HORIZONTE DE LA CIENCIA
https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2019.16.473

Demostración de teoremas de números naturales en el sistema axiomático de Giuseppe Peano

Kikin yupaykuna teoremakuna likachinin Guiseppe Peanop axiomático allikayninchu

*Régulo Antezana Iparraguirre**

Resumen
Después de los trabajos del griego Euclides, fueron muchos, entre matemáticos y filósofos, su contribución hacia la axiomatización de la matemática, en sus diversas disciplinas matemáticas, tales como Dedekind, Grassmann, Frege, Hilbert, Peirce, Peano, entre otros. Lo que pretendemos, es presentar algunas demostraciones, principalmente con fundamentación axiomática del conjunto de los números naturales, trabajadas por el matemático italiano Giuseppe Peano, considerando la construcción de éste sistema, a partir del número natural cero, como punto inicial.

Palabras clave
sistema axiomático, números naturales, teoremas.

Shuukukuna limana:
Kikin yupaykuna, teoremakuna, axiomático.

Recibido: 03 de octubre de 2017 / Aceptado: 08 de abril de 2018.

* Filiación: Universidad Nacional de Huancavelica.

Datos del autor
Régulo Pastor Antezana Iparraguirre. Peruano. Investigador y docente en la especialidad de Matemática y Física. Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional de Huancavelica, Ciudad de Huancavelica. Maestro en Investigación y Docencia Superior por la Universidad Nacional de Huancavelica. Correo: regulo.antezana@unh.edu.pe.

Demonstration of natural number theorems in the Giuseppe Peano axiomatic system

Abstract

After the works of the Greek Euclides, many others, among mathematicians and philosophers, his contribution to the axiomatization of mathematics, in its various mathematical disciplines, stories such as Dedekind, Grassmann, Frege, Hilbert, Peirce, Peano, among others. What we intend, is to present some demonstrations, mainly with axiomatic foundation of the set of natural numbers, working for the Italian mathematician Giuseppe Peano, considering the construction of this system, from the natural zero number, as starting point.

Keywords

axiomatic system, natural numbers, theorems

Demonstração de teoremas de números naturais no sistema axiomático de Giuseppe Peano

Resumo

Depois dos trabalhos do grego Euclides, foram muitos, entre matemáticos e filósofos, que contribuíram para a axiomatização da matemática, em suas diversas disciplinas matemáticas, tais como: Dedekind, Grassmann, Frege, Hilbert, Peirce, Peano, entre outros. O que pretendemos, é apresentar algumas demonstrações, principalmente com fundamentação axiomática do conjunto de números naturais, trabalhados pelo matemático italiano Giuseppe Peano, considerando a construção deste sistema, a partir do número natural zero, como ponto de partida.

Palavras-chave:

sistema axiomático, números naturais, teoremas.

Introducción

La primera ciencia axiomatizada fue la geometría, aunque con muchos vacíos, trabajada, hacia 300 a.n.e., por el célebre matemático griego, Euclides, en su famosa obra los Elementos. Sin embargo, en 1899 concluye con la axiomatización de esta ciencia,

> ...cuando el matemático alemán David Hilbert publica fundamentos de la Geometría, que contiene un sistema completo de axiomas para la geometría euclideana. Pero Hilbert va más lejos, empleando su axiomatización para pasar la consistencia de su sistema en la consistencia de la aritmética. Ésta es la llamada, 'aritmetización de la geometría'. (Bedoya, 2003, p. 5)

En la actualidad se reconoce que la axiomatización del conjunto de los números naturales, fue desarrolla después de los trabajos de Pierce, el cual se conoce gracias a la tesis elaborado por Paul Shields, doctorado en filosofía, allá por 1981.

> En 1881 en un artículo *On the Logic of Number* del científico, filósofo, humanista y matemático estadounidense, Charles Sanders Peirce, presentó grandes aportes a la lógica y la filosofía que revolucionaron éstas ciencias (...) produjo una serie genial de trabajos en matemáticas, la axiomatización de la aritmética. (Bedoya, 2003, p. 6)

La teoría de categoría nace con F. Lawvere, norteamericano, que en 1945 "tradujo los axiomas de Peano al lenguaje categórico obteniendo la noción de 'objeto números naturales', bastante empleada en ese contexto". (Bedoya, 2003, pp. 6 y 7).

Contrariamente a Dedekind, Peano se encontraba empeñado en axiomatizar los números naturales desde la lógica formal, por eso Geiss y Barrios (2005, p. 1), sostenía que Dedekind "trataba el problema desde la perspectiva de la teoría de conjuntos mientras que otro lo abordaba desde la lógica matemática." Peano inicialmente presentó nueve axiomas en su obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, que a continuación se presenta (Bedoya, 2003, p. 4):

El símbolo *N* significa *número* (entero positivo).
- El símbolo 1 significa *unidad.*
- El símbolo a + 1 significa *el sucesor de a, o, a más 1.*
- El símbolo = significa *es igual a*.

En seguida se enuncian los "axiomas". En esta presentación sólo se ha modificado la notación lógica.
1. $1 \in N$
2. Si $a \in N$ entonces: $a = a$
3. Si $a \in N$ entonces: $a = b$ si y sólo si $b = a$
4. Si $a, b, c \in N$ entonces: $a = b, b = c$ *implica* $a = c$
5. Si $a = b$ *y* $b \in N$ entonces: $a \in N$
6. Si $a \in N$ entonces: $a + 1 \in N$
7. Si $a \in N$ entonces: $a = b$ *si y sólo si* $a + 1 = b + 1$
8. Si $a \in N$ entonces: $a + 1 \neq 1$
9. Si k es una clase, $1 \in k$, y si para $x \in N$: $x \in k$ *implica* $x + 1 \in k$, entonces $N \subseteq k$.

