugados harmônicos, o que conduz, Poncelet, a considerar a reta *m'n'* na qual incide o ponto *O'* e é paralela à reta *mn* como uma secante ideal à elipse. Os pontos *O* e *O'* são recíprocos, enquanto o ponto *O'* é a intersecção das tangentes reais à elipse, o ponto *O* é a intersecção das tangentes imaginárias à elipse. Reciprocamente, o ponto *O'* é a intersecção das tangentes imaginárias à hipérbole suplementar e o ponto *O* é a intersecção das tangentes reais à hipérbole suplementar. Poncelet prossegue sua pesquisa e mostra que quando duas cônicas são homotéticas elas têm uma secante comum ao infinito desde que suas cônicas suplementares tenham as assíntotas (no caso das hipérboles) paralelas. Logo, se as cônicas homotéticas são hipérboles, elas têm, então, dois pontos comuns ao infinito, se forem elipses elas têm dois pontos imaginários ao infinito.

> Quand deux ou un nombre quelconque d'ellipses sont semblables sur un plan, il existe une infinité de systèmes d'hyperboles supplémentaires à ces courbes, relativement à des directions données quelconque, dont les diamètres de contact sont parallèles ou concourent à l'infini; donc aussi les ellipses proposées ont une sécante idéale commune à l'infini, ou, en d'autres termes, elles ont deux points imaginaires communs à l'infini. [Poncelet, 1822, p. 47]

Poncelet insiste sobre a importância desses pontos imaginários que possibilitam, por exemplo, entender o teorema de Bézout[2] sob um ponto de vista geométrico. Assim, dois pontos de interseção de circunferências de círculos são sempre dois pontos imaginários *I* e *J* ao infinito, chamados hoje de pontos cíclicos, situados na reta ao infinito, enquanto os dois outros podem ser reais, situados em uma reta secante real. Quando duas circunferências de círculos não têm pontos reais de interseção, os pontos *I* e *J* são os únicos pontos duplos de interseção. Poncelet justifica a consideração desses pontos imaginários pelo princípio de continuidade, fazendo variar continuamente duas circunferências de círculos em um plano, elas passarão de secantes à tangentes e finalmente à disjuntas, ou seja, de pontos de intersecção reais à pontos de interseção imaginários. Daí a necessidade de se supor pontos imaginários aos infinitos. Parece mais fácil de justificar a existência matemática desses pontos por via de equação algébrica, pois duas circunferências de círculos têm equações de grau 2 e a interseção contém no máximo quatro pontos, contando a multiplicidade (Bézout). Mas, admitir esta propriedade em geometria apresenta consideráveis vantagens. Em seu *Tratado* de 1822, Poncelet reconhece este fato numa nota no final da seção I, e observa que Dupin, um dos mais célebres discípulos de Monge, em sua *Mémoire sur la description des lignes et des surfaces du second degré* já considerou esses pontos imaginários apropriando-se das ideias da análise algébrica.

> A la vérité, ce savant géométrie s'appuie sur les considérations offertes par l'Analyse algébrique pour justifier cette extension du cas imaginaire, mais il reste toujours à démontrer que l'Analyse a la singulière faculté de traiter les êtres de non existence comme les êtres absolue; et, si elle ne lui vient précisément que parce qu'on y admet le principe de continuité, il n'y aura aucune raison de ne pas ad-

> mettre, dans les recherches géométriques de même nature, le principe lui-même, d'une manière entièrement directe et sans recourir aucunement à l'Analyse algébrique [Poncelet, 1822, p.73, nota]

No *Tratado* de 1822, Poncelet se liberta completamente da análise e se recusa a qualquer justificativa dos princípios por via algébrica. No *Applications D'Analyse et de Géométrie* de 1864, publicação dos cadernos de notas que datam do período entre seu retorno da campanha da Rússia em 1814 e a edição do *Tratado* em 1822, entrega a sua posição de maneira radical:

> Les signes -1 et $\sqrt{-1}$, considérés isolément et abstraction faite de leurs attributs implicites ou explicites, ont une origine purement algébrique, conventionnelle et analogique; ils ne s'auraient dériver à priori d'aucune considération purement géométrique.[...] il est impossible d'admettre les interprétations graphiques proposées, à diverses époques, pour ces signes, notamment: que le symbole est le signe $\sqrt{-1}$ algorithmique de perpendicularité; en un mot, comme je l'ai dit, ces interprétations ne doivent être considérées que comme le résultat d'analogies trompeuses, quoique séduisantes, relatives à l'expression analytique des cordes ou doubles ordonnées imaginaires des coniques. [Poncelet, 1864, p. 592]

A estratégia usada por Poncelet é estender à geometria pura o princípio de continuidade. A ideia é considerar que as propriedades das figuras se conservam quando seus elementos mudam continuamente de posição uns em relação aos outros, ou seja, existe uma permanência das propriedades. O exemplo de potência de ponto em uma circunferência de círculo, a qual utilizamos no problema da Fig.12, é característico. Segundo Poncelet, o princípio de continuidade possibilita, não apenas estender a fórmula *SA'.SB'=SK.SL* ao conjunto dos casos onde a reta *A'B'* e *CC'* intersectam a circunferência de círculo, mas também ao caso onde uma das retas não intersectam mais a circunferência de círculo. Neste caso, a reta *CC'*, a qual incidem os pontos *K* e *L*, não mais intersecta, em pontos reais, as circunferências de círculo de centro *P*ornando os pontos *K* e *L*, pontos limites, pontos imaginários finitos.

