# Historias de Matemáticas

# Enseñando Relatividad Especial gráficamente

# Teaching Special Relativity graphically

Daniel de la Fuente Benito, José Antonio Sánchez Pelegrín
y Alfonso Zamora Saiz

Revista de Investigación

Volumen X, Número 1, pp. 073–082, ISSN 2174-0410
Recepción: 29 Ene'20; Aceptación: 16 Mar'20

1 de abril de 2020

**Resumen**

En este trabajo presentamos una introducción a la Relatividad Especial sencilla y sin fórmulas, apta para ser explicada a un alumnado de Bachillerato. Gracias a nuestro planteamiento somos capaces de demostrar de manera gráfica fenómenos como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes.

**Palabras Clave:** Relatividad Especial, Geometría, Física, Bachillerato, Einstein.

**Abstract**

In this work we present a simple introduction of the Special Relativity theory without formulae, suitable for being explained to high school students. Using this framework we are able to prove graphically the time dilation and length contraction.

**Keywords:** Special Relativity, Geometry, Physics, High School, Einstein.

## 1. Introducción

Aunque ya ha pasado más de un siglo desde su descubrimiento en 1905, la teoría de la Relatividad sigue siendo inaccesible para la inmensa mayoría de la población, tachándose con frecuencia de ser extremadamente difícil e incomprensible. Los medios de comunicación suelen referirse a ella como una materia apta sólo para especialistas, haciendo hincapié en su complejidad. Influenciada por este tratamiento popular, su introducción y explicación en los sistemas educativos a nivel preuniversitario suele ser muy breve o inexistente. En muchas ocasiones esto es debido a las dificultades que encuentra el profesorado para explicar esta materia de manera asequible. No obstante, en el marco del sistema educativo español aparece en la asignatura de Física de 2º de Bachillerato (alumnos de 17 años) dentro del bloque de contenidos de la Física del siglo XX un apartado dedicado al estudio de la Relatividad Especial [RD 1105/2014]. De hecho, en nuestra experiencia docente encontramos que existe un extraordinario interés del alumnado por la Relatividad, notablemente superior al mostrado hacia otras ramas de la Física y las Matemáticas. Ello se debe tanto a la belleza de la teoría como al halo de misterio que envuelve siempre su explicación y comprensión.

Obviamente, que el tiempo no transcurra para todos igual o que distintos observadores pueden medir diferentes longitudes de un mismo objeto resulta extraño y no es fácil de asimilar, sobre todo cuando la experiencia nos grita a diario lo contrario. Pese a que los efectos relativistas no sean apreciables en nuestra vida cotidiana, existen y son de sumo interés en el funcionamiento de numerosos dispositivos modernos, como por ejemplo el GPS. De hecho, es precisamente esta ausencia de intuición lo que convierte a la teoría de la Relatividad en una herramienta excepcional para estimular y potenciar la capacidad de abstracción de cualquiera que se enfrente a ella por primera vez, permitiendo al alumnado familiarizarse con una geometría de gran relevancia distinta de la euclídea.