Sin embargo, "después de un análisis más profundo por parte de otros matemáticos y de la eliminación de aquellos postulados que podían deducirse a través de los otros nos han llegado los cinco axiomas para los conceptos básicos *N; o* y *S* que se utilizan hoy" (Geiss y Barrios, 2005, p. 1).

Método axiomático

El método axiomático es el conjunto de todos los conceptos sustanciales, fundamentales, básicos, que contribuyen a plantear, formular definiciones, axiomas, teoremas y propiedades de una ciencia. Al respecto, Weyl (1965) citado por Contreras (2017), afirmaba que el método axiomático consiste en coleccionar todos aquellos conceptos básicos, que a partir de los cuales se derivan por definición y deducción teoremas de una ciencia.

Según la concepción actual, un sistema axiomático consta de ciertos componentes: conceptos primitivos, conceptos definidos, axiomas y sus teoremas. Por tanto, un sistema axiomático es:

Llamamos sistema axiomático a un conjunto de enunciados o proposiciones tales que algunos de ellos llamados axiomas o postulados son tomados como punto de partida supuestamente verdaderos y que no se demuestran para deducir otros llamados teoremas, mediante la aplicación de las reglas de inferencia que garantizan que si los axiomas son verdaderos los teoremas también lo serán. (Gómez, 2010)

Toda axiomatización o teoría posee ciertas propiedades. En nuestro caso, Contreras (2017) plantea tres propiedades: Consistencia (donde es imposible $p \wedge \sim p$), independencia (cuando un axioma de la teoría no puede ser deducida del resto de los axiomas) y completitud (cuando en el sistema se encuentra todos los axiomas y nada más que ellos)

La axiomatización de los números naturales, trabajada en 1889 por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), en su insigne texto *Arithmetice Principia Nova Methodo Exposita*, posiblemente, es la más conocida en nuestro medio. Motivo por el cual, a continuación presentamos algunas demostraciones de teorema presentados por éste eminente matemático, pero en la forma actual de la axiomatización: axiomas, definiciones y teoremas debidamente demostrados, considerando la construcción a partir del número natural cero.

Cabe resaltar, las demostraciones de los teoremas, que a continuación se presenta son propuestas de muchos autores. En nuestra exposición, seguiremos los aportes de Suger, Morales y Pinot (1971) y Rojo (1996).

Conceptos primitivos

Según Peano, sin necesidad de plantearse la existencia o no del conjunto de los números naturales, propuso un sistema axiomático, utilizando tres conceptos primitivos (Contreras, 2017):

a. Número
b. Objeto cero, cuya representación es 0
c. Una relación binaria, llamada: "es siguiente de" ó "sucesor de", cuya denotación es "s"

Axiomas

a. Cero es un número ($0 \in \mathbb{N}$)
b. Todo número tiene sucesor al otro, o sea:
   Si $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow s(n) \in \mathbb{N}$
c. Cero no es sucesor de ningún número
   Si $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow s(n) \neq 0$
d. No hay dos números que tengan el mismo sucesor. O sea, si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo número natural.
   $\forall n,m \in \mathbb{N}$, Si $s(n) = s(m) \Longrightarrow n = m$
e. Axioma del Principio de Inducción Completa (PIC).

   Cualquier propiedad que pertenece a cero y que el sucesor de cualquier otro número que tenga también esa misma propiedad, pertenece a todos los números. Es decir, si el número 0 (cero) pertenece al conjunto A, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece al conjunto A, entonces todos los números naturales pertenecen al mismo conjunto.

   Si $A \subset \mathbb{N}$ se cumple
   i) $0 \in A$
   ii) Si $n \in A \Longrightarrow s(n) \in A$
   Entonces $A = \mathbb{N}$

Este principio de inducción completa, podemos también enunciar de la siguiente manera: Suponiendo que P es una propiedad de los números naturales y, también dicha propiedad es verdadera para el número cero. Si, de algún modo somos capaces de demostrar que cuando dicha propiedad es válida para "*n*", también es válida para *n+1,* entonces habremos demostrado que la propiedad es cierta para todo número natural.

Por ejemplo, demostremos que todo número impar es de la forma $2n + 1$.

Por el principio de inducción completa, tenemos:

1. Para $n = 0$
   Por supuesto. Si $2\cdot 0 + 1 = 1$, el resultado es un número impar.
2. Si $n = k$ entonces $2k+1$ es un número impar — Hipótesis
   Si $n = k + 1$, entonces $2(k+1) +1$ es un número impar — Tesis
   Demostrando: $2\cdot(k+1) + 1$ es impar

$(2k+2) + 1$	Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, por la izquierda
$(2k+1) + 2$	Asociativa aditiva

   Si por hipótesis $(2k+1)$ es impar, entonces

$(2k+1) + 2$	Es otro número impar, porque todo número impar sumado consecutivamente de dos en dos resulta otro impar.

Por tanto, la proposición es cierta para k+1, y podemos concluir que es válida pata todo número natural.

La creación de los números naturales ordinales está dada por la aplicación “sucesor de”, aplicándola reiteradamente. Así tenemos:

0 es el primero (El número cero no es sucesor de ningún número)
1 es el $s(0) \rightarrow$ Se lee: el número uno es sucesor del número cero
2 es el $s(1) \rightarrow$ Se lee: el número dos es sucesor de número uno
3 es el $s(2)$
$\vdots$
n es el $s(n-1)$
$n + 1$ es el $s(n)$

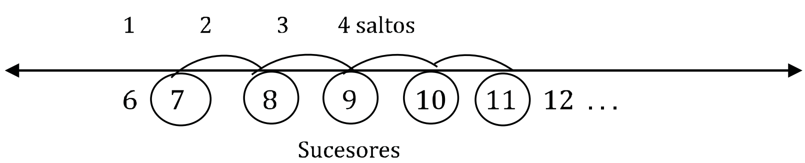
Adición en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$)

Definición
$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$\alpha(a,b) \rightarrow \mathbb{N}$, tal que
i) $\forall m \in \mathbb{N},\ \alpha(m,o) = m + 0 = m$
ii) $\forall m,n \in \mathbb{N},\ \alpha(m,s(n)) = m + s(n) = s(m + n)$

Dicho en otras palabras, las sumas de un número natural “*m*” con cualquier otro número natural “*n*” se obtienen por inducción, y de una manera ordenada.