Um outro exemplo extremamente intuitivo e ilustrativo sinaliza bem a percepção de Poncelet. Ele utiliza o princípio de continuidade para apresentar o ponto médio da corda apoiada em uma reta secante a uma circunferência de círculo, mesmo quando esta reta deixa de ser secante, tornando-se exterior à curva. A razão de sempre se obter o ponto médio por via de uma construção é que os pontos extremos da corda se tornam imaginários conjugados e seu ponto médio sempre será real. Vejamos a construção.

O ponto *M* é de fácil obtenção, mesmo quando incide à reta exterior à circunferência de círculo. A razão algébrica é que *M* é ponto médio dos imaginários conjugados. A razão geométrica é que além de ser incidente à reta exterior é, também, incidente à reta perpendicular que passa pelo centro da curva, ou seja, é o ponto de concorrência destas duas retas.

O princípio de continuidade é utilizado para assegurar a generalidade dos princípios de projeção. Na verdade, como dissemos inicialmente neste artigo, o princípio de projeção nos apresenta as propriedades invariantes por perspectiva. Já o princípio de continuidade abrange as transformações sofridas pelos objetos geométricos quando o ponto de perspectiva varia, ou seja, há uma dinâmica implícita neste pensamento, para Poncelet a variação do centro de projeção conduz o objeto a um movimento contínuo que, por sua vez, nos apresentam ora a

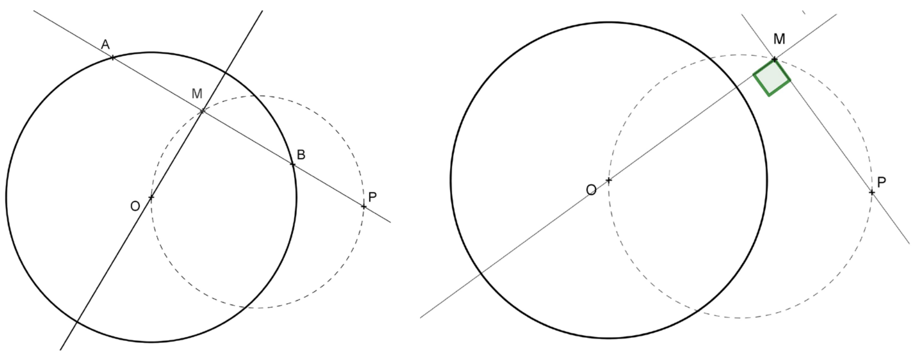

Figura 14a e 14b. Ponto é determinado mesmo na reta exterior

invariabilidade de algumas propriedades (os invariantes sob projeção), ora o "desaparecimento" de objetos geométricos. Desta forma, os dois princípios são vinculados e possibilitam à geometria projetiva sintética abordar os elementos abstratos, em particular, os pontos ao infinito imaginários ou não.

Observamos que os conceitos elaborados de Poncelet sobre pontos imaginários ao infinito surgem de uma reflexão sobre as equações de curvas algébricas, é, portanto, a análise que substancia seu pensamento, com o objetivo de dar à geometria a mesmo grau de "liberdade". Uma vez definidos, os pontos desempenham um papel essencial na prática dos princípios de projeção e de continuidade. Os objetos geométricos até imaginários não são mais definidos a partir de equações. Para Poncelet, essa prática fica como uma segunda justificativa desses conceitos.

3. Chasles

Em sua publicação *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* [Chasles, 1837], Chasles retoma algumas ideias de Poncelet admitindo que o princípio de continuidade possibilita definir o conceito de ponto imaginário, por exemplo, no caso das interseções de circunferências de círculos, degeneradas ou não. Mais tarde, em outra publicação insistirá na vantagem deste método.

> Ce que cette méthode a de plus utile ici, c'est qu'elle permet d'introduire dans la théorie du cercle la notion des points imaginaires, qui semblait exiger l'emploi de la Géométrie analytique [Chasles, 1852, p. 422].

Chasles observa que esses tais pontos não podem aparecer sobre a figura, ou seja, não são passíveis de construção.

> Si une expression donnée par le calcul, pour déterminer un point sur une droite, est imaginaire, ce point sera lui-même imaginaire; et on commettrait une faute très-grave en construisant ce point comme si son expression était réelle [Chasles,1837, p. 369, Note XXVI]

Anos depois, no prefácio à *Géométrie Supérieure*, Chasles [1852, p. XIII] discute a dificuldade que apresentam os imaginários em Geometria justamente por seu desaparecimento nas construções, constatando que tais dificuldades não existem em Análise, pois é indiferente ao tratamento algébrico. Aliás, é a Análise, segundo Chasles, que permite à Geometria pura o uso do princípio de continuidade.

Chasles no *Traité de Géométrie Supérieure* [Chasles, 1852, p. XIII] deixa claro que os imaginários estão intimamente relacionados aos reais e, portanto, servem para determiná-los. Isto nos parece interessante, pois segundo ele são os imaginários que irão "permitir" a existência dos reais.

