

LAS MATEMÁTICAS EN EL RENACIMIENTO

ALFREDO VERA BOTÍ

Resumen:

En el siglo XV la Geometría había alcanzado un desarrollo superior a la Aritmética, en parte debido al predominio que durante el medioevo tuvo el empleo de los números romanos (en los que faltaba el cero y las reglas no eran estándar), sobre los guarismos árabes, es decir, de los puros números indicativos de cantidad, frente a los números de base decimal con valor posicional.

Se publicaron los primeros tratados de Aritmética, surgiendo un lenguaje propio no abstracto con la introducción de simbolismos, sin embargo, la inexistencia de un sistema básico no favoreció la aparición de los números decimales, perviviendo los fraccionarios, como lo prueba que la introducción de algoritmos de cálculo, condujo a resultados expresados con números de parte entera seguida de fracción.

A partir de ahí no hubo obstáculo para la evolución de las aplicaciones prácticas.

Palabras clave:

Renacimiento, Matemáticas, Aritmética, Algoritmos, Aplicaciones.

Résumé:

Au XVe siècle, la Géométrie a connu un développement supérieur à l'Arithmétique, en raison de la prédominance de l'utilisation des chiffres romains (en laquelle le zéro manquait et les règles n'étaient pas standard), par rapport aux chiffres arabes. , c'est-à-dire, des nombres purs indicatifs de quantité, par opposition aux nombres de base décimaux avec valeur posicional.

Les premiers traités sur l'Arithmétique ont été publiés, émergeant d'un langage non abstrait qui lui est propre avec l'introduction du symbolisme, cependant, l'absence d'un système de base non favorise pas l'apparition de nombres décimaux, pervertissant ceux fractionnaires qui, comme preuve de calcul, ont conduit a résultats exprimés avec des numéros de pièce entiers suivis d'une fraction.

De là, il n'y a plus d'obstacles à l'évolution des applications pratiques.

Mots-clés:

Renaissance, Mathématiques, Arithmétique, Algorithmes, Applications.

Las Matemáticas en la Europa medieval, a la entrada del Renacimiento, se reducía básicamente al texto fundamental de los *Elementos* de Euclides¹, más algunas recuperaciones de varios libros griegos, como las *Cónicas de Apolonio*², y aportaciones que la cultura árabe había hecho y recopilado, aunque sin lograr una difusión muy generalizada.

Al comenzar el siglo XV la Geometría³ alcanzaba ya un gran desarrollo, mucho más importante que el de la Aritmética⁴; esta última venía regulada por una serie de algoritmos o reglas con las que era posible obtener el resultado a varios tipos de problemas de carácter práctico.

Floencia y Urbino fueron los centros *quattrocentescos* de los que partió el resurgimiento y estudio de las matemáticas a partir de los códices antiguos⁵, y mientras en la corte de Lorenzo el Magnífico es preciso destacar la figura de Toscanelli y

¹ Uno de aquellos viejos manuscritos de Euclides, transcrito a finales del siglo XIII, y que había sido comentado por Campano de Novara (*Elementorum Libri*, ms. lat. VIII,39 de la Biblioteca Marciana de Venecia), llegó a pertenecer a Alberti, dato que hoy sabemos por los dibujos y anotaciones que puso en los márgenes

² Cf. Heatt, T.: *Apollonis of Perga. Treatise on conic sections*, Cambridge 1896.

³ La Geometría había sido la ciencia fundamental de los griegos, hasta el punto que en el lema de la Academia de Platón se decía *Que nadie entre aquí que no sea geómetra*. En el helenismo alcanzó especial apogeo con Euclides y con Apolonio de Perge, siendo este último el que le dió un decisivo impulso a la teoría de las cónicas. La Geometría recibió nuevas fuerzas con la cultura árabe, y especialmente con Al-Khayyam y con Nasir al-Tusi.

⁴ El interés histórico por la Aritmética estuvo ligado a su función práctica. Se cree que el invento de los algoritmos arranca de época mesopotámica, aunque su máximo desarrollo estuvo en la cultura árabe, con personajes como Al-Khawarizmi, cuya *Aritmética* fue traducida y seguida varias veces, a partir del siglo XII, por ejemplo, por Juan de Sevilla en *Alghoarismi de arismetica*, por Sacrabosco en *Algorismus*, o por Alejandro de Villedieu en el *Carmen de algorismo*, escrito en verso. El más importante de todos fue Leonardo de Pisa, llamado el Fibonacci, que en su *Liber abbaci*, escrito en latín a comienzos del siglo XIII, incorporó, no sólo los conocimientos de Al-Khawarizmi, sino también la numeración árabe, varios problemas algébricos y geométricos y la aritmética operativa. Otros textos suyos importantes fueron el *Libro de los cuadrados* y la *Flos Leonardi*, en donde resolvió varios problemas. Escribió también una *Practica geométrica*, pero por lo que hoy se le conoce, es por la sucesión de números que lleva su nombre, en la que cada término se obtiene por suma de los dos anteriores: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

⁵ Cf. Lawrence Rose: «*The italian Renaissance of Mathematics*», en *Studien on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Ginebra 1976. Uzielli, G.: *La vita e i tempi di Paolo dell Pozzo Toscanelli*, Roma 1894; Castelli, P.: «Il motto aristotelico e la 'licita scientia'. Guglielmo Ebreo e la speculazione sulla danza nel XV secolo», en AA.VV: *Mesura et Arte del Danzare* (cat), Pésaro 1987.

la influencia de Reggiomontano, en Urbino fue el propio *condottiero* Federico de Urbino el que sobresalía como matemático y geómetra, al menos, a la vista de sus biógrafos contemporáneos. Sin embargo, las principales aportaciones se venían haciendo en torno a problemas prácticos y especulativos.

En el 1463 maese Benedetto da Firenze escribió su *Trattato di praticcha d'arismetrica* en el que se resuelven 36 formulaciones retóricas⁶, a las que hoy puede dárseles una transposición algébrica, como la dada por P. Benoit⁷ en 1989.

Fue a finales del siglo XV cuando Luca Pacioli (1445-1514) publicó su *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità* (Venecia, 1494) y poco después *De Divina Proportione* (Venecia 1509). Sólo estas dos obras fueron dadas a la imprenta, pues el de *Viribus quantitatibus* y el *De Ludis in genere* (perdido) quedaron inéditos.

La *Summa* es recopilación de los conocimientos anteriores a los que tuvo acceso el fraile franciscano, y en la que siguió de cerca al *Liber Abaci* de Leonardo da Pisa (Fibonacci), escrito en año 1202, y al *Algebra* de al-Jwarizmi, traducida al latín en 1464. Su fama se debe a la parte dedicada a la aritmética comercial y sobre todo, a que en la *Divina Proportione*, publicada en 1509, incluyó dibujos hechos por Leonardo da Vinci sobre los cinco poliedros platónicos⁸ y otros semirregulares y estrellados.