Por ejemplo, no es posible saber quién es 7+4 si antes no conocemos quien es 7+3, y tampoco este último, si no conocemos quien 7+2, así sucesivamente.

El concepto suma en el nivel primario, es seguir contando (secuencia numérica), y restar significa, contar hacia atrás. Es decir, en la práctica 7+4 es el resultado de saltar desde la posición 7, 4 saltos adelante y llamar la suma 5+4 el número en el que ha caído en la secuencia numérica, en este caso cae en el número11.



Encontrar la suma de 3+2, como ejemplo de aplicación de la definición de adición en $\mathbb{N}$: Cabe indicar, lo que se va determinar es el sucesor del número 4. Entonces aplicando sucesivamente la definición de adición en $\mathbb{N}$ tenemos:

$$3+s(1) = s(3+1) = s(3+s(0)) = s(s(3+0)) = s(s(3)) = s(4)$$

Horizonte de la Ciencia 9 (16) ene-jun 2019 FE/UNCP. ISSN (Impreso): 2304-4330/ ISSN (En Línea): 2413-936X
Antezana, R. Demostración de teoremas de números naturales... 55-74

Teorema 01

Si $\forall m,n \in \mathbb{N} \rightarrow m + n \in \mathbb{N}$ (Ley de composición interna)

Demostración por el Principio de Inducción Completa

Sea $A = \{m,n \in \mathbb{N} \ / \ m + n \in \mathbb{N}\}$

1. Si $n = 0$

$m+0$	Principio de sustitución
m	Definición de adición

2. Si $n = k \rightarrow m + k \in \mathbb{N}$ — Hipótesis

Si $n = s(k) \rightarrow m + s(k) \in \mathbb{N}$	Tesis
$s(m+k)$	Definición de adición $\mathbb{N}$
$s(m+k) \in \mathbb{N}$	Axioma (b)

Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Teorema 02

$\forall m,n,p \in \mathbb{N}; m+(n + p) = (m+n) + p$ (Asociativa)

Demostración por el Principio de Inducción Completa

Sea $A = \{m,n,p \in \mathbb{N} \ / \ m +(n + p) = (m +n)+ p \}$

1. Si $p = 0$

$m + (n + 0) = (m + n) + 0$	Principio de sustitución
$m + n = m + n$	Definición de adición

2. Si $p = k \rightarrow m + (n + k) = (m + n) + k$ — Hipótesis

Si $p = s(k) \rightarrow m + (n + s(k)) = (m + n) + s(k)$ Tesis

$m + s(n + k)$	Definición de adición
$s[m + (n + k)]$	Definición de adición
$s[(m + n) + k]$	Hipótesis
$(m + n) + s(k)$	Definición de adición

Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Teorema 03

$\forall m,n,p \in \mathbb{N}, \exists! \ 0 \in \mathbb{N} \ / \ 0 + m = m + 0 = m$ (Identidad aditiva)

Demostración por el Principio de Inducción Completa

Sea $A = \{m,n,p \in \mathbb{N} \ / \ 0 + m = m + 0 \}$

a) $0 + m = m + 0$

1. $m = 0$

$0 + 0 = 0 + 0$	Principio de sustitución
$0 = 0$	Teorema de 01

2. Si $m=k \rightarrow 0+k = k+0$ — Hipótesis

Si $m=s(k) \rightarrow 0+s(k) = s(k)+0$	Tesis
$s(0+k)$	Definición de adición
$s(k+0)$	Hipótesis
$s(k)$	Definición de adición
$s(k) + 0$	Definición de adición

Por tanto: $A = \mathbb{N}$

b) $m + 0 = 0$ (Identidad aditiva por la derecha)

Demostración por el Principio de Inducción Completa

Sea A = {m∈ℕ/m+0 = 0, ∃!0∈ℕ}

1. m = 0

   0 + 0 = 0 Principio de sustitución

   0 = 0 Definición de adición

2. Si m = k → k + 0 = k Hipótesis

   Si m = s(k) → s(k)+0 = s(k) Tesis

   (k+1) + 0 Teorema: ∀m∈ℕ/ s(m)=m+1=1+m

   k+(1+0) Asociativa aditiva en ℕ

   k + 1 Definición de la adición

   s(k) Teorema: ∀m∈ℕ/ s(m)=m+1=1+m

   Por tanto: A = ℕ

c) 0+m = m (Identidad aditiva por la izquierda)

Demostración por el Principio de Inducción Completa

Sea A = {m∈ℕ/0+m = 0, ∃!0∈ℕ}

1. m = 0

   0 + 0 = 0 Principio de sustitución

   0 = 0 Teorema 01

2. Si m = k → 0 + k = k Hipótesis

   Si m = s(k) → 0 + s(k) = s(k) Tesis

   s(0+k) Definición de adición

   s(k) Hipótesis

   Por tanto: A = ℕ

Teorema 04

∀m,n ∈ ℕ / m + n = n + m (Conmutativa aditiva)