Diferentemente do que havia proposto há 15 anos no *Aperçu historique sur l'origine,* agora em seu *Traité,* Chasles fará uma crítica ao princípio de continuidade, pois segundo ele [Chasles, 1852, p. XIV] "Ne pouvait répondre aux vues qui m'ont dirigé dans la méthode suivant laquelle je traite la Géométrie". A ideia de continuidade, para ele, não fornece uma demonstração geral e rejeita ser obrigado a aceitar como fosse um postulado; busca, então, as demonstrações de caráter geral não levando em conta as diferenças nas posições relativas dos diferentes elementos de uma figura, ou mesmo se são reais ou imaginários. Para tanto, vamos fixar a ideia utilizando a teoria da involução.

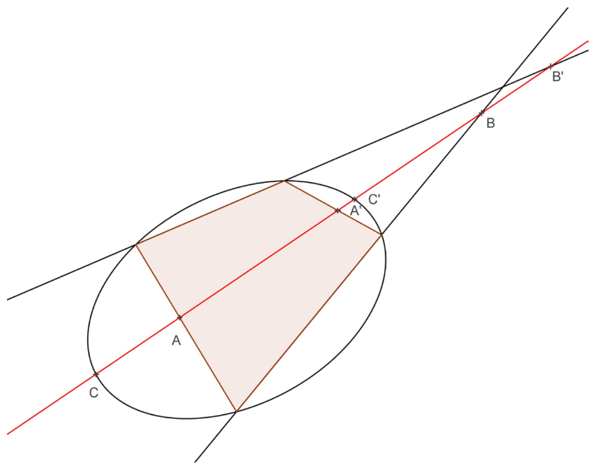

Figura 15. Teorema de Desargues

Nos quais os seis pontos *A, A', B, B',C, C'* são colineares à reta secante ao quadrilátero inscrito em uma cônica, tais que os pontos *A, A', B, B'* são as intersecções da reta com os lados do quadrilátero e os pontos *c, c'* são os pontos de intersecção incidentes à cônica. A relação entre eles,

$$\frac{AB'.BC'.CA'}{BA'.CB'.AC'} = 1$$

Nos darão as seguintes equações

$$\frac{AB.AB'}{AC.AC'}=\frac{A'B.A'B'}{A'C.A'C'} \quad , \quad \frac{BC.BC'}{BA.BA'}=\frac{B'C.B'C'}{B'A.B'A'} \quad , \quad \frac{CA.CA'}{CB.CB'}=\frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

Estas relações não consideram as direções. Portanto, para localizar um ponto, dado os outros, é necessário ter que introduzir a noção de direção. Desta forma, o teorema de involução é muito útil com a ideia de direção. Segundo Chasles,

> Cet exemple suffit pour montrer comment l'usage explicite du principe des signes est souvent indispensable pour donner aux propositions leur signification complète et toute la portée qui leur est propre, et à la science toutes ses ressources naturelles [Chasles, 1852, p. XI][20]

Chasles desenvolve a teoria da Harmonicidade, Homografias e Involução partindo de três pontos colineares e orientados. Assim, sejam *A, B, C* pontos incidentes sobre uma reta, vale a relação:

$$AB + BC + CA = 0$$

Com isso Chasles pode obter um formalismo geométrico peculiar da geometria analítica. Por exemplo, para introduzir a noção de pontos imaginários, fixa um ponto *M* sobre uma reta e diz que dois pontos *a* e *b* são determinados sobre à reta se são conhecidos o seu ponto médio e o produto de suas distâncias ao ponto fixo *M*. Suponha que α seja o ponto médio de *AB* e *V* o produto das distâncias ao ponto fixo *M* , então vale a relação:

$$V = MA.MB = M\alpha^2 - \alpha\ B^2$$

E deduzimos que *MA* e *MB* são raízes da equação, $x^2 - 2M\alpha\ x + V = 0$. De tal forma que teremos:

$$MA = M\alpha - \sqrt{(M\alpha)^2 - V} \ \text{ e } \ MB = M\alpha + \sqrt{(M\alpha)^2 - V}$$

Podemos ver na equação que, quando é menor do que *V*, os dois pontos serão imaginários. Chasles aponta que os pontos imaginários são conjugados e, mais interessante, são obtidos através de pontos reais. Por outro lado, dois pontos imaginários *A* e *B*, definidos por seu ponto médio α e o produto das suas distâncias a um ponto *M* fixo da reta podem ser conjugados harmônicos de dois pontos reais *E* e *F*, ou seja, quatro pontos estão em relação harmônica quando sua relação anharmônica é igual a:

$$\frac{AE}{AF}:\frac{BE}{BF} = -1$$

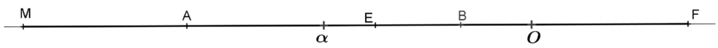

Figura 16. Relação harmônica dos pontos A, E, B, F

Considerando-se . A expressão do conjugado harmônico em relação ao ponto fixo M pode ser escrita como:

$$\frac{ME - MA}{MF - MA} = \frac{ME - MB}{MF - MB}$$

Ou ainda,

$$(MA + MB)(ME + MF) = 2MA.MB + 2ME.MF$$

Sejam O e α os pontos médios dos segmentos EF e AB respectivamente, podemos reescrever a equação acima como:

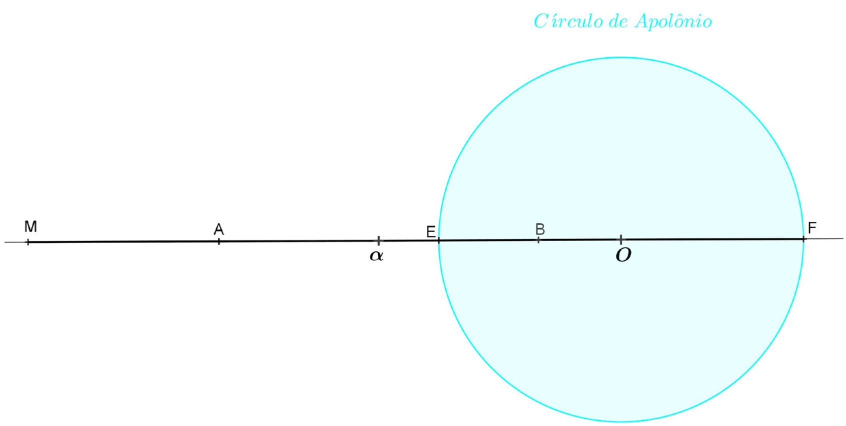

Figura 17. Círculo de Apolônio

A relação harmônica entre os pontos extremos dos segmentos EF e AB cujos pontos médios respectivos são α e O apresentam o círculo de Apolônio, cujo diâmetro, neste caso, é EF como o círculo de inversão, cujos os extremos do segmento AB são inversos um do outro. Reciprocamente, se o diâmetro considerado fosse AB o ponto E seria o inverso de F (são pontos conjugados). Esta ideia se estende à feixe de retas. Assim, se um feixe de retas passa por quatro pontos de uma relação anharmônica, o feixe também está em relação anharmônica, tal que:

$$\frac{AE}{AF}:\frac{BE}{BF}=\frac{Sen(a,e)}{Sen(a,f)}:\frac{Sen(b,e)}{Sen(b,f)}$$

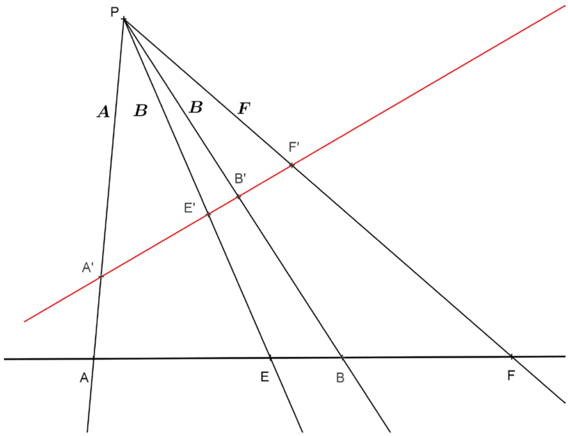

Figura 18. Feixe de retas

E, quando este feixe de retas é cortado por uma transversal, a relação anharmônica dos quatros pontos de intersecção é igual, numericamente e com o mesmo sinal. Desta forma, é razoável pensar que esta relação é projetiva, pois é invariante sobre projeção.

Assim, Chasles propicia à Geometria pura a noção dos imaginários, utilizando a Geometria analítica que necessita do princípio dos sinais, ou seja, faz uso da orientação, seja da reta, sejam dos ângulos. A teoria desenvolvida em seu trabalho constitui uma busca em resolver o problema de interpretação dos imaginários em geometria. Chasles constrói os elementos imaginários a partir dos elementos reais e vice-versa.

O método de Chasles é um misto de considerações sintéticas junto às considerações algébricas. Os dois pontos imaginários podem estar a uma distância finita ou infinita, porém, mesmo sendo ao infinito, os pontos recebem um tratamento algébrico, pois o produto de suas distâncias a um ponto fixo e seu ponto médio é real. Chasles, para justificar o uso de um ou outro método, admite que todos os recursos podem ser úteis.

Ao perceber que basta o ponto médio de um segmento e o produto dos extremos deste segmento a um ponto fixo de uma mesma reta para se estar diante de um sistema de grau dois e, portanto, suas raízes poderão ser reais ou imaginárias.

> Pour définir cette méthode, nous dirons qu'elle consiste à considérer la figure, sur laquelle on a à la démontrer quelque propriété générale, dans des circonstances de construction générale, où la présence de certains points, de certains plans ou de certaines lignes, qui dans d'autres circonstances seraient imaginaires, facilite la démonstration. Ensuite, on applique le théorème qu'on a ainsi démontré ou cas de la figure où ces points, ces plans et ces droites seraient imaginaires. C'est-à-dire,

> qu'on le regarde comme vrai dans toutes circonstances de construction générales que peut présenter la figure à laquelle il se rapporte [Chasles, 1837, p. 198]

Chasles utilizando-se do que ele denomina *Principe des relations contingentes* (denomina assim o Princípio de continuidade, ou seja, a permanência das propriedades), apresenta o foco imaginário de uma cônica, observando que a tangente e a normal em um ponto de uma cônica encontra cada eixo da cônica em dois pontos que são conjugados harmônicos em relação a dois pontos fixos. Sobre um eixo os pontos fixos são os focos reais, sobre o outro eixo esses pontos fixos são imaginários. Assim, uma cônica tem quatro focos, dois reais e dois imaginários, ou seja, Chasles utiliza a ideia de uma aplicação geral no caso de elementos imaginários e isto vai influenciar diretamente o nosso próximo personagem: Edmond Laguerre, ex-aluno de Chasles na École Polytechnique.