⁶ Se indica como lenguaje retórico en matemáticas a aquel que no se expresa mediante una formulación sintética del tipo, por ejemplo: $x^3+2x^2=6x$, sino cuando, se describe textualmente con un lenguaje más o menos sincopado: *qubo et zenzo doppio sono sei cose*, ya que *qubo*, *Q*, equivalía a cubo de la incógnita, *zenzo*, *Z*, a cuadrado de ésta y *cosa*, *C*, a la propia incógnita, como aparece, por ejemplo, en uno de los textos anónimos de la segunda mitad del siglo XV, titulado *De radice de' numeri e metodo di trovarla*; es preciso señalar que estos simbolismos eran particulares de cada autor. A veces, como ocurre en este tratado cuando se habla de otras potencias, como x^7 , se simboliza así: CZQ. Muchos años más tarde (1539) aun encontramos expresiones retóricas tan extrañas para nosotros, como, por ejemplo una de las más sencillas que aparece en el tratado de Cardano: *un qubo p: 6 cose uguagliano venti*, que ahora expresariamos así: $x^3+6x=20$. Bombelli, con otro ejemplo, nos ilustra de la variedad de notaciones que se aplicaban en el Renacimiento para expresar una misma idea algébrica:

$$\bigcup_p^6 \bigcup^3 \text{igualan } 20$$

1 8

que hoy expresariamos así: $x^6+8x^3=20$.

De estos sencillos ejemplos es fácil de colegir la dificultad que implicaba el operar con exponentes o el llegar a simplificaciones que hoy nos parecen evidentes.

⁷ Cf. Benoit: «Cálculo, álgebra y mercancía», en Serres, M.: *Historia de las ciencias*, Madrid 1989, pág. 243.

⁸ En el siglo XVIII se demostró que sólo era posible construir cinco poliedros regulares. El procedimiento se basa en la resolución, para valores enteros de las variables, del sistema de ecuaciones que relacionan en número de caras (c), el de vértice (v), aristas (a), el número de lados de cada cara (n) y el número de aristas que salen de un mismo vértice (m), y que vienen expresadas por: $c+v=a+2$, $nc=mv$, $nc=2a$, de las que se obtienen las cinco soluciones siguientes:

Pero el álgebra no era aún una ciencia sincopada, aunque Pacioli ya introdujo algunas abreviaturas:

p = más

m = menos

co = cosa, o sea, la incógnita⁹

ce = censo, es decir, el cuadrado de la incógnita

ae = aequalis, igual.

Y como el uso de los exponentes no se había introducido, Pacioli expresaba la potencia cuarta de la incógnita como $cece$ ¹⁰.

Algunos tratados, como la *Novel opera de arithmetica* de Piero Borghi, alcanzaron un extraordinario éxito con varias ediciones sucesivas, pero es justo señalar que ese afán por la Aritmética práctica también tuvo interés en otros países europeos: Francés Pellos en Niza, Francesc Sant Climent en Cataluña, Nicolás Chuquet y Jehan Certain en Francia¹¹, etc..

A comienzos del Renacimiento aún no se había configurado el pensamiento abstracto propio de las Matemáticas, ni el Algebra¹² se había conformado como una disciplina autónoma, a pesar de los progresos que indudablemente había adquirido el *Quadrivium*¹³ en la Edad Media. Aun no existía el concepto de *incógnita* ni la dis-

POLIEDRO	c	v	a	m	n
Tetraedro	4	4	6	3	3
Exaedro	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

⁹ La palabra *cosa* para indicar la incógnita era de origen germano (*Die Cos*) y se impuso en toda Europa, y hasta tal punto se hizo popular que al Algebra se le llamó *Arte cosico*.

¹⁰ Observemos la complejidad de este tipo de notación con un ejemplo: lo que para nosotros es $2x^2 + x^4 = 24$, con esta notación se escribía: *codupla p. cece ae 24*, lo que evidencia la imposibilidad de operar.

¹¹ Pellos publicó su *Compendion de l'Abaco* en el 1497, estando escrita en el dialacto nizardo; la *Aritmética* de Sant Climent, en catalán, es del 1482; el *Triparty en la science des nombres* de Chuquet se publicó en 1484 (Cf. Ibid, en 'Bulletin bibliografico di storia mathematica', XIII, 1880); *Le Kadran aux marchand* de Certain es del 1485. De todos éstos fue Nicolás Chuquet el más brillante de todos pues dió un importante desarrollo a las leyes de cálculo con exponentes, aunque su influencia posterior no fuera inmediata (Etienne de la Roche, al menos, la conoció, pues la copió en 1583).

¹² El Algebra nació de la Aritmética operacional cuando se fueron planteando algunos de sus problemas al revés, es decir, intentando buscar los valores que cumplían determinadas condiciones. Los árabes habían conocido los escritos de Diofanto, lo que les permitió formular algunas propuestas algebráicas.

¹³ Las siete Artes Liberales, desde los romanos y tras la codificación hecha en el siglo VI por Casiodoro se mantuvieron inalteradas. El *Trivium*, o conjunto de artes relacionadas con la elocuencia (Gramática, Retórica y Dialéctica), se diferenciaba claramente de *Quatrivium*, que comprendía las cuatro artes razonantes Aritmática, Geometría, Astronomía y Música).

tinción entre *parámetro* y *variable*, ni tampoco se aplicaba un lenguaje sintético abreviado con el que poder traducir en forma sinóptica y precisa ideas o conceptos que generalizaran las estructuras comunes de problemas; muy al contrario, las resoluciones aparecen planteadas siempre a través de ejemplos concretos.

Las primeras aproximaciones, que llevarían al inicio del Álgebra, consistieron en formular simbolismos con los que expresar realidades dimensionales desconocidas. En esos intentos tenemos que recordar a Niccolò Tartaglia¹⁴, Gerolamo Cardano¹⁵, a Raffaello Bombelli¹⁶ y a Nicolás Chuquet¹⁷. Pero fue François Viète¹⁸ el que a finales del siglo XVI conformó las bases iniciales en que se apoyó el desarrollo posterior. Viète partió de los simbolismos de Diofanto, empezando a designar las incógnitas con letras. Así era como aparecía el lenguaje sintético que tanto éxito tendría a partir de la centuria siguiente.

Otro dato que hay que significar es la ausencia del concepto de número negativo y la dificultad operacional que planteaban los números romanos¹⁹ y la ausencia de un sistema básico de numeración común para todas las unidades y sus divisores que intervenían en las cuatro reglas aritméticas. La complejidad de la numeración romana (aunque muy relegada, aún se seguía utilizando) había llevado a la inexcusable necesidad de emplear ábacos para realizar sumas y restas, mientras que las multiplicaciones y, sobre todo, las divisiones eran casi impracticables²⁰ por la gran

¹⁴ Tartaglia (1496-1557) escribió en latín sus tratados matemáticos: la *Practica arithmetice* y el *Ars Magna*.

¹⁵ Gerolamo Cardano (1501-76) escribió en el 1539 su *Practica arithmeticae*. Criticó en el capítulo *De erroribus F. Lucae quos vel transferendo non diligenter examinavit, vel describendo per incuriam praeteriit, vel inveniendos deceptus est* los errores de Luca Pacioli, al que reconocía su mérito como algebrista, a pesar de sus limitaciones como teórico.

¹⁶ Bombelli (1526-72) fue arquitecto y utilizó un simbolismo en el que aparecen los exponentes y los parámetros que multiplican a las incógnitas, pero últimas éstas están ausentes. Vid supra. Su obra *L'Algebra* se publicó en Bolonia en 1579.

¹⁷ A Chuquet (1484; vid supra) se le debe, entre otras cosas, la introducción de dos símbolos, *p* y *m*, abreviaturas de *plus* y *moins*, interpuestos entre las magnitudes que había que sumar o restar. Será en 1489 cuando Widman introduzca con gran éxito los signos + y - cuando el álgebra empezará a tener instrumentos adecuados de trabajo, pero su difusión aun tardará bastante.