Demostración por el Principio de la Inducción Completa

Sea A = {m,n ∈ ℕ / n + m = m + n}

1. m = 0

   0 + n = n + 0 Principio de sustitución

   n = n Teorema de identidad aditiva

2. Si m = k → n+k = k+n Hipótesis

   Si m = s(k) → n+s(k) = s(k)+n Tesis

   n+(k+1) Teorema 05

   (n+k) +1 Asociativa aditiva

   (k+n) + 1 Hipótesis

   (k+1) + n Asociativa aditiva

   s(k) + n Teorema 05

   Por tanto: A = ℕ

Teorema 05

∀m ∈ ℕ / s(m) = m + 1 = 1 + m

Demostración por el Principio de la Inducción Completa (PIC)

Sea A = {m∈ ℕ / s(m) = m+1}

a. $s(m) = m + 1$
   Demostrando por el PIC
   Sea $A = \{m \in \mathbb{N} \;/\; s(m) = m+1\}$
   1. $m = 0$
      $s(0) = 0+1$ Principio de sustitución
      $s(0) = 1$ Teorema 01
   2. Si $m = k \rightarrow s(k) = k+1$ Hipótesis
      Si $m=s(k) \rightarrow s[s(k)]=s(k)+1$ Tesis
      $s(k +1)$ Hipótesis
      $s(1+k)$ Teorema conmutativa aditiva
      $1+ s(k)$ Definición aditiva
      Por tanto: $A = \mathbb{N}$

b. $s(m) = 1 + m$
   Demostrando por el PIC
   Sea $A = \{m \in \mathbb{N} \;/\; s(m) = 1 + m\}$
   1. $m = 0$
      $s(0) = 1 + 0$ Principio de sustitución
      $s(0) = 1$ Teorema 014
   2. Si $m = k \rightarrow s(k) = 1 + k$ Hipótesis
      Si $m = s(k) \rightarrow s[s(k)] = 1 + s(k)$ Tesis
      $s(1+k)$ Hipótesis
      $1 + s(k)$ Definición de adición
      Por tanto: $A = \mathbb{N}$

c. $\forall m \in \mathbb{N} \;/\; 1 + m = m + 1$
   Demostración por el PIC
   Sea $A = \{m \in \mathbb{N} \;/\; 1 + m = m+1\}$
   1. $m = 0$
      $1+0 = 0+1$ Principio de sustitución
      $0 = 0$ Teorema de simetría aditiva
   2. Si $m = k \rightarrow 1+k = k+1$ Hipótesis
      Si $m = s(k) \rightarrow 1+s(k) = s(k)+1$ Tesis
      $1+(k+1)$ Teorema 05 (a)
      $(1+k) + 1$ Asociativa aditiva
      $s(k)+1$ Teorema 05 (b)
      Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Teorema 06

Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$ (cancelativa)
Demostración por el PIC
Sea $A = \{m,n,p \in \mathbb{N} \;/\; m + p = n + p \rightarrow m = n\}$
1. $p = 0$
   $m+0 = n+0$ Principio de sustitución
   $m = n$ Definición aditiva

2. Si $p = k \rightarrow m + k = n + k$ Hipótesis
   Si $p = s(k) \rightarrow m + s(k) = n + s(k)$ Tesis
   $s(m + k)$ Definición aditiva
   $s(n + k)$ Hipótesis
   $n + s(k)$ Definición aditiva
   Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Teorema 07

El sucesor de un número es diferente al número, es decir $s(m) \neq m$

Demostración por el PIC

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / s(x) \neq x\}$

1. $x = 0$

$s(0) \neq 0$ Principio de sustitución

2. Si $x = k \rightarrow s(k) \neq k$ Hipótesis
   Si $x = s(k) \rightarrow s(s(k)) \neq s(k)$ Tesis
   $s(k + 1) \neq s(k)$ Teorema 05 (a) de la adición
   $k + 2 \neq s(k)$ Teorema 05 (a) de la adición
   $k + 2 \neq k + 1$ Teorema 05 (a) de la adición
   Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Teorema 08

$\forall x \neq 0 \in \mathbb{N}, \exists! y \in \mathbb{N} / x = s(y)$

Demostración

Sea $A = \{0\} \cup s(\mathbb{N})$

1. $0 \in A$, dado que $0 \in \{0\}$
2. Si $x \in A \rightarrow s(x) \in A$, toda vez que $s(x) \in s(\mathbb{N})$
   Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Teorema 09

$\forall x,y,z \in \mathbb{N}, y \neq z \rightarrow x + y \neq x + z$

Demostración por el PIC

Sea $A = \{x,y,z \in \mathbb{N} / y \neq z \rightarrow x + y \neq x + z\}$

1. $x = 0$

$y \neq z \rightarrow 0 + y \neq 0 + z$ Principio de sustitución

$y \neq z \rightarrow y \neq z$ Teorema simétrico aditivo

2. Si $x = k \rightarrow y \neq z \rightarrow k + y \neq k + z$ Hipótesis
   Si $x = s(k) \rightarrow y \neq z \rightarrow s(k) + y \neq s(k) + z$ Tesis
   $k + y \neq k + z \rightarrow s(k + y) \neq s(k + z)$ Función inyectiva
   $s(y + k) \neq s(z + k)$ Teorema conmutativa aditiva
   $y + s(k) \neq z + s(k)$ Definición aditiva
   $s(k) + y \neq s(k) + z$ Teorema conmutativo aditivo
   Por tanto: $A = \mathbb{N}$