4. Laguerre

No início dos anos 1850 Laguerre publica três pequenos artigos no *Nouvelles Annales de mathématiques*[22], onde os pontos imaginários ao infinito desempenham um papel essencial:

- Em 1852 publica *Note sur la théorie des foyers* onde apresenta duas retas imaginárias com o ponto comum real sendo o foco de uma cônica.
- Em 1853 *Note sur la théorie des foyers* e *Note sur les foyers* no primeiro artigo, deste ano, ele vai detalhar o assunto publicado no ano anterior. No segundo artigo generaliza uma propriedade analítica que foi apresentada por Plucker.

No artigo de 1852, Laguerre considere uma equação de uma cônica de foco (α, β) sob a forma seguinte $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = X^2$, onde X é uma função linear de x e y e transforma esta equação em

$$[(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)][(x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)] = X^2.$$

Constata então que as duas retas imaginárias de equação e

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)=0 \text{ e } (x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)=0\ ,$$

são tangentes à cônica. *E*, vai além, afirmando que vale a recíproca, ou seja, se uma cônica é tangente a estas duas retas, ela tem por foco o ponto (α, β). Assim, podemos determinar os quatro focos da cônica a partir da própria equação.

Os quatros focos: $\begin{cases} (\alpha,\beta) \\ (\alpha,-\beta) \\ (\alpha+i\beta,0) \\ (-(\alpha-i\beta),0) \end{cases}$

A interpretação geométrica, em um plano cartesiano, poderia ser apresentada da seguinte forma:

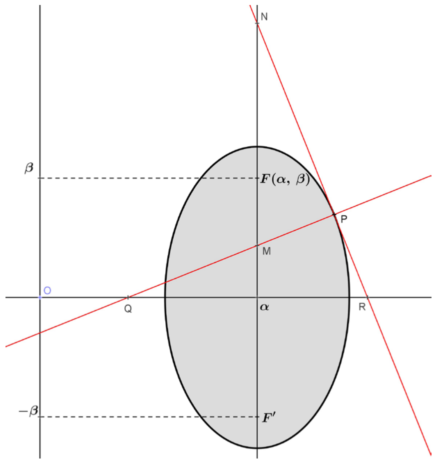

Figura 19. Os quatros focos da cônica

Os focos reais são distribuídos, no eixo maior, harmonicamente com os pontos *M* e *N* intersecção da normal e da tangente, respectivamente, à cônica no ponto *P*. Da mesma forma os focos imaginários são distribuídos, no eixo menor, harmonicamente com os pontos *Q* e *R*, intersecção da normal e da tangente, respectivamente, à cônica no ponto *P*.

Seria interessante fazer aqui uma inserção de um trecho de Chasles, onde ele relaciona dois pontos reais conjugados harmônicos de dois pontos imaginários tal qual o exemplo da Fig.19 no eixo menor. Não é coincidência, Laguerre foi aluno de Chasles na *École Polytechnique*.

> Ainsi l'on peut concevoir deux points imaginaires, conjugués harmoniques par rapport à deux points réels; cela veut dire que les deux points réels ont avec les éléments qui représentent le système des deux points imaginaires les relations qui expriment d'une manière générale le rapport harmonique de quatre points réels, conjugués deux à deux [Chasles, 1852, p. 58].

O raciocínio supracitado, sobre as retas imaginárias tangentes à cônica, conduz Laguerre a ideia de que as cônicas confocais devem ser consideradas como tangentes às mesmas duas retas e às cônicas bi-confocais inscritas no mesmo quadrilátero, cujos quatros vértices são os quatros focos comuns. Estas propriedades projetivas dos focos permitirão a Laguerre generalizar as propriedades métricas.

Consideremos, por exemplo, três cônicas bi-confocais, Fig.20. Se por um ponto exterior traçarmos suas tangentes, estes três pares de tangentes terão uma bissetriz comum. Assim, elas formarão um feixe em *involução*. Generalizando, obtém-se o teorema de Desargues.

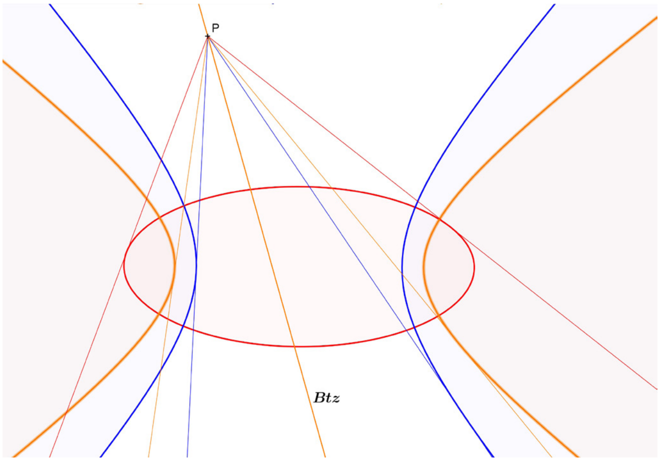

Figura 20. Bissetriz comum às tangentes das cônicas bi-confocais em involução.

