Lecturas Matemáticas
Volumen **41** (2) (2020), páginas 127-132
ISSN 0120-1980

Relaciones de recurrencia de tipo Apéry

Apéry type recurrence relations

Alicia María Centurión Fajardo[1], Nancy Céspedes Trujillo[2] y Eduardo Moreno Roque[1]

[1]Universidad de Granma, Cuba
[2]Universidad de Las Tunas, Cuba

Resumen. En la última década, el estudio de las relaciones de recurrencia ha obtenido gran relevancia. La generación de los aproximantes racionales se ha visto favorecido con la inclusión de las relaciones de recurrencia para el estudio de la irracionalidad de ciertas constantes matemáticas, en particular la constante de Apéry. En este artículo se presentan, a partir del Algoritmo de Zeilberger, dos relaciones de recurrencia de tipo Apéry. Para el resultado se modificaron los denominadores de los aproximantes racionales a la constante Apéry.

***Palabras clave*:** Constante de Apéry, Algoritmo de Zeilberger, Irracionalidad, Relación de recurrencia.

Abstract. In the last decade, the study of recurrence relations has obtained great relevance. The generation of rational approximants has been favored with the inclusion of recurrence relations for the study of the irrationality of certain mathematical constants, in particular Apéry's constant. This article presents, based on the Zeilberger algorithm, two recurrence relations of the Apéry type. For the result, the denominators of the rational approximations to the Apéry constant were modified.

***Key words*:** Apéry's constant, Irrationality, Recurrence relation, Zeilberger algorithm.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 33F10, 11B37; Secondary 11J72, Third 11Y40.

1. Introducción

A finales del siglo XVIII, el prestigioso matemático suizo, Leonhard Paul Euler publicó en su famoso Tratado de Cálculo Diferencial, la célebre formula de Euler [2, 7, 9]

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

donde

$$\zeta(k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

es la función zeta de Riemann en argumentos enteros y B_{2k} son los conocidos números de Bernoulli [4], con $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Más adelante, Euler propuso la siguiente conjetura para el caso impar,

$$\zeta(2k+1) = \frac{p_k}{q_k} \pi^{2k+1},$$

donde p_k y q_k son números enteros. Sin embargo, los esfuerzos de Euler por validar su conjetura quedaron frustrados [9].

Años más tarde, Roger Apéry sorprendió a la comunidad matemática con una elegante charla sobre la irracionalidad de $\zeta(3)$ probando que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0,$$

donde p_n/q_n son aproximantes racionales de Apéry, los cuales también se denominan aproximantes diofánticos de Apéry a $\zeta(3)$ cuando n crece, es decir, convergen a $\zeta(3)$ para n suficientemente grande. Uno de los ingredientes más cruciales en la prueba de Apéry es la existencia de la relación de recurrencia [5, 6, 9]

$$(n+2)^3 y_{n+2} - (2n+3)(17n^2 + 51n + 39) y_{n+1} + (n+1)^3 y_n = 0, \quad n \geq 0, \tag{3}$$

la cual se satisface simultáneamente tanto por los numeradores p_n como por los denominadores q_n de los aproximantes diofánticos p_n/q_n a $\zeta(3)$, siendo las condiciones iniciales

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 6, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 5.$$

Por cierto, los denominadores q_n de los aproximantes diofánticos a $\zeta(3)$ están dados mediante la representación explícita [3, 5, 10]

$$q_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2. \tag{4}$$

Este artículo tiene como objetivo fundamental conseguir algunas relaciones de recurrencia de tipo Apéry, es decir, que tengan el mismo polinomio característico

$$\lambda^2 - 34\lambda + 1 = 0,$$

a partir del uso del Algoritmo de Zeilberger [1, 8].