¹⁸ François Viète (1540-1603) también escribió en latín. Su mejor obra fue el *Canon mathematicus*, publicado en 1550. La utilización de fórmulas algébricas aplicadas a la geometría, con letras y números fue muy tardía: 1591.

¹⁹ La introducción de los números árabes en la cultura occidental se remonta al siglo X, cuando fueron utilizados en algunos textos latinos. Sin embargo, la pervivencia de los números romanos fue todavía muy larga.

²⁰ No obstante se podían lograr con el uso del ábaco, bien mediante sumas repetidas del multiplicador tantas veces como indicaba el multiplicando (en los productos de dos números), o verificando el número de veces que el divisor estaba contenido en el dividendo, restano de éste tanta veces como fuera posible (el resultado) el valor del primero; lo que sobraba era el resto, que se expresaba como cociente entre ese número residual y el divisor (en las divisiones). Eran procedimientos engorrosos.

dificultad que implicaba la ausencia de un lenguaje, o sistema numérico, adecuado para el uso de algoritmos.

También tenemos que señalar la ausencia, casi generalizada, del concepto de *demostración*, entendida ésta en el sentido de exposición rigurosa probatoria de la regla o algoritmo ofrecido para la resolución de determinado problema.

Cuando a mediados del siglo XV se generalizó el empleo de los guarismos árabes, lo que implicaba una valoración posicional de las cifras, fue posible abandonar el uso del ábaco para realizar hasta las operaciones más sencillas, e iniciar los cálculos a «lápiz sobre papel».

Sin embargo, la presencia de unidades con divisores, o fracciones, obtenidas de muy distintas bases numéricas implicó el tener que desarrollar una Aritmética aplicada a los números fraccionarios, no siempre exacta, ya que se tendía a asimilar las fracciones con expresiones simples de pocos guarismos en el numerador y el denominador. Esta tendencia a los números racionales hizo que no se realizaran operaciones con decimales, mientras que fue frecuentísimo el trabajar con fracciones o partes enteras de la unidad. Es decir, que lo mismo que el Módulo de los órdenes arquitectónicos se dividía en partes y estas en minutos, de modo que en un determinado elemento podía venir expresada su dimensión, por ejemplo, en 6 módulos más $\frac{2}{3}$, o bien como 6 M y 8 partes²¹, de la misma manera se podía pagar un determinado gasto en 20 reales y medio o en 20 reales y 17 maravedies. Esta compleja situación de unidades no homogéneas llevaba a la necesidad, incluso en las sumas, a realizar frecuentes divisiones y restas para obtener las unidades múltiples de orden superior.

Al no existir el lenguaje sintético y no estar formuladas las expresiones exponenciales resultaba impracticable desde la retórica descriptiva de los enunciados el efectuar simplificaciones, que hoy son inmediatas, o el correlacionar, como casos particulares de un mismo problema, planteamientos en los que la diferencia fundamental venía del empleo de un signo distinto en un parámetro, lo que llevaba a individualizar como operaciones radicalmente distintas, por ejemplo, a la suma y a la resta.

Los *Elementos* de Euclides, fueron recuperados en el Renacimiento, y así en el 1482 apareció la versión más antigua, publicada en Venecia, basada en la vieja traducción que Campano de Novara hiciera en el 1250. En el 1505 se hizo la primera traducción directa del griego, hecha por Zamberti. La edición del 1533 en griego apareció en Basilea, y finalmente en el 1572 apareció la edición en latín de Comandino, la más famosa hasta el siglo XIX.

²¹ El módulo arquitectónico se dividía unas veces en 12 (como en este ejemplo) o en 16 partes iguales, y cada parte se fraccionaba a su vez en otros tantos minutos.

Los textos de Diofanto²² fueron recuperados e impresos, por vez primera, en el *Algebra* de Bombelli²³ en el año 1572, y fueron traducidos al italiano cuatro años después.

Si en Italia se produjo la recuperación de los textos clásicos griegos, unas veces por traducción directa, y otras, a través de las versiones árabes, en Alemania, por el contrario, fueron muy numerosas las Algebras como el tratado *Die Cos* (1524) del *Rechenmeister*²⁴ Adam Riese (1492-1559) y el homónimo de Christoph Rudolph (h. 1487-1545), el *Rechnung Coss* (1525) de Apiano (1495-1552) o la *Arthmetica integra* (1544) de Michael Stifel (h.1487-1567).

Stifel fue el más importante de todos pues ya vemos como se adelantó a Pascal en la invención de su triángulo, o como empleó los números negativos, los radicales y la potencias²⁵. Difundió el empleo de los signos + y - introducidos por Johann Widmann²⁶, que sustituyeron a las abreviaturas italianas *p.* y *m.*²⁷.

A finales de la primera mitad del siglo XVI fueron los matemáticos italianos los que asumieron de nuevo la dirección que ha de llevar la evolución de la aritmética, especialmente en el momento que Girolamo Cardano (1501-76) publica su *Ars magna sive de regibus algebraicis* (1545) en la que abordó los complejos problemas de la resolución de la ecuación cúbica y de la bicuadrática aunque sin utilizar un lenguaje sincopado, con lo que se abrió el camino que llevaba a la ideación de nuevos conceptos de números: los irracionales, los negativos, los imaginarios.

Niccoló Tartaglia (h.1500-57) se disputó con Cardano la invención de la solución de la ecuación cúbica²⁸ encontrando el procedimiento para encontrar la solución de un tipo más general.

²² La obra completa de Diofanto puede consultarse en los dos tomos de la edición de Lipsiae de 1892-95: *Diophanti Alexandrini Opera Omnia*. Y el estudio de sus aportaciones en Heatt, T.: *Diophantus of Alexandria*, Cambridge 1910.

²³ Bombelli aceptó de forma expresa lo que luego se vinieron en llamar números complejos, al llegar a demostrar la validez de la expresión $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$, dando la regla para operar con esta nueva clase de números, en los que los conceptos actuales de -i y +i los expresó retóricamente como *meno di meno* y *più di meno*, enunciando que se podían sumar ni con *più* (+1), no con *meno* (-1), es decir, aceptando que las expresiones complejas son la combinación lineal de dos clases de números.

²⁴ *Rechen* = cálculo, *Meister* = maestro.

²⁵ Aunque inicialmente continuó utilizando los términos del Arte Cósico, posteriormente evolucionó y representó las incógnitas mediante letras, repitiéndolas tantas veces como fuese su potencia.

²⁶ Aparecieron en su aritmética comercial, titulada *Rechnung auff allan Kauffmanschafft* (1489) para indicar excesos o defectos de medida; años más tarde sustituyeron a los viejos símbolos italianos.

²⁷ Recorde introduciría más adelante el signo =, Rudolph el de la raíz $\sqrt{\quad}$, y Nemorarius, las letras indicando incógnitas.

²⁸ Actualmente se sabe que la gloria de tal descubrimiento, al menos en un tipo específico, no se debe ni a uno ni a otro, sino que fue Scipione di Ferro (1465-1526) quien encontró la solución, pero no la publicó, pero sí que se la confió a sus discípulo Antonio Maria Fiore. Encontró la raíz positiva de lo que ahora expresamos como $x^3 + ax = b$ en
$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Pero a finales del 500' hay que volver de nuevo a Francia para encontrar la última gran aportación a las matemáticas. Se trata de François Viète (1540-1603) que *In artem analyticam isagoge*, publicado en Tour en 1591, concibió el álgebra simbólica aunque todavía algo alejada de nuestra manera habitual de expresión²⁹ y fue el primero en relacionar las fórmulas trigonométricas con la resolución de ecuaciones.