Apoiando dois triângulos em três tangentes no mesmo semiplano com relação a bissetriz, podemos confirmar o teorema de Desargues, onde o ponto *P* é o centro de homologia (projeção) de convergência das retas *AA', BB', CC'*. Os pontos *Q, L e R* são incidentes sobre o eixo de homologia (reta *m*). Pode-se observar, também, que as cônicas bi-confocais são sempre ortogonais entre si.

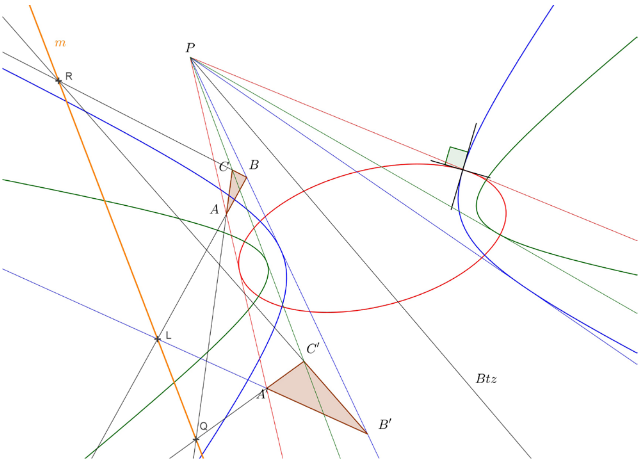

Figura 21. Os triângulos ABC e A'B'C'são em perspectiva (Desargues)

A consideração dos focos imaginários pode ser frequentemente útil. Por exemplo, do ponto de intersecção de duas tangentes se traçarmos retas aos quatro focos (F_1, F_2, F'_1, F'_2)

teremos três pares de retas (PF_1, PF_2, PF'_1,PF'_2) que terão uma bissetriz comum e formarão um feixe em involução, Fig. 22. Podemos observar que a ideia da utilização dos focos imaginários generaliza o teorema de Poncelet.

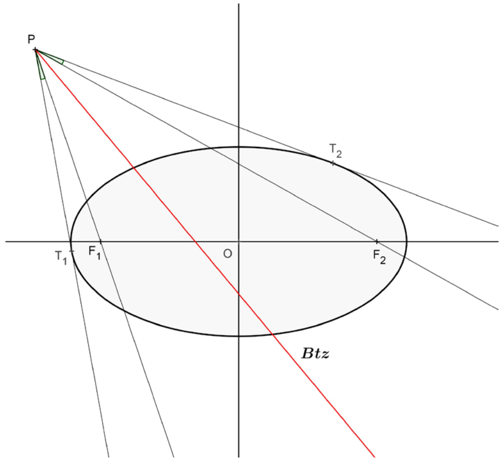

Figura 22. Teorema de Poncelet

O que é interessante notar é que o fato de as equações envolverem grandezas imaginárias isso parece não incomodar Laguerre, aliás, parece ser uma prática clássica já nesta época. E como Laguerre sempre utiliza os métodos analíticos combinados com considerações projetivas, é natural que trate dos imaginários sem nenhum incômodo.

No primeiro artigo de 1853, Laguerre retoma os resultados do artigo anterior sendo mais preciso com algumas propriedades. Depois, ele considera de novo as duas retas imaginárias de equação

utilizada no estudo dos focos das cônicas.

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)=0 \text{ e } (x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)=0.$$

E apresenta a seguinte ideia:

> Si un angle constant tourne autour du point *(α, β)*, ses côtés et les droites représentées par les équations
>
> $(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)=0,$
>
> $(x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)=0,$
>
> forment dans chaque position de l'angle mobile un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. Si l'angle mobile est droit, le faisceau est harmonique (Laguerre, 1853a, p. 60).

Assim, para Laguerre, a todo ângulo corresponde uma razão anharmônica determinada. Mas haveria dois obstáculos para interpretar esta correspondência como a medida do ângulo. O primeiro seria determinar a razão anharmônica de uma maneira projetiva, ou seja, independentemente da noção de métrica. O segundo obstáculo seria encontrar a relação entre a medida do ângulo na geometria euclidiana e esta razão anharmônica.

Esta relação não é longe de ser definida no seguinte problema:

> Un système d'angles *A, B, C, etc.*, situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque *F (A, B, C, ...) = 0*, trouver la relation qui lie les angles correspondants *A', B', C', etc*, quand on transforme la figure omographiquement. [Laguerre, 1853a, p. 64].