2. Resultados principales

Teorema 2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 0$. Sea además*

$$q_{1,n} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \frac{n-k+1}{n+k}.$$

Entonces, la sucesión $\{q_{1,n}\}_{n\geq 0}$ satisface la siguiente relación de recurrencia de tipo Apéry,

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)^4(6n^4+33n^3+31n^2+13n+2)q_{1,n+2}\\ -2(n+1)^2(102n^7+1122n^6+4310n^5+7967n^4\\ +7802n^3+4143n^2+1180n+138)q_{1,n+1}\\ +n^4(n+2)(6n^4+57n^3+166n^2+198n+85)q_{1,n}=0, \quad n=1,2,\ldots \qquad (5)\end{aligned}$$

Demostración. En efecto, la ecuación en diferencias de segundo orden

$$\alpha_n q_{1,n+2} + \beta_n q_{1,n+1} + \gamma_{1,n} q_{1,n} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es equivalente a

$$\sum_{0\leq k \leq n+2} (\alpha_n b_{k,n+2} + \beta_n b_{k,n+1} + \gamma_n b_{k,n}) = 0,$$

donde

$$b_{k,n} = \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \frac{n-k+1}{n+k}.$$

De esta manera, teniendo en cuenta que $b_{i,j} = 0$, para $i > j$, entonces

$$\alpha_n b_{k,n+2} + \beta_n b_{k,n+1} + \gamma_n b_{k,n} = f_n(k+1) - f_n(k), \qquad (6)$$

tal que $f_n(0) = f_n(n+3) = 0$. Luego, definiendo,

$$f_n(k) = \frac{k^4 \pi_{3,n}(k) \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2}{(n-k+1)^2 (n-k+2)^2 (n+k)}, \qquad (7)$$

donde $\pi_{3,n}(k)$ es un polinomio de grado 3 en k, cuyos coeficientes dependen de n. Entonces, a partir de (6) y (7) se deduce la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\alpha_n(n+k)(n+k+1)^2(n+k+2)(n-k+3)\\ +\beta_n(n+k)(n+k+1)(n-k+2)^3\\ +\gamma_n(n-k+1)^3(n-k+2)^2\\ =(n+k)(n+k+1)(n-k+2)^2\pi_{3,n}(k+1) - k^4\pi_{3,n}(k).\end{aligned}$$

Así, en virtud de la ecuación anterior se arriba a un sistema de ecuaciones lineales de 6 ecuaciones para 7 incógnitas, donde una solución particular viene dada por

$$\alpha_n = (n+1)(n+2)^4\left(6n^4+33n^3+31n^2+13n+2\right),$$

$$\beta_n = -2(n+1)^2(102n^7+1122n^6+4310n^5+7967n^4 \\ +7802n^3+4143n^2+1180n+138),$$

$$\gamma_n = n^4(n+2)\left(6n^4+57n^3+166n^2+198n+85\right).$$

□

Teorema 2.2. *Sea* $n\in\mathbb{N}$*, con* $n\geq 0$*. Sea además*

$$q_{2,n} = -\sum_{0\leq n-1}\binom{n+k}{k}^2\binom{n}{k}^2\frac{(n-k)(n-k+1)}{(n+k)^2}.$$

Entonces, la sucesión $\{q_{2,n}\}_{n\geq 0}$ *satisface la siguiente relación de recurrencia de tipo Apéry:*

$$\begin{aligned}(n+2)^4&\left(6n^5+48n^4+98n^3+90n^2+40n+7\right)q_{2,n+2}\\ &-2(n+1)(102n^8+1377n^7+6703n^6+16506n^5+23060n^4\\ &\quad+18987n^3+9153n^2+2402n+266)q_{2,n+1}\\ &+n^4\left(6n^5+78n^4+350n^3+732n^2+736n+289\right)q_{2,n}=0,\quad n=1,2,\ldots\end{aligned}\tag{8}$$

Demostración. En efecto, la ecuación en diferencias de segundo orden

$$\alpha_n q_{2,n+2}+\beta_n q_{2,n+1}+\gamma_{1,n}q_{2,n}=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

es equivalente a

$$\sum_{0\leq k\leq n+2}\left(\alpha_n b_{k,n+2}+\beta_n b_{k,n+1}+\gamma_n b_{k,n}\right)=0,$$

donde

$$b_{k,n-1} = -\binom{n+k}{k}^2\binom{n}{k}^2\frac{(n-k)(n-k+1)}{(n+k)^2}.$$

Luego, teniendo en cuenta que $b_{i,j-1}=0$, para $i>j$, entonces

$$\alpha_n b_{k,n+1}+\beta_n b_{k,n}+\gamma_n b_{k,n-1} = f_n(k+1)-f_n(k),\tag{9}$$