Todavía cabría recordar a Simón Stevín (1548-1620) o a John Napier (1550-1617), el primero por haber ideado los números decimales³⁰ en *De Thiende* (=la décima), publicado en 1585, y el segundo por su invención de los logaritmos³¹, aunque ya un matemático suizo, llamado Jobb Bürgui (1552-1632), los había utilizado en 1558, pero sin llegar a publicarlos³².

Veamos unos ejemplos que nos pueden ilustrar sobre el modo de entender algunos aspectos de las Matemáticas en el Renacimiento:

Cardano reconoció que las ecuaciones (continuamos hablando y escribiéndolas en términos de matemática actual) de tercer y cuarto grado tenían tres y cuatro raíces respectivamente y señaló que las tres soluciones de lo que ahora expresamos como $x^3+bx=ax^2+c$, valen a , e e incluso planteó resoluciones que implicaban el manejo de raíces cuadradas negativas. Esta aceptación implícita de los números complejos, se haría expresa con su discípulo Bombelli, mientras que otro de sus seguidores, L. Ferrari en 1545 resolvería la ecuación general de cuarto grado, utilizando como auxiliar a otra de tercero; primero la expresaba como $x^4=ax^3+bx+c$, y después buscaba geoméricamente un número z en $(x^2+z)^2=(a+2x)x^2+bx+(c+z^2)$ tal que el segundo término fuera un número cuadrado.

²⁹ Utilizó el siguiente criterio: las vocales mayúsculas las aplicó a las incógnitas y las consonantes mayúsculas a los parámetros mientras que las consonantes minúsculas las utilizó para significar los exponentes (q = quadratus, c = cubus) y la multiplicación la abreviaba como *in*. Un ejemplo: la forma equivalente de la expresión actual $3ax^2+5bx-x^3=C$, Viète la escribía así: *B 3 in A quadratus + F 5 in A - A cubus aequatur D solido* y que en forma sincopada quedaba como *B 3 in A q + F 5 in A - AC aequantur D solido*.

³⁰ Para Stevín está más clara la idea que la representación. Por ejemplo, para escribir nuestro 8'375 aplicaba el siguiente algoritmo: 8(0)3(1)7(2)5(3), que había que leer así: ocho comienzos (o enteros), tres primeras (décimas), siete segundas (décimas de décimas) y 5 terceras (o décimas de décimas de décimas).

³¹ En la *Rabdología*, publicada a finales del siglo XVI, y nacida como un método para resolver largas multiplicaciones mediante la suma de segmentos ya estaba implícito el concepto de logaritmo, lo que le llevó en el 1614 a la publicación de su célebre tratado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, que se ocupa de su aplicación, y al que siguió cinco años después su método para construirlos o *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Y aunque pare él los logaritmos no estaban concebidos en relación al concepto de una base, lo cierto es que utilizó en su sistema, no el número e , sino su inverso $1/e$.

³² Su tardía aparición impresa en Praga el 1620 bajo el título de *Aritmeticae un geometrische Progress-Tabulen*, cuando ya se habían difundido las teorías de Napier le hicieron perder la gloria de la primicia.

a) *El algoritmo de la multiplicación:*

El algoritmo más frecuente en el Renacimiento es el habitual que hoy empleamos, basándonos en la recuperación del valor posicional por desplazamientos de un guarismo en cada fila multiplicada. Sin embargo, aun no estaban en total desuso las multiplicaciones en cruz y en caja³³, o la repetición, con el ábaco, de sumas del multiplicador tantas veces como indicara el multiplicando (útil solo cuando este era un número bajo).

b) *El algoritmos de la división:*

Otra de las dificultades que presentaba la Aritmética derivaba de la complejidad de los algoritmos utilizados. Veamos, por ejemplo, como se efectuaba una división, por el método llamado de «partir por galera» ya que su apariencia final era la de un barco³⁴.

El ejemplo que reproducimos³⁵ es el que resulta de dividir 4539 entre 34, cuyo resultado es 133 con un resto de 17:

+	1			Restos
=	=			Restos
+	+	+	7	Restos
4	5	3	9	Número que se parte
1	3	3		<i>Número que resulta de la partición (Resultado)</i>
3	4			Número partidor
3	4	3	4	Auxiliares

³³ La multiplicación en cruz no era más que una herencia de los cálculos manuales hechos con un punzón sobre una caja con arena, de cuyo proceder deriva también la división por tachado de restos de la que hablamos seguidamente. El multiplicar en caja fue un artificio o algoritmo ideado para reducir los errores, evitando tener que recordar las unidades que se «llevan»:

	5	2	7	
1	1 0	0 4	1 4	2
2	1 5	0 6	2 1	3
1	0 0	0 0	0 0	0
5	3 0	1 2	4 2	6
	2	6	2	

Producto de 527 x 2306 = 1.215.262

Notas:

En cada casilla se pone el producto del guarismo de la fila por el de la columna, separando los dos guarismos por la diagonal de la casilla.

Llenadas todas las casillas (en el orden que se quiera) se procede a sumar las diagonales desde el ángulo inferior izquierdo hacia la derecha y hacia arriba

³⁴ El nombre lo dio Certain en el *Kadran des marcahnd*. Tomamos la cita de Paul Benoit, op. cit. pág. 233.

³⁵ Tomamos el ejemplo de Benoit, P.: op cit., pág. 235.

El procedimiento seguido consiste en ir tachando los restos intermedios³⁶, siguiendo una mecánica bastante más engorrosa que la utilizada en la actualidad.

Hubo otras formas de organizar el algoritmo de la división. Por ejemplo, Ammannati lo disponía así:

RESTOS ↑
DIVIDENDO <u>COCIENTE</u>
DIVISOR

Se conocía perfectamente la regla de la prueba de las congruencias del nueve, que se aplicaba para comprobar si las operaciones eran correctas.

³⁶ Descompongamos el proceso en varios pasos sucesivos, indicando en cada paso del proceso (entre paréntesis) el orden seguido:

	1 1 = 45-34*1	1 1 (2) = 45-34*1
4 5 3 9 Dividendo	4 5 3 9	4 5 3 9 (3) Tacho el 45 y me queda el 1139
 Caja del resultado	1 45 entre 34 a una	1 (1) 45 entre 34 a 1
3 4 Divisor	3 4	3 4 2 (2) = 11-3*3
	1 1 (1) =23-4*3	+ + (3) Tacho el 11
2 (2) 11-3*3	≠ (2) Tacho el 2	≠
+ + (3) Tacho el 11 y me queda el 239	+ +	+ +
4 5 3 9	4 5 3 9 (2) Tacho el 3 Me queda el 119	4 5 3 9 (4) Me quedan 29
1 3 (1) 11 entre 3 a 3	1 3	1 3 (1) 11 entre 3 a 3
3 4 Aquí multiplico primero el 3 por el 3 del 34.	3 4 Aquí multiplico el 3 por el 4 del 34.	3 4 Aquí multiplico el segundo 3 por el 3 del 34.
1 7 (1) =29-4*3=17<34 FIN		
≠ (2) Tacho el 2		
+ +		
≠		
+ +		
4 5 3 9 (2) Tacho el 9		
1 3 3		
3 4 Aquí multiplico el segundo 3 por el 4 del 34.		
Al llegar a este punto finaliza la división ya que el resto R=17 es menor que el divisor.		