Multiplicación en el conjunto de los números naturales

Definición

$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

α (a,b) $\to \mathbb{N}$, tal que

i) $\forall m \in \mathbb{N}$, α (m,o) = $m \cdot 0 = 0$

ii) $\forall m,n \in \mathbb{N}$, α (m,s(n)) = $m \cdot s(n) = mn + m$

Teorema 10

$\forall m,n \in \mathbb{N}$; $m \cdot n \in \mathbb{N}$

Demostración por el PIC

Sea A = {m,n $\in \mathbb{N}$ / $m \cdot n \in \mathbb{N}$}

1. n = 0
   $m \cdot 0$ Principio de sustitución
   $0 \in \mathbb{N}$ Definición multiplicativa
2. Si $n = k \to m \cdot k \in \mathbb{N}$ Hipótesis
   Si $n = s(k) \to m \cdot s(k) \in \mathbb{N}$ Tesis
   $m \cdot k + m$ Definición de multiplicación
   Pero $m \cdot k \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces
   $m \cdot s(k) \in \mathbb{N}$
   Por tanto, A = $\mathbb{N}$

Teorema 11

a. $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$; a (b+c) = ab + ac (distributiva multiplicativa con respecto a la adición por la izquierda)

Demostración por el PIC

Sea A = {a,b,c $\in \mathbb{N}$/ a (b + c) = a b + a c }

1. c = 0
   a (b + 0) = a b + a 0 Principio de sustitución
   a b = a + 0 Definición aditiva y multiplicativa
   a b = a b teorema simétrica aditiva
2. Si c = 0 $\to$ a (b + k) = a b + a k Hipótesis
   Si c = s(k) $\to$ a (b + s(k)) = a b + a s(k) Tesis
   a s(b + k) Definición aditiva
   [a (b + k) + a] Definición multiplicativa
   (a b + a k) + a Hipótesis
   a b + (a k + a) Teorema asociativa aditiva
   a b + a s(k) Definición multiplicativa
   Por tanto, A = $\mathbb{N}$

b. $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$; $(b+c)\, a = ba + ca$ (distributiva multiplicativa con respecto a la adición por la derecha)

Demostración por el PIC

Sea $A = \{a,b,c \in \mathbb{N} / (b + c)\, a = b\, a + c\, a\}$

1. $a = 0$

$(b + c)\, 0 = b\, 0 + c\, 0$	Principio de sustitución
$0 = 0 + 0$	Definición de multiplicación
$0 = 0$	Teorema 01

2. Si $a = k \rightarrow (b + c)\, k = b\, k + c\, k$ — Hipótesis

Si $a=s(k) \rightarrow (b + c)\, s(k) = b\, s(k) + c\, s(k)$	Tesis
$(b + c)\, k + (b + c)$	Definición multiplicativa
$(b\, k + c\, k) + (b + c)$	Hipótesis
$(b\, k + b) + (c\, k + c)$	Teorema asociativa aditiva
$b\, s(k) + c\, s(k)$	Definición multiplicativa

Por tanto $A = \mathbb{N}$

Teorema 12

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativa multiplicativa)

Demostración por el PIC

Sea $A = \{a,b,c \in \mathbb{N} / (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\}$

1. $c = 0$

$(a\, b)\, 0 = a\, (b\, 0)$	Principio de sustitución
$a\, b = a\, b$	Definición multiplicativa

2. Si $c = k \rightarrow (a\, b)\, k = a\, (b\, k)$ — Hipótesis

Si $c=s(k) \rightarrow (a\, b)\, s(k) = a\, (b\, s(k))$	Tesis
$(a\, b)\, k + (a\, b)$	Definición multiplicativa
$a\, (b\, k) + a\, b$	Hipótesis
$a\, (b\, k + b)$	Teorema de la distributiva (izquierda)
$a\, (b\, s(k))$	Definición multiplicativa

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 13

$\forall a \in \mathbb{N}, \exists! 1 \in \mathbb{N} / a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (Simetría multiplicativa)

Este teorema requiere tres aspectos que debemos demostrar:

a) $a \cdot 1 = a$

Demostración por el PIC

Sea $A = \{a,b \in \mathbb{N} / a \cdot 1 = a\}$

1. $a = 0$

$0 \cdot 1 = 0$	Principio de sustitución
$1 \cdot 0 = 0$	Conmutativa multiplicativa
$0 = 0$	Definición multiplicativa

2. Si $a = k \rightarrow k \cdot 1 = k$ — Hipótesis

Si $a = s(k) \rightarrow s(k) \cdot 1 = s(k)$ Tesis

$(k + 1) \cdot 1$ Teorema 05 (a) de la adición

$k \cdot 1 + 1 \cdot 1$ Distributiva multiplicativa de la adición por la derecha

$k + 1$ Hipótesis y Teorema 01

$s(k)$ Teorema 05 (a)

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

b) $1 \cdot a = a$

Demostración por el PIC

Sea $A = \{a,b \in \mathbb{N} / 1 \cdot a = a\}$

1. $a = 0$

   $1 \cdot 0 = 0$ Principio de sustitución

   $0 = 0$ Definición multiplicativa

2. Si $a = k \rightarrow 1 \cdot k = k$ Hipótesis

   Si $a = s(k) \rightarrow 1 \cdot s(k) = s(k)$ Tesis

   $1 \cdot k + 1$ Definición multiplicativa

   $k + 1$ Hipótesis

   $s(k)$ Teorema 05 (a) de la adición

   Por tanto, $A = \mathbb{N}$

c) $1 \cdot a = a \cdot 1$

Demostración por el PIC

Sea $A = \{a,b \in \mathbb{N} / 1 \cdot a = a \cdot 1\}$

1. $a = 0$

   $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1$ Principio de sustitución

   $1 \cdot 0 = 1 \cdot 0$ Conmutativa multiplicativa

   $0 = 0$ Definición multiplicativa

2. Si $a = k \rightarrow 1 \cdot k = k \cdot 1$ Hipótesis

   Si $a = s(k) \rightarrow 1 \cdot s(k) = s(k) \cdot 1$ Tesis

   $1 \cdot k + 1$ Definición multiplicativa

   $k \cdot 1 + 1$ Hipótesis

   $k \cdot 1 + 1 \cdot 1$ Simetría multiplicativa

   $(k + 1) \cdot 1$ Distributivo multiplicativa de la adición por la derecha

   $s(k) \cdot 1$ Teorema 05 (a) de la adición

   Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 14

$\forall a,b \in \mathbb{N}; a \cdot b = b \cdot a$ (conmutativa multiplicativa)