Laguerre considera uma homografia que envia os ângulos *A, B, C, etc*, aos ângulos *A', B', C', etc.* Sejam os pontos imaginários ao infinito definidos por Laguerre como sendo os pontos situados na reta do infinito e sobre as retas de equação e . Ele define *P* e *Q* como as imagens pela homografia desses pontos ao infinito, e denota por a razão anharmônica do feixe definido pelos lados do ângulo *A'*, e as retas, *A'P*, e *A'Q*, assim como por *b, c, d, etc.* as razões respectivas dos ângulos *B', C', D', etc.* Então a relação procurada será

$$F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}},\ \frac{\log b}{2\sqrt{-1}},\ \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}, \dots\right) = 0.$$

Entre outras palavras, o que Laguerre está expondo é que dado duas retas *d* e *d'*com um ponto comum *O* e sendo *P* e *Q* pontos imaginários, o ângulo entre as retas *d* e *d'*tem por valor o quociente do logaritmo da dupla razão dessas duas retas com as retas *OP* e *OQ* por *2i.*

No entanto, Laguerre não explica que a expressão

$$\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}$$

pode servir de medida do ângulo *A*, pois *a* é também a razão anharmônica do feixe definido pelos lados do ângulo *A, AP e AQ* onde *P* e *Q* são os pontos imaginários ao infinito.

Esta definição de Laguerre [1853] é intimamente ligada a noção de absoluto definida alguns anos mais tarde por Cayley [1859], independentemente de conhecer as ideias de Laguerre. Cayley baseia sua métrica projetiva como uma equação geral de uma superfície de grau 2 em termos de coordenadas homogêneas, não usando a ideia de razão dupla. Felix Klein, em seu Programa Erlangen em 1872, aproveita a ideia de Cayley e reformula a expressão que passa a definir como cônica fundamental. E isto será a pedra fundamental da unificação de todas as geometrias a partir da geometria projetiva por grupos de transformações. Entretanto a expressão de Laguerre, introduzida vinte anos antes, é tão próxima de uma definição projetiva da medida do ângulo, que Klein terá o cuidado de ressaltar que não conhecia, no início de seus trabalhos sobre este assunto, os artigos de Laguerre, quando apresentou a definição das diferentes métricas a partir do logaritmo da razão anharmônica.

No seu segundo artigo de 1853, Laguerre escreve juntamente com Sacchi sobre a determinação dos focos de uma cônica em um caso mais geral. Eles explicam:

> Si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point à une conique rapportée à des axes se coupant sous l'angle γ, est égal à a cos γ ± sen γ , ce point est un foyer. [Laguerre e Sacchi, 1853, p. 225][26]

Aqui, se pensarmos em um caso particular onde o ângulo *γ* é de obteríamos os focos como sendo ±*i* o que esclarece perfeitamente a ideia que perpassa no raciocínio de Laguerre quanto aos objetos imaginários. O desenvolvimento que faz Laguerre e, posteriormente, com o que faz Cayley é que possibilitará a Klein estabelecer uma métrica na geometria projetiva e a classificação de todas as geometrias por grupos de transformações.

5. Plucker

Para que o leitor tenha um ponto de vista comparativo vamos abordar os pontos cíclicos, que Poncelet apresentou de forma sintética, usando as ideias analíticas de Plucker. A nossa proposta foi de apresentar este artigo sob uma ótica sintética abordando três matemáticos franceses, entretanto, julgamos ser interessante apresentar um pequeno resumo analítico do matemático alemão, Julius Plucker.

Plucker dá uma nova abordagem à Geometria de Descartes, acrescentando ao plano euclidiano os pontos ao infinito que será denotado por plano projetivo. E além disso, acrescenta coordenadas complexas, passando a ter o plano projetivo complexo. Assim, todas as retas deste plano são classes de retas complexas passando pela origem, podemos imaginar, dado o plano projetivo complexo *(x,y,1)* com *x* e *y* pertencentes aos complexos, que todas as retas terão um representante neste plano, sendo as classes de retas que contêm os pontos *(x,y,0)* os pontos ao infinito. Como os pontos deste plano são retas do espaço complexo passando pela origem, as figuras deste plano correspondem às superfícies cônicas no espaço complexo. A figura 1 deste artigo dá uma ideia ao leitor de uma superfície cônica, se intersectarmos com o plano projetivo complexo *Z=1* teremos uma figura cônica no plano projetivo complexo. Observe o leitor que a passagem do espaço complexo ao plano complexo decresce de uma dimensão e, portanto, é razoável pensar que as curvas no plano projetivo complexo são decorrentes de superfícies cônicas com vértices na origem. Assim, uma reta no plano projetivo corresponde a um plano no espaço que passa pela origem.

Munido desta ideia vamos apresentar os pontos cíclicos de forma analítica. Uma circunferência de círculo no plano complexo se escreve como:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

E no plano projetivo complexo podemos escrever:

$$(X/Z - a)^2 + (Y/Z - b)^2 = r^2$$

Reescrevendo esta equação,

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = Z^2\, r^2$$

Como buscamos os pontos cíclicos, ou seja, os pontos ao infinito pelos quais todas as circunferências de círculos, no plano projetivo, passam, devemos fazer $Z=1$ na equação precedente. Teremos então, $X^2 + Y^2 = 0$. Fatorando esta equação vamos determinar duas retas complexas Que nos conduzem ao sistema

$$\begin{cases} Y=iX \\ Y=-iX \end{cases}$$

São as retas isotrópicas as quais se refere Laguerre. Deste sistema obtemos os pontos $I = (1, i, 0)$ e $J = (1, -i, 0)$ que são os pontos de intersecção de todas as circunferências de círculos as quais se refere Poncelet:

> Des cercles placés arbitrairement sur un plan ne sont donc pas tout à fait indépendans entre eux, comme on pourrait le croire au premier abord; ils ont idéalement deux points imaginaires communs à l'infini, et, sous ce rapport, ils doivent jouir de certaines propriétés appartenantes à la fois à tout leur système, et analogues à celles dont ils jouissent quand ils ont une sécante commune ordinaire: ainsi, par exemple, les tangentes issues d'un point quelconque de la sécante commune à l'infini sont égales entre elles, et les cordes de contact ou polaires correspondantes sont parallèles, ou concourent réciproquement en un autre point de la sécante dont il s'agit [Poncelet, 1822, p. 49].