c) *El algoritmo a raíz cuadrada y los restos:*

El procedimiento es análogo al que se utiliza hoy, salvo en la forma del signo y en la colocación de los cálculos auxiliares, que se van situando hacia arriba, mientras que los duplos de la parte del resultado y el nuevo factor aparecen debajo. Por lo demás resulta un camino análogo al de la anulación de los restos intermedios:

00	(11) 2241 - 229*9 =0
0 22 00	(2) $1-1^2=0$; (6) $66-22*2=22$; (11) $2241-229*9 = 0$ RAIZ EXACTA
$\pm 66.41 \mid \underline{129}$	(3) Tacho el 1 y traigo el 1; (7) Traigo en 2;
$\pm \underline{22} 49$	(1) $1^2=1$; (4) Doble de uno seguido de 2 =22; (8) Tacho el 2 y pongo el 4 para hacer el doble del 12; (9) Por tanteo añado el 9.
2 9	(5) 2 que multiplica al 22; (10) escribo el 9 para multiplicar por 229.

La señalada tendencia a aproximar los resultados, no mediante decimales sino con fracciones, les llevó con frecuencia a estimar como parte fraccionaria del resultado, por extrapolación con la división, al cociente entre el resto y la raíz, lo que evidentemente es erróneo.

d) *Resolución de la raíz cúbica:*

La raíz cúbica, cuyo cálculo manual está hoy olvidado, también tenía un algoritmo para resolverla que se basaba en los siguientes pasos:

- 1) Dividir el radicando en grupos de tres cifras de derecha a izquierda.
- 2) Para grupo de la izquierda se busca el mayor número que elevado al cubo resulte inferior a ese grupo de partida.
- 3) Se obtiene la diferencia y a ese resto parcial se le añade el segundo grupo de tres cifras.
- 4) Ahora hay que formar la segunda línea del algoritmo, que se compone de tres números que multiplicados entre sí sean iguales o inferiores al resto parcial compuesto en el paso (3):

El primero es el triplo de la parte ya calculada del resultado.

El segundo se conforma con esa misma parte del resultado seguida de una cifra que hay que determinar por tanteo.

El tercero se compone de esa cifra que hay que determinar por tanteo seguida de un cero.

Una vez determinada esta cifra, se lleva a la casilla del resultado y se prosigue el algoritmo de igual manera³⁷.

e) *La regla de tres:*

La regla de tres simple y la compuesta eran de uso frecuente ya que con ellas era posible resolver intrincados problemas lineales.

f) *El método de la falsa solución y la resolución de formas algebraicas:*

Para encontrar la solución de algunos problemas, que hoy quedan rápidamente resueltos con el Algebra, se puso a punto el método llamado de la *falsa posición*, que podía ser simple o doble, consistente en buscar el valor de un incógnita a partir de una o dos posiciones (o soluciones, como diríamos hoy) arbitrarias, tras un laborioso y complejo proceso de cálculo. Nicolás Chuquet, por ejemplo, se ocupó de este procedimiento en *Le Kadran aus marchans*. Otro procedimiento utilizado para encontrar soluciones enteras a problemas indeterminados (con más incógnitas que ecuaciones, como diríamos hoy) fue el de la *oposición y remoción* que también lo expuso Chuquet en su tratado. Pero todos quedaron en desuso a partir del siglo XVII con la formulación del lenguaje algebraico.

Le aplicamos este nombre a una serie de problemas que hoy, en su mayor parte, son fácilmente resolubles por aplicación de un lenguaje sintético y muy reglado, pero que en la época que estamos estudiando sólo era posible plantear en forma retórica, de este tenor: *el cuadrado de una cosa sumado a veintiuno da diez cosas ¿cuánto vale la cosa?*³⁸.

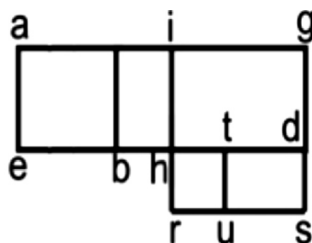
³⁷ Resolvamos un ejemplo con la notación actual para evitar la mayor complejidad del cálculo, que realmente se hacía tachando los restos parciales tal como hemos señalado:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{83.106.943} = 436 \\
 ..64..... 12 * 43 * 30 = 15.480 \\
 ----- \\
 ..19106 \\
 -15480.....129 * 436 * 60 = 3.374.640 \\
 ----- \\
3626942 \\
 ..-3374640 \\
 ----- \\
252302 = \text{resto}
 \end{array}$$

³⁸ En lenguaje algébrico escribiríamos:

$$x^2 + 21 = 10x, \text{ cuyas raíces son } x = \frac{10 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 10}}{2} = 7 \text{ y } 3$$

El método aplicado para resolver este problema se basaba en una especulación geométrica correcta:



que precisa algunas aclaraciones: a cada rectángulo o cuadrado se les nombra por las dos letras de una de sus diagonales; a cada segmento por sus dos extremos; y las magnitudes a que vamos a hacer referencia son arbitrarias y sólo sirven para plantear la resolución del problema.

En el lenguaje retórico de la época se plantearía, más o menos así la resolución:

Sea ab el número cuadrado de la cosa, al que se añade 21, por lo que eg valdrá diez cosas. Tomemos la mitad de las diez cosas en hg y pongamos bh igual a hr : entonces rg valdrá veinticinco y rt será igual a veinticinco menos veintiuno, o sea, cuatro, y de ahí que rh valga dos y subsiguientemente eb , que es la cosa, vale tres³⁹.

Hay que observar que como no se aceptaba la idea de números negativos, con el procedimiento aritmético sólo se consigue una raíz del problema.

Benedetto da Firenze nos ha dejado un *Trattato di prattica d'arismetica*, escrito en el 1463, y escrito en dieciseis libros, en los que nos dió la solución a treinta y seis ecuaciones, que escritas en lenguaje algebraico son las que damos en la tabla adjunta, seguidas de sus soluciones, cuya obtención realizó por una vía análoga a la descrita para el ejemplo precedente.

³⁹ Representemos el cuadrado de la incógnita x^2 por el cuadrado ab . Sumémosle el rectángulo bg con superficie total de 21 unidades. La condición del enunciado implica entonces que el rectángulo eg sea igual a 10 unidades. Dividamos este rectángulo eg en dos partes iguales por la recta ih y prolonguemos $rh = bh$, entonces el cuadrado rg tendrá 25 unidades de superficie, porque su lado vale 5. La diferencia entre el rectángulo de diagonal rg y el de diagonal bg será de 4 y como el segmento $td = ih$, entonces será el área del rectángulo $bi =$ área del rectángulo ts ; lo que implica que el cuadrado rt valga 4, lo que es lo mismo que decir que su lado vale 2. Y como $rs = 5$, entonces será $us = 5 - 2 = 3$, y como $us = ae$ tendremos que el valor de la incógnita buscada vale 3 unidades. El problema está resuelto con un procedimiento que es válido para cualquier valor de los parámetros con tal que el cuadrado rt exista.