Demostración por el PIC

Sea $A = \{a,b \in \mathbb{N} / a \cdot b = b \cdot a\}$

1. $b = 0$

   $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ Principio de sustitución

   $0 = 0$ Definición multiplicativa

2. Si $b = k \rightarrow a \cdot k = k \cdot a$ Hipótesis
   Si $b = s(k) \rightarrow a \cdot s(k) = s(k) \cdot a$ Tesis
   $a \cdot k + a$ Definición multiplicativa
   $k \cdot a + a$ Hipótesis
   $k \cdot a + 1 \cdot A$ Simetría multiplicativa
   $(k+1) \cdot a$ Distributiva multiplicativa de la adición por la derecha
   $s(k) \cdot a$ Teorema 05 (a)
   Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 15
Dados $a,b \in \mathbb{N}$. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b =0$ (se dice que si esto es cierto, entonces en $\mathbb{N}$, no hay divisores de cero)
Demostración por el absurdo
Supongamos que $a \neq 0$
Evidentemente 0 (cero) cumple con $a \cdot 0 = 0$
Sabemos que $a \cdot s(b) = a \cdot b + a$,
Luego: $a \cdot s(b) = a \cdot b + a = 0 \rightarrow ab = 0$ y $a = 0$
Contrario a lo supuesto de que $a \neq 0$, esto es,
$a \cdot s(x) = 0$ (a por el sucesor de cualquier número es igual a cero, entonces $a = 0$)
Como cualquier número natural excepto el cero es sucesor de otro natural y cero es el único que no es sucesor de otro, entonces b no es sucesor de ninguno.
Por lo tanto: $b = 0$

Teorema 16
Sean $a,b,c \in \mathbb{N}$. Si $ac = bc \rightarrow a = b$
Demostración
Supongamos que $c \neq 0$
Si $ac = bc$ (identidad) y consideramos que
$a \cdot s(c) = b \cdot s(c)$
Por definición de multiplicación
$ac + a = bc + b$......... (1)
Pero $ac = bc$
Reemplazando en (1)
$ac + a = ac + b$
Por el teorema de cancelación aditiva
$a = b$

Corolario 01
Si $ab = b$ y $b \neq 0$ entonces $a = 1$ (demostración para el culto lector)

Teorema 17
Si $a \neq 1$, entonces $ab \neq 1$
Demostración por el PIC
Sea $A = \{a,b \in \mathbb{N} / ab \neq 1, a \neq 1\}$

Horizonte de la Ciencia 9 (16) ene-jun 2019 FE/UNCP. ISSN (Impreso): 2304-4330/ ISSN (En Línea): 2413-936X
Antezana, R. Demostración de teoremas de números naturales... 55-74

1. $b = 0$
   $a \cdot 0 \neq 1$ Principio de sustitución
   $0 \neq 1$ Definición multiplicativa
2. Si $b = k \rightarrow b \cdot k \neq 1$ Hipótesis
   Si $b = s(k) \rightarrow b \cdot s(k) \neq 1$ Tesis
   $b \cdot k + b$ Definición multiplicativa

Pero por hipótesis, tenemos que $b \cdot k \neq 1$ y $a \neq 1$

Entonces, $b \cdot k + b = 0$

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Corolario 02

Si $ab = 1$, entonces $a = 1$ y $b = 1$ (demostración para culto lector)

Potenciación en el conjunto de los números naturales

Definición

$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\alpha\ (a,b) \rightarrow \mathbb{N}$, tal que

i) $\forall m \in \mathbb{N}, \alpha\ (m,o) = m^0 = 1; m \neq 0$

ii) $\forall m,n \in \mathbb{N}, \alpha\ (m,s(n)) = m^{S(n)} = m^{n+1} = m^n + m; m \neq 0$

Teorema 18

La potenciación de dos números naturales es otro natural.

$\forall x,y \in \mathbb{N} / x^y \in \mathbb{N}$

Demostración por el PIC

$A = \{ x,y \in \mathbb{N} / x^y \in \mathbb{N}\}$

1. $y = 0$

x^0 Principio de sustitución

$1 \in \mathbb{N}$ Definición de potenciación

2. Si $y = k \rightarrow x^k \in \mathbb{N}$ Hipótesis
   Si $y = s(k) \rightarrow x^{s(k)} \in \mathbb{N}$ Tesis
   $x^k + x \in \mathbb{N}$ Definición de potenciación

Pero $x \in \mathbb{N} \wedge x^k \in \mathbb{N}$

Luego $x^{s(k)} \in \mathbb{N}$

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 19

$0^b = 0, \forall b \in \mathbb{N}, b \neq 0$

Demostración

Si $b \neq 0$, entonces $b = s(q)$, para algún $q \in \mathbb{N}$

Por definición de potenciación, tenemos

$a^b = a^{s(q)} = a^q \cdot a = 0^q \cdot 0 = 0$ (hemos hecho $a = 0$)

Otra solución

$0^b = 0, \forall b \in \mathbb{N}, b \neq 0$

Demostración por el PIC

$A = \{ b \in \mathbb{N} \ / \ 0^b = 0, \text{si } b \neq 0\}$

1. $b = 1$

$0^1 = 0$	Principio de sustitución
$0 = 0$	Definición de potenciación

2. Si $b = k \rightarrow 0^k = 0$ — Hipótesis

Si $b = s(k) \rightarrow 0^{s(k)} = 0$	Tesis
$0^k \cdot 0$	Definición de potenciación
$0 \cdot 0 = 0$	Hipótesis