tal que $f_n(0)=f_n(n+3)=0$. Luego, definiendo,

$$f_n(k) = \frac{k^4\pi_{4,n}(k)\binom{n+k}{k}^2\binom{n}{k}^2}{(n-k+1)^2(n-k+2)^2(n+k)^2},\tag{10}$$

donde $\pi_{4,n}(k)$ es un polinomio de grado 4 en k, cuyos coeficientes dependen de n. Entonces, a partir de (9) y (10) se infiere la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\alpha_n (n+k)^2 (n+k+1)^2 (n-k+2)(n-k+3) \\ + \beta_n (n-k+1)(n-k+2)^3 (n+k)^2 \\ + \gamma_n (n-k)(n-k+1)^3 (n-k+2)^2 \\ = (n-k+2)^2 (n+k)^2 \pi_{4,n}(k+1) - k^4 \pi_{4,n}(k) .\end{aligned}$$

Por consiguiente, a partir de la ecuación anterior se arriba a un sistema de ecuaciones lineales de 7 ecuaciones para 8 incógnitas, donde una solución particular viene dada por

$$\alpha_n = (n+2)^4 \left(6n^5 + 48n^4 + 98n^3 + 90n^2 + 40n + 7\right),$$

$$\begin{aligned}\beta_n = -2(n+1)(102n^8 + 1377n^7 + 6703n^6 + 16506n^5 + 23060n^4 \\ + 18987n^3 + 9153n^2 + 2402n + 266),\end{aligned}$$

$$\gamma_n = n^4 \left(6n^5 + 78n^4 + 350n^3 + 732n^2 + 736n + 289\right).$$

□

Agradecimientos

Los autores agradecen cada una de las sugerencias y comentarios ofrecidos por los árbitros para lograr el artículo en su versión actual.

Referencias

[1] S.A. Abramov & H.Q. Le, *A criterion for the applicability of Zeilberger's algorithm to rational functions*, Discrete Mathematics **259** (2002), no. 1-3, 1-17.

[2] E. Balanzario, *Método elemental para la evaluación de la función zeta de Riemann en los enteros pares*, Miscelánea Mat **33** (2001), 31-41.

[3] H. Cohen, *Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'apres Apery)*, Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble **1979** (1978).

[4] J.H. Conway & R. Guy, *The book of numbers*, Springer Science & Business Media, 2012.

[5] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1** (1979), 195-203.

[6] C. Elsner, *On prime-detecting sequences from Apéry's recurrence formulae for $\zeta(3)$ and $\zeta(2)$*, J. Integer Seq. **11** (2008), no. 2, 3-21.

[7] J. Lagarias, *Euler's constant: Euler's work and modern developments*, Bulletin of the American Mathematical Society **50** (2013), no. 4, 527-628.

[8] P. Paule & M. Schorn, *A Mathematica version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities*, Journal of Symbolic Computation **20** (1995), no. 5-6, 673-698.

[9] A. Soria-Lorente, *Arithmetic of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments*, G.I.E Pensamiento Matemático **4** (2014), no. 1, 33-44.

[10] ______ , *Nesterenko-like rational function, useful to prove the Apery's theorem*, Notes Number Theory Discrete Math. **20** (2014), no. 2, 79-91.

Recibido en octubre de 2020. Aceptado para publicación en noviembre de 2020.

MSc. Alicia María Centurión Fajardo
Departamento de Ciencias Básicas e Informática Aplicada
Universidad de Granma
Bayamo, Cuba
e-mail: acenturionf@udg.co.cu

Lic. Eduardo Moreno Roque
Departamento de Ciencias Básicas e Informática Aplicada
Universidad de Granma
Bayamo. Cuba
e-mail: emorenor@udg.co.cu

MSc. Nancy Céspedes Trujillo
Departamento de Matemática
Universidad de Las Tunas
Las Tuna, Cuba
e-mail: nancyct@ult.edu.cu