Es oportuno señalar que el fundamento geométrico del problema hace que sea (aparentemente) distinta la solución de la ecuación 4 a la de la 5, al amparo de la presencia implícita de un signo negativo.

g) Valor de π :

En las operaciones encaminadas a calcular superficies, áreas y volúmenes de circunferencias y esferas aparece siempre un factor de proporcionalidad, que nunca es llamado con el nombre actual de π , de valor

$$2\frac{1}{7} = 22/7$$

valor bastante próximo al de π , que responde a esa tendencia señalada a emplear números racionales.

Nicolás de Cusa (1401-64), que como sabemos fue cardenal, se ocupó accidentalmente de las matemáticas, llegó a definir un valor de $\pi = 3'142337\dots$, algo más ajustado, calculado a través de la aplicación de su teoría sobre la *unidad de los contrarios*, es decir, a partir del supuesto que la circunferencia estaba comprendida entre los polígonos inscritos y circunscritos

A finales del siglo XVI se produjo un hecho conceptual importante: la aceptación de lo finito como resultado de operaciones acotadas recurrentes de infinitas cifras. Así François Vitel, en el 1593, llegó a definir (de forma implícita) el valor de π a partir de una expresión recurrente de raíces cuadradas.

h) *Problemas con arcos de circunferencia:*

Los problemas geométricos y aritméticos sobre figuras regulares estaban resueltos desde hacía mucho tiempo. Para la resolución de arcos, segmentos y cuerdas de una circunferencia se recurría a fórmulas simplificadas, que daban buenos resultados a efectos prácticos.

Por ejemplo, para determinar la longitud l_a de un arco de circunferencia del que se conoce el valor de su cuerda c y flecha f , Ammannati⁴⁰ daba la siguiente solución, que por brevedad formulamos en lenguaje moderno:

$$l_a \approx \frac{11}{7} \left(\frac{c}{2} + f \right)$$

⁴⁰ Ammannati, B.: *Codex Cartaceo Riccardiano*, Biblioteca Riccardiana, ms. 120 fol. 11 v°.

El resultado es exacto para arcos capaces de 90 y 180°, dando valores algo mayores que los reales para $90 < \alpha < 180$, y algo menores para $0 < \alpha < 90$.

Conociendo los mismos datos, c y f , sabían determinar exactamente el valor del radio r de la circunferencia a que pertenecían. El método geométrico es muy sencillo y bien conocido, pero el aritmético resultaba algo más complejo:

$$r = \frac{1}{2} \left[f + \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{f} \right]$$

Para calcular el área comprendida en el segmento circular definido por el radio r ; la cuerda c y la flecha f se aplicaba la siguiente fórmula, en forma de regla⁴¹, que da el valor exacto de la superficie:

$$A = \frac{r \cdot l}{2} - (r - f) \frac{c}{2}$$

i) Teoremas de Tales, Pitágoras y de la altura:

Estos tres teoremas básicos de la Geometría eran dominados con gran soltura.

j) Determinación de la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo:

El procedimiento geométrico es casi inmediato, mientras que el método aritmético que daba el valor del diámetro, suponía el dominio de varios teoremas fundamentales: el de Pitágoras, la igualdad de ángulos inscritos en una circunferencia y las leyes de semejanza de triángulos.

Si a , b y c son las tres magnitudes de los lados definidos por los tres vértices el cálculo del diámetro D de la circunferencia se hacía atendiendo a la siguiente regla: multiplicar dos lados y dividir por la altura que va al tercer lado:

$$D = \frac{a \cdot c}{h}$$

siendo

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2$$

⁴¹ Estas dos expresiones también se deducen de ms. de Ammannati: op. cit. fols. 14 vº y 28 vº.

k) La construcción del pentágono regular:

La construcción de polígonos regulares era bien conocida, incluida la del pentágono, que como sabemos está relacionada con la sección áurea⁴², sin embargo, para realizar el problema inverso, o sea, el de restituir la circunferencia circunscrita al pentágono de lado l , por el procedimiento aritmético se solía recurrir a un procedimiento basado en una regla de tres que daba un valor aproximado⁴³ al diámetro D al resultar

$$D = \frac{12}{7}l$$

La matemáticas aplicadas:

Hay tres facetas importantes donde las matemáticas tuvieron un especial interés práctico: el Comercio, la Astronomía y la Perspectiva.

a) El Comercio y la Aritmética:

El uso del cálculo operacional fue imprescindible para el gran desarrollo comercial que desde el 400' hubo, sobre todo e Italia. Es la etapa en que aparecieron las escuelas locales para enseñar el uso del ábaco y en la que se inició la publicación de los tratados de Aritmética, en los que, una vez dadas las reglas del cálculo, planteaban la resolución de múltiples problemas de uso común: la regla de tres compuesta dirigida a calcular las equivalencias monetarias entre tres o más tipos de cambios con equivalencias distintas; las reglas a seguir en casos de trueques con equivalencias cambiantes; la repercusión de beneficios entre distintos participantes en la actividad comercial, según sus aportaciones económicas o dedicaciones en tiempo, etc..

Importante fue, la incorporación de la contabilidad por partida doble, cuyas dos anotaciones en distintas columnas creaba un sistema de comprobación que evitaba los errores; etc..

b) La Astronomía y el cálculo:

La Astronomía permaneció sin grandes avances desde tiempos de Hiparco y Tolomeo y así permaneció hasta la revolución copernicana.

⁴² Ammannati, op. cit. fol 29 da la construcción exacta.

⁴³ Ibid. fol. 23. La regla de tres parte del hecho correcto de suponer constante la relación entre ambas magnitudes, pero el error deriva de la suposición de racionalidad dada al número II al que se le asigna el valor de 22/7.

Hiparco había ideado el sistema geocéntrico, o sea, aquel en que la Tierra ocupa el centro de un complejo sistema en el que giran el Sol, la Luna, los astros y el mismo cielo. Esta organización del universo fue la que se difundió en la Edad Media a través del texto de Tolomeo, el *Almagesto*, cuyo contenido se resume en estimar unos orbitales esféricos en torno a la tierra, también esférica, y fija en el centro del universo. Los astros de Tolomeo son siete: La Luna, Marte, Mercurio, Jupiter, Venus, Saturno y el Sol⁴⁴.

El instrumento utilizado para medir la posición de los astros fue desde tiempos de Hiparco, el Astrolabio, que pervivió hasta bien avanzado el siglo XVI sin apenas cambios.

Desde el siglo XIII, en Italia, el estudio de la Atronomía había tenido un especial interés; baste recordar la *Theoría planetarum* que Campano de Novara escribió en la segunda mitad de esa centuria, exponiendo con detalle la teoría de Ptolomeo de Alejandría y formula la manera de evaluar la distancia entre los planetas y es el primero en dar el modelo de ecuatorial para reproducir el complejo movimiento de los cielos en torno a la tierra⁴⁵.

Las *Tablas Alfonsíes* ejercieron su influencia hasta la segunda mitad del siglo XV, pues, al menos, Peurbach (1423-63) las utilizó en su *Theorica novae planetarum*, lo mismo que el *Almagesto* de Tolomeo que este mismo astrónomo empezó a traducir, trabajo que concluyó su discípulo Johan Müller (conocido por el sobrenombre de Regiomontano⁴⁶) (1436-76), a quien debemos (1464) el nuevo enfoque dado a la resolución de triángulos, lo que permitió afinar más el cálculo de las posiciones de los astros. La fama de Reggiomontano está pecisamente en la obra *De triangulis omnimodis*, en la que recogió esta teoría, considerada el origen de la trigonometría plana y esférica.