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 20

Sean $a,b,c \in \mathbb{N} / (ab)^c = a^c . b^c$

Demostración por el PIC

$A = \{a,b,c \in \mathbb{N} / (ab)^c = a^c \cdot b^c \}$

1. $c = 0$

$(ab)^0 = a^0 \cdot b^0$	Principio de sustitución
$1 = 1 \cdot 1$	Definición de potenciación
$1 = 1$	Teorema 10

2. Si $c = k \rightarrow (ab)^k = a^k \cdot b^k$ — Hipótesis

Si $c = s(k) \rightarrow (ab)^{s(k)} = a^{s(k)} \cdot b^{s(k)}$	Tesis
$(ab)^k \cdot (ab)$	Definición de potenciación
$(a^k \cdot b^k) \cdot (ab)$	Hipótesis
$(a^k \cdot a) \ (b \cdot b^k)$	Asociativa multiplicativa
$a^{s(k)} \cdot b^{s(k)}$	Definición de potenciación

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 21

Sean $a,b,c \in \mathbb{N} / a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

Demostración por el PIC

$A = \{a,b,c \in \mathbb{N} / a^b \cdot a^c = a^{b+c} \}$

1. $c = 0$

$a^b \cdot a^0 = a^{b+0}$	Principio de sustitución
$a^b \cdot 1 = a^b$	Definición de potenciación y adición
$a^b = a^b$	Definición de multiplicación

2. Si $c = k \rightarrow a^b \cdot a^k = a^{b+k}$ — Hipótesis

Si $c = s(k) \rightarrow a^b \cdot a^{s(k)} = a^{b+s(k)}$	Tesis
$a^b \cdot (a^k \cdot a)$	Definición de potenciación
$(a^b \cdot a^k) \cdot a$	Asociativo multiplicativo
$a^{b+k} \ \cdot a$	Hipótesis
$a^{b+s(k)}$	Definición de potenciación

Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Teorema 22

Sean a,b,c $\in \mathbb{N}$ / $(a^b)^c = a^{bc}$

Demostración por el PIC

A = {a,b,c $\in \mathbb{N}$ / $(a^b)^c = a^{bc}$}

1. $c = 0$

$(a^b)^0 = a^{b \cdot 0}$	Principio de sustitución
$1 = a^0$	Definición de potenciación y multiplicación
$1 = 1$	Definición de potenciación

2. Si $c = k \rightarrow (a^b)^k = a^{b.k}$ Hipótesis

Si $c = k \rightarrow (a^b)^{s(k)} = a^{b.s(k)}$ Tesis

$(a^b)^k \cdot (a^b)$	Definición de potenciación
$a^{b.k} \cdot a^b$	Hipótesis
$a^{b.k+b}$	Teorema 21
$a^{b.s(k)}$	Definición de multiplicación

Por tanto, A = $\mathbb{N}$

Teorema 23

Si $0 < a < b$ y $x > 0$, entonces $a^x < b^x$

Demostración por el PIC

A {a,b,x $\in \mathbb{N}$ / $a^x < b^x$, $0 < a < b$ y $x > 0$}

1. $x = 1$

Si $a < b$

$a^1 < b^1$ Definición de potenciación

Si $x = 1$, entonces

$a^x < b^x$

2. Si $x = k \rightarrow a^k < b^k$ Hipótesis

Si $x = s(k) \rightarrow a^{s(k)} < b^{s(k)}$ Tesis

Sabemos que:

$a^x < b^x$ …… (1)

$a < b$ …….. (2)

Sumando las ecuaciones y (1) con (2)

$a^{x+1} < b^{x+1}$

$a^{s(k)} < b^{s(k)}$ Definición de potenciación

Por tanto, A = $\mathbb{N}$

Teorema 24

$a > 0 \Leftrightarrow a^x > 0$, $\forall a,x \in \mathbb{N}$

Demostración por el PIC

A {a,x $\in \mathbb{N}$ / $a > 0$, $a^x > 0$}

1. $x = 0$

$a^0 = 1 > 0$

$a^0 > 1$

$a^x > 0$

2. $x \in A \rightarrow s(x) \in A$
   $a^x > 0 \rightarrow a^{s(x)} > 0$
   $a > 0$
   $a^x \cdot a > 0$ Multiplicando miembro a miembro
   $a^{s(x)} > 0$ Definición de potenciación
   Por tanto, $A = \mathbb{N}$

Ordenamiento en el conjunto de los números naturales
Definición
$\forall a \in \mathbb{N}$, definimos la expresión $s^n(a)$ como:
$s^n(a) = s(s(s(s\ldots s(a)))\ldots)$
$s^n(a) = \underbrace{a + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{“n” veces}} = a + n$

Ejemplos:
1. $s^4(2)$
   $s(s(s(s(2)))) = s(s(s(2+1)) = s(s(2+1+1) = s(2+1+1+1) = 2+1+1+1+1 = 2 + 4 = 6$
2. $s^5(3)$
   $s(s(s(s(s(3))))) = s(s(s(s(3+1)))) = s(s(s(3+1+1))) = s(s(3+1+1+1)) = s(3+1+1+1+1) = 3+1+1+1+1+1 = 3 + 5 = 8$
3. $s^3(0)$
   $s(s(s(0))) = s(s(0+1)) = s(0+1+1) = 0+1+1+1 = 0 + 3 = 3$