Ou seja, como Poncelet afirma pelo Princípio de Projeção todas as cônicas podem ser transformadas em uma circunferência de círculo, se imaginarmos duas elipses, por exemplo, intersectando-se em quatro pontos e, pelo princípio de projeção, transformá-las em duas circunferências secantes, poderemos identificar seus quatro pontos de intersecção, dois reais e os outros dois imaginários complexos que são os pontos cíclicos.

É brilhante ver que Poncelet intuiu sobre os pontos cíclicos sem ter ferramentas matemáticas que pudessem tratar os pontos imaginários ao infinito tais como as coordenadas homogêneas.

6. Considerações finais

Vemos através de Poncelet, Chasles e Laguerre que a noção de ponto imaginário ao infinito, na França, sofre, no período considerado, algumas transformações. A introdução de considerações algébricas não impede Chasles de permanecer, no início de seus trabalhos, na perspectiva de Poncelet que consiste em uma geometria autônoma libertada da álgebra e da análise. Mas o que podemos observar nos artigos do jovem Laguerre, discípulo direto de Chasles, é a convicção que considerações analíticas não prejudicam a geometria, muito pelo contrário, elas conduzem à novos resultados e esclarecem as propriedades e os conceitos, em particular a noção de pontos imaginários ao infinito. Este período da primeira metade do século XIX na França mostra também o quanto os geômetras franceses não foram receptivos num primeiro momento aos trabalhos de Plücker, que introduziu a partir dos anos 1830, as coordenadas homogêneas, que é, talvez, a ferramenta mais potente para descrever a natureza geométrica dos pontos imaginários ao infinito. Com Laguerre, no entanto, se abre um novo período na França, a partir dos anos 1850. Klein, vinte anos depois, baseado em uma ideia análoga a que Laguerre apresentou sobre a métrica no ambiente projetivo, irá sugerir em seu programa uma classificação das geometrias por grupos de transformações.

Notas

1. *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, p. 123, citado também por Friedelmeyer, 2010, p. 70.
2. Deux courbes algébriques projectives planes α e β de degrés m et n, définies sur un corps algébriquement clos k et sans composante irréductible commune, ont exactement mn points d'intersections, comptés avec leur multiplicité [Bézout, 1799].
3. *Nouvelles Annales de Mathématiques: Journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation*. Editor, Terquem. 1842-1927.

Referências

Bézout, E. (1779) *Théorie générale des équations algébriques.* París, D. Pierres.

Carnot, L. N. M. (1801). *De la corrélation des figures de géométrie*. Paris, Duprat.

Cayley, A. (1859) "A sixth Memoir upon Quantics". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *149*, 61-90.

Chasles, M. (1852) *Traité de géométrie supérieure*. Paris, Mallet-Bachelier.

Chasles, M. (1837) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles, Imprimeur de l'Académie Royale.

Friedelmeyer, J-P (2011) "L'impulsion originelle de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective", En: *Él*éments d'une biographie de l'Espace Projectif, Lise Bioesmat-Martignon ed. "Presses Universitaires de Nancy", pp. 55-158.

Klein, F. (1871) "Uber die sogenannte nichteuklidische Geometrie". *Mathematische Annalen*, *4*. 573-625.

Laguerre, E.N. (1852) "Note sur la théorie des foyers". *Nouvelles annales de mathématiques. 11*, 290-292

Laguerre, E.N. (1853a) "Note sur la théorie des foyers". *Nouvelles annales de mathématiques*, *12*, 57-66

Laguerre, E., Sacchi, J. (1853b) "Note sur les foyers". *Nouvelles annales de mathématiques*, *12*, 225-226

Lorenat, J. (2015) *Die Freude an der Gestalt: méthodes, figures et pratiques de la géométrie au début du dix-neuvième siècle* (Doctoral dissertation, Paris 6).

Nabonnand, P. (2016) "Utiliser des éléments imaginaires en géométrie: Carnot, Poncelet, von Staudt et Chasles". En: *Éléments d'un Biographie de l'Espace Géométrique*. Nancy, PUN-Editions Université de Lorraine. p. 69-106

Poncelet, J-V. (1820) *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*. Présenté à *Académie des Sciences de Paris.*

Poncelet, J-V. (1822) *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris, Bachelier.

Poncelet, J-V. (1862) *Applications d'Analyse et Géométrie*, Tome première. Paris, Mallet-Bachelier.

Poncelet, J-V. (1864) *Applications d'Analyse et Géométrie*, Tome deuxième. Paris, Gauthier-Villars.