La ruptura con el sistema de Tolomeo tuvo algunos antecedentes antiguos⁴⁷, siendo recogida tímidamente la teoría heliocéntrica, por el cardenal Niccolò de Cusa en el 1435, pero la formulación definitiva se debe a Copérnico (1472-1543), que ante la complejidad de los movimientos relativos de los planetas a que conducía

⁴⁴ Como dos de los planetas, Mercurio y Venus, están entre el Sol y la Tierra, sus orbitales resultaban complejos de explicar, por lo que surgió la teoría de los epiciclos, mientras que de la observación de los eclipses lunares Hiparco descubrió el movimiento excéntrico de la Luna, con su perigeo y su apogeo. Tolomeo, luego, descubrió las alteraciones en el orbital de la luna por influencia del Sol, es decir, la llamada erección o alteración elíptica. Los árabes aportaron nuevos detalles y calcularon con mayor precisión la posición de los astros. Las escuela de Córdoba y Toledo continuaron esta tarea, y de la última de éstas surgirían las *Tablas Alfonsíes*, redactadas en tiempos de Alfonso X el Sabio.

⁴⁵ Cf. AA.VV.: *Campanus of Novara and Medieval Planetary Theory. Theorica planetarum*. Univ. of Wisconsin, Madison 1971.

⁴⁶ Había nacido en Könisberg (= montaña del rey) en Franconia.

⁴⁷ La cultura griega nos ha dejado los nombres de Filolao, Aristarco de Samos y Eudoxio, como defensores de un universo heliocéntrico.

la teoría de Tolomeo formuló otra más sencilla en su *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (dedicada al papa Paolo III): la de suponer al sol como centro del sistema; de este modo se desvanecía la teoría de los epiciclos a favor de la de los orbitales excéntricos.

El danés Tycho Brahe (1546-1601) intentó conciliar las dos visiones del universo, y planteó una teoría híbrida, según la cual el heliocentrismo era de aplicación a todo el universo, excepto a la Tierra que permanecía fija y en torno a la cual giraba el Sol y la Luna. Pero estaba abocada al fracaso, ya que Kepler daría en la centuria siguiente la solución definitiva.

La Astronomía se movía entre la especulación teórica de la Astrología, hasta la definición práctica de los movimientos planetarios, con el fin de hacer posible la navegación nocturna a los comerciantes marinos y también tenía un gran interés en la Iglesia llevada por su afán de hacer coincidir determinados hechos litúrgicos (fundamentalmente los relativos a la Pasión) con la realidad interpretada de los Evangelios, y otros.

c) La Trigonometría:

La Trigonometría, al parecer, había nacido en la India, con el planteamiento de una expresión que equivale a la actual función seno. Posteriormente Nasir al-Din al Tusi (1201-74) y los textos árabes que estudió Reggiomontano, prepararon el camino de su redescubrimiento.

Georg Peurbach (1423-61) preparó una tabla de senos para intervalos de minuto, con base de un radio de 600.000 unidades, mientras que su discípulo Reggiomontano llegó a plantear una más precisa sobre base de 10.000.000, dejando preparado el camino para los senos actuales referidos al radio unidad. Reggiomontano también incluyó una tabla de tangentes de 0° a 90° sobre base de un radio 100.000 a la que llamó *Tabula fecunda*.

Siguiendo a Reggiomontano y a su maestro Copernico, Georg Joachim Rhaeticus (1514-76) conformó la teoría trigonométrica en el *Opus palatinum de triangulis*, refiriendo las funciones a triángulos rectángulos e iniciando tablas con mucha precisión, incluidas las tangentes y secantes.

d) Arte de navegar:

Los grandes descubrimientos marinos y sobre todo los grandes flujos comerciales que luego se desarrollaron, sólo fueron posibles por el grado de desarrollo que alcanzó la astronomía y la trigonometría, bajo la forma de lo que se llamó *Arte de navegar por alturas y derrotas*, en cuya labor teórica destacaron varios matemá-

ticos españoles e italianos, como Enciso, Pedro de Medina, Diego de Saá, Alonso de Santa Cruz, Riaño, Falero, etc..

Uno de los problemas que habían de vencer los barcos para navegar juntos (*en conserva*) durante la noche, atendiendo las instrucciones de la nao capitana, se resolvía mediante señales luminosas hechas con faroles⁴⁸.

Antonio Pigafetta nos dejó escritas las órdenes dadas por Magallanes en el *Primer Viaje en Torno al Globo*:

Su navío debía siempre preceder a los otros, y para que no se le perdiese de vista durante la noche llevaba una antorcha de tea, llamada farol, atada a la popa de su buque; si además del farol encendía una linterna o un trozo de cuerda de esparto [el estrenque⁴⁹], los otros barcos debía hacer otro tanto a fin de asegurarse por ello de que seguían. Cuando encendían dos fuegos, sin el farol, los navíos debían cambiar de dirección, ya para moderar su marcha, ya por ser el viento contrario. Cuando se encendían tres fuegos, era para quitar la boneta, que es una parte de la vela que se coloca sobre la vela mayor cuando hay mar bella para aferrar mejor el viento y acelerar la marcha. Se quita la boneta cuando se teme la tempestad, porque entonces es necesario arriarla para que no estorbe a los que deben cargar la vela. Si encendía cuatro fuegos era señal de que había que arriar todas las velas; pero cuando estaban plegadas, las cuatro luces ordenaban desplegarlas. Muchos fuegos y algunos bombardazos advertían que estábamos cercanos a tierra o en bajos fondos y que teníamos, por consiguiente, que navegar con mucha precaución. Había otra señal que indicaba cuando se debía arrojar el ancla⁵⁰.

Pero los instrumentos básicos para la determinación de la ubicación en medio del océano fueron tres, además de la brújula: el reloj mecánico continuo, el sextante y el atrolabio, aunque no los únicos, y que todos precisaban de conocimientos de geometría para poder hacer evaluaciones correctas de los rumbos.

e) *La Perspectiva y las reducciones:*

Las reducciones aplicadas elemento a elemento se basaron en la utilización del teorema de Tales, planteado, muchas veces, como una simple regla de tres. Así lo

⁴⁸ Díaz del Castillo, Bernal: *Historia verdadera de la conquista de Nueva España* (h. 1525), cap. XXVIII.

⁴⁹ Manojó de esparto macerado, secado al sol o al calor de la chimenea, utilizado con el fin descrito.

⁵⁰ Pigafetta, op. cit. (h. 1519 y sigs.), Libro I.

encontramos en Ammannati, por ejemplo, que acompaña las figuras con el cálculo aritmético efectuado simultáneamente. Pero será la Perspectiva Geométrica la que podrá resolver mediante construcciones proyectivas las reducciones simultáneas de varias unidades situadas en planos distintos⁵¹.

Otras actividades matemáticas:

f) La teoría de las cónicas:

La teoría de las cónicas es quizá anterior a Eudoxio y a sus discípulo Menecmo, cuya actividad se fecha en torno a la primera mitad del siglo IV a.d.C., derivando su nombre de las curvas que se obtienen al seccionar un cono recto de base circular con un plano. Su temprana aparición dió lugar a que algunas de sus propiedades fundamentales fueran descubiertas desde antiguo: los diámetros conjugados ya eran conocidos por Arquímedes⁵² y el concepto de polaridad fue utilizado por Apolonio.