Definición
i. Se dice que a es mayor que b, y se denota $a > b$, si existe un único elemento $x \in \mathbb{N}-\{0\}$, tal que $a = b + x$, o sea:
   $a > b$, si $\exists! x \in \mathbb{N} - \{0\} / a = b + x$
   $a > b$, si $\exists! x \in \mathbb{N} - \{0\} / a = s^x(b)$
   Ejemplo
   $7 > 4$, si $\exists!\, 3 \in \mathbb{N} \wedge 3 \neq 0 / 7 = 4 + 3$
ii. Se dice que a es menor que b, y se denota $a < b$, si existe un único elemento $x \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que $b = a + x$
   $a < b$, si $\exists! x \in \mathbb{N} - \{0\} / b = a + x$, ó
   $a < b$ si $\exists! x \in \mathbb{N} - \{0\} / b = s^x(a)$
   Ejemplo
   a. $4 < 6$ si $\exists!\, 2 \in \mathbb{N} \wedge 2 \neq 0 / 6 = s^2(4)= s(s(4)= s(4+1) = 4+1+1 = 4+2$
   b. $4 < 6$ si $\exists!\, 2 \in \mathbb{N} \wedge 2 \neq 0 / 6 = 4+2$
iii. Se dice que *x* es menor o igual que *y*, el cual se denota $x \leq y$, si $x < y$ ó $x = y$

Teorema 25
La relación menor es una relación transitiva. O sea:
Si $a < b \wedge b < c$ entonces $a < c$
Demostración
Si $a < b$ entonces $a = b + n$, $n \in \mathbb{N}$……. (1)
Si $b < c$ entonces $b = c + m$, $m \in \mathbb{N}$…… (2)

Horizonte de la Ciencia 9 (16) ene-jun 2019 FE/UNCP. ISSN (Impreso): 2304-4330/ ISSN (En Línea): 2413-936X
Antezana, R. Demostración de teoremas de números naturales... 55-74

Sumando las ecuaciones (1) con (2), tenemos
$a + b = b + c + (n + m)$
$a = c + (n + m)$ Teorema 06
Pero $n + m = z \in \mathbb{N}$. Entonces
$a = c + z$
Por definición de ordenación
$a < c, \exists!\ z \in \mathbb{N} \wedge z \neq 0$

Teorema 26
La relación menor o igual es una relación de orden, es decir:

i. Reflexiva:
$\forall x \in \mathbb{N},\ x \leq x$
Demostración
$x = x$
Por definición de ordenación (iii)
$x \leq x$

ii. Antisimétrica
Si $x \leq y \wedge y \leq x$ entonces $x = y$
Demostración
$x \leq y \wedge y \leq x$
Por definición de ordenación
$x \leq y, \exists!\ a \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0 \ /\ y = x + a$...... (1)
$y \leq x, \exists!\ b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0 \ /\ x = y + b$...... (2)
Sumando 1 con 2
$(x + y) = (x + y) + (a + b)$
$0 = a + b$ Teorema 06
La suma de a con b, nos permite indicar que: $a = b = 0$
Reemplazando en la ecuación (1), tenemos
$x = y$

iii. Transitiva
Si $x \leq y \wedge y \leq z$ entonces $x \leq z$
Demostración
$x \leq y, \exists!\ a \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0 \ /\ y = x + a$...... (1)
$y \leq z, \exists!\ b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0 \ /\ z = y + b$...... (2)
Sumando las ecuaciones (1) con (2)
$y + z = x + a + y + b$
$z = x + (a + b)$ Teorema 06
Pero si $a + b = w \in \mathbb{N}$, entonces
$z = x + w,\ w \in \mathbb{N}$
$x \leq z$ Definición de ordenación

Teorema 27
No existe ningún natural k, tal que $a < k < s(k)$
Demostración por el absurdo

Supongamos que si $\exists k \in \mathbb{N} \wedge a < k < s(k)$ entonces $\exists m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, siempre que:
Si $a < k$, entonces $a + m = k$…………(1)
Además $\exists n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0$, con la condición:
Si $k < s(a)$, entonces $k + n = s(a)$…….(2)
Sumando las ecuaciones (1) con (2)
$(a + m) + (k + n) = k + s(a)$
$a + (m + n) + k = k + s(a)$ Asociativa aditiva
$a + (m + n) = s(a)$ Teorema 06
$a + (m + n) = a + 1$ Teorema 05 (a) aditivo
$m + n = 1$ Teorema 06
De aquí tenemos dos opciones
i. $m = 0$ y $n = 1$
ii. $m = 1$ y $n = 0$
Apreciamos que tanto (i) como (ii), se contradicen el hecho de que $m \neq 0 \wedge n \neq 0$
Por tanto: $k \notin (a < k < s(k))$

Conclusiones

El proceso de axiomatización como actividad contribuye didácticamente para demostrar los teoremas o propiedades de los números naturales, bajo el razonamiento deductivo

La mayoría de las demostraciones de los teoremas en el conjunto de los números naturales, planteados por Peano, son resueltas con el apoyo del Principio de Inducción Completa (PIC) o llamado también axioma de inducción.

Según Peano y sus antecesores, la construcción de los números o teorías podemos elaborar a partir de los conceptos básicos, sustanciales, llegando a las definiciones, axiomas y teoremas, teniendo en cuenta sus propiedades de consistencia, independencia y completitud.

Referencias bibliográficas

Contreras, F. A. (2017). La axiomática. *Horizonte de la ciencia*, 7 (12), 111–121.

Gómez, J. A. (2010). *Sistemas axiomáticos*. Recuperado http://contraelmetodo.blogspot.com/210/11/sistema-axiomaticos.html

Bedoya, L. (2003). *Peano, Lawvere, Peirce: Tres axiomatizaciones de los números naturales*. Tesis. Universidad de Tolima Facultad y Ciencias. Ibagué

Geiss, C. y Barrios, F. (2005). *Algebra Superior II. Algunas propiedades de los números naturales.*

Rojo, A. (1986). *Álgebra*. Lima: Ateneo

Suger, E., Morales, B. y Pinot, L. (1971). *Introducción a la Matemática Moderna*. México: LIMUSA-WILEY S.A.