Reggiomontano además de iniciar las traducciones del *Almagesto* de Ptolomeo y la *Geografía* de Claudio Tolomeo, tenía previsto editar la *Esférica* de Menelao y Teodosio, las *Secciones Cónicas* de Apolonio, la *Aritmética* de Diofanto, las *Neumáticas* de Herón de Alejandría y las *Cuestiones mecánicas* de Aristóteles, pero su temprana muerte dió al traste con tan ambicioso proyecto científico.

El alemán Johannes Werner (1468-1528) se ocupó, sobre todo, de la geometría pura y en el 1522 publicó en Nuremberg los *Elementos de las cónicas* como medio para abordar el problema de la duplicación del cubo⁵³, en donde la parábola y la hipérbola se obtienen de la sección de un cono de ángulo recto en el vértice. Curiosamente fue por esos años cuando en Arquitectura empezaron a proyectarse plantas ovales.

Mucha más influencia ejerció Francesco Maurolico (1494-1575) cuando tradujo los cuatro libros de las *Secciones cónicas* de Apolonio, trabajo que luego repitió Federico Commandino (1509-75), junto con las ediciones latinas de la *Colección Matemática* de Pappus y los *Elementos* de Euclides.

⁵¹ Ved el epígrafe dedicado a la Perspectiva.

⁵² De la obra de Arquímedes se conoce, al menos, una edición veneciana del *Tetragonismus* (1503) que trata sobre la cuadratura de la parábola por el método mecánico, y la de Basilea de 1544, titulada *Archimedes Opera quae quidem exstant omnia*.

⁵³ Este antiguo problema arranca de la época griega y para su resolución utilizaron varios procedimientos geométricos basados en las construcciones de lo que hoy llamamos curvas algébricas (cónicas, cisoide de Diocles, conoide de Nicomedes) y trascendentes (espiral de Arquímedes, cuadratriz de Dinostrato). Para las propiedades de estas curvas Cf. Pedoe, D.: *Geometry and the Liberal Arts*, Minnesota 1976; Hay ed. castellana *La geometría en el Arte*, Barcelona 1979, págs. 236 a 243.

g) *La Mecánica y las palancas:*

La teoría de las palancas parece haber tenido origen medieval en el *Liber Jordani de ratione ponderis*, escrito a mediados del siglo XIII, y será la base de la que partirá Simón Stevín (1548-1620) en sus estudios sobre el plano inclinado (1586) y sobre los principios de la mecánica (1587).

La Astronomía y la Astrología:

La concepción unitaria que se tenía en el Renacimiento del universo hacía que todo descubrimiento real pudiera verse como una parte del conocimiento; conocimiento que podía ser real o, incluso mágico⁵⁴, ya que no se había definido aun la lógica racional como proceso excluyente dirigido hacia los actos en que no es posible la corroboración. Por ello, mientras que el conocimiento real era dominio de unos pocos, para el vulgo no se distinguía de las materias que cultivaba la magia. Uno y otra eran actividades que intentaban explicar la naturaleza, las primeras a través del razonamiento, las segundas a partir de unas estructuras aparentemente racionales. La ausencia de un sistema púramente científico que desbrozara el conocimiento racional de las teorías falsas y de puras especulaciones hacía que se pudiera dar esa simultaneidad, como la que hubo entre la Astronomía y la Astrología. Difícilmente podía escapar de la interpretación universal del cosmos que los astros y Dios, aposentados en el mismo cielo, no tuvieran algún grado de influencia en los hechos que el hombre era capaz de analizar. Para obviar las dificultades a que conducía la irracionalidad del mundo mágico, se segregan estos campos llenos de ambivalencias en dos vías, una la que abarca la verdad (la verdadera Astrología, la verdadera Alquimia, etc.) y otra, en la que se refugian los charlatanes (la falsa Astrología, la falsa Alquimia, etc.).

Era una herencia del pasado que se intentaba racionalizar mediante artificios pseudocientíficos a los que tan aficionados habían sido los astrónomos de la baja Edad Media y personajes tan variados como el teólogo Peirre d'Ailly o el marqués de Villena, aunque ya se habían levantado voces críticas contra la Astrología, como las de Petrarca o Raimundo Lulio.

Esta presencia de irracionalidad organizada desde una apariencia rigurosamente formal ejerció una poderosa influencia en el Renacimiento, encontrando con frecuencia como el poder político recurrió a las artimañas de la predicción. Los papas Sisto IV, Giulio II, Leone X, Clemente VII⁵⁵, Paolo III, el emperador Carlos V, los reyes franceses François I y Catalina de Medici se sirvieron de los astrónomos. Y

⁵⁴ Eugenio Garín escribió un artículo muy interesante sobre la «Magia y Astrología en la cultura del Renacimiento», en *Medioevo e Rinascimento. Studi e ricerche*, Roma-Bari 1973. Hay traducción en castellano: *Medioevo y Renacimiento*, Madrid 1981, págs. 112 a 124.

⁵⁵ Lucca Gausico fue el astrólogo de los papas Medici.

decimos astrónomos porque entre éstos y los astrólogos no había muchas diferencias. El bávaro Reggiomontano se ocupó de la Astrología, lo mismo que lo hizo Tycho Brahe o el mismo Kepler. El más famoso de todos fue Nostradamus, cuya fama en la corte de Catalina de Medici creció tras la publicación de las *Centuries* (1555-58) y la muerte del rey Henri II⁵⁶.

Dentro de ese valor mágico no fue extraño que la Astrología se mezclara con la Medicina, tal como hizo Juan Alemani en su *Lunari o repertori del temps compost per lo mol abil astrolech Joan Alemany: bacheller en arts y doctor en medicine de natio català*, del que se tienen varias ediciones publicadas en la segunda mitad del siglo XVI.

Camino muy distinto llevaba la Astronomía científica de la que su mejor representante es el polaco Nicolás Copérnico (1473-1553), haciéndola salir del sistema ptolomeico, al retomar la idea del astrónomo griego Aristarco, según la cual el sol ocupaba el centro del sistema planetario. La obra apareció publicada muy pocos días antes de su muerte con el título *De revolutionibus orbium coelestium* (1553).

Bibliografía

Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie*, Bruselas 1837.

Enciso: *Cosmographia por derrotas y alturas*, 1519.

Falero, *Del arte de marear*, 1535.

Garin, E., «*Gli Umanisti e la Scieze*», en *La Nuova Critica. Scienza e Umanesimo*, 15-16, 1990.

Lawrence Rose, P. L., «The Humanist Culture and Renaissance Mathematics, the italian libraries on Quattrocento», en *The Studies Renaissance*, XX, 1978.

Lawrence Rose, P. L., «The Italian Renaissance of Mathematics», en *Studies on Humanists and Matematiciens from Petrarch to Galileo*, Ginebra 1976.

Medina, Pedro de, *Arte de navegar*, 1545.

Riaño, *Navegación por alturas y derrota*, 1585.

Saá, Diego de, *De navegatione libri tres*, 1549.

Uzielli, G., *La vita e i tempi di Paolo dal Pozzo Toscanelli. Recherche e studi*, Roma 1895.

⁵⁶ A raíz del fallecimiento del esposo de Catalina de Medici en el 1559, se quiso ver en el lenguaje polivalente de Michele de Nôtre-Dame el valor profético del folio 35.