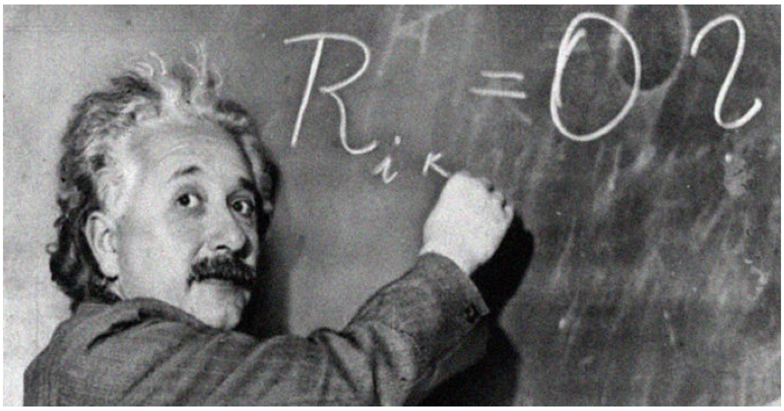

*Figura 1. Albert Einstein (1879-1955).*

*Figura 2. Henri Poincaré (1854-1912).*

Como es bien conocido, la teoría de la Relatividad Especial se atribuye a Albert Einstein, el primero en dar una explicación satisfactoria de los sorprendentes hechos experimentales medidos por Michelson y Morley dos décadas atrás. Lo cierto es que no fue el único que resolvió el enigma, pues Henri Poincaré llegó de manera independiente a las mismas conclusiones prácticamente al mismo tiempo (ver, por ejemplo, [Requena, 2005] para detalles históricos). Sin embargo, sí podemos afirmar que Einstein fue el indiscutible precursor de la teoría de la Relatividad General, la cual fue exclusivamente fruto de su intelecto, sin necesitar de ningún experimento físico. La formulación de esta teoría, a diferencia de la Relatividad Especial, es mucho más compleja ya que se requieren conocimientos de geometría avanzados.

En este artículo pretendemos mostrar que las bases de la Relatividad Especial, o al menos las ideas esenciales que la sustentan, pueden ser explicadas de una manera asequible tanto para el público general como para el alumnado de Bachillerato. Para simplificar en la mayor medida posible nuestra exposición apenas utilizaremos su intrincada formulación matemática, sino que nos basaremos en un tratamiento gráfico basado en dibujos. De hecho, pensamos que esta manera de introducir e interpretar las primeras consecuencias relativistas es más visual y didáctica que las usualmente utilizadas en los libros de texto (véase [Callahan, 2013], por ejemplo).

# 2. Jugando con la geometría de Minkowski

La Relatividad, más que una teoría, es un marco teórico sobre el que se asientan todas las teorías físicas. En particular, la Relatividad Especial describe cómo es la geometría del espacio-tiempo, esto es, el conjunto de sucesos espaciotemporales o eventos, en ausencia de gravedad, mientras que la Relatividad General es esencialmente una teoría de la Gravitación de la cual se derivan el resto de leyes físicas.

La hipótesis fundamental de la teoría de la Relatividad Especial es que el espaciotiempo tiene una geometría pseudoeuclídea, es decir, diferente de la geometría euclídea del espacio a la que estamos acostumbrados. Por tanto, para comprender las ideas principales de la Relatividad Especial hemos de conocer cómo es esta geometría. Las herramientas matemáticas necesarias para tal fin son bastante más básicas de lo que pueda parecer, máxime si nos restringimos al caso bidimensional (es decir, una dimensión espacial y otra temporal), como haremos en lo que resta de artículo.

Consideremos un evento $P$ del plano espaciotemporal $M$, también conocido como espacio de Minkowski. Los vectores en $P$ se clasifican en espaciales, temporales futuros, temporales pasados y luminosos, de acuerdo con la Figura 3. En dicha figura vemos las rectas que definen el llamado cono de luz, donde se encuentran los vectores luminosos y que representa la frontera entre vectores espaciales y temporales.

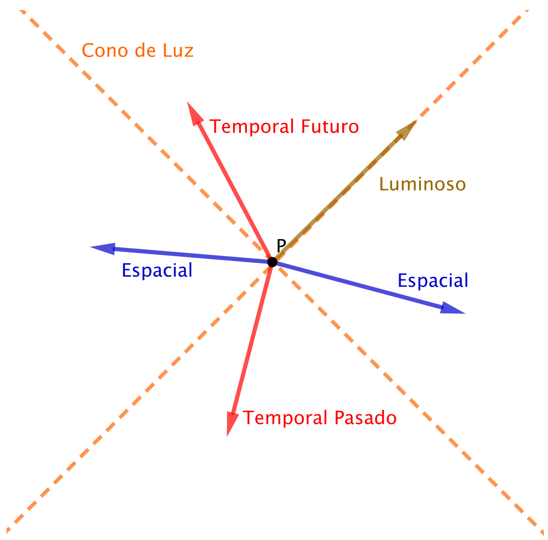


*Figura 3. Cono de luz y vectores espaciales, temporales y luminosos en P*

Sólo se requiere conocer las siguientes tres afirmaciones sobre la geometría minkowskiana: entender qué significan dos rectas perpendiculares, cuáles son las circunferencias y la nueva desigualdad triangular. Estos elementos definen la geometría llamada hiperbólica del espacio de Minkowski (para una introducción más detallada a esta geometría, consultar [Romero, 1998]).

a) Rectas perpendiculares: Dada una recta $r$ y un punto $P \in r$, la recta perpendicular a $r$ en $P$ (que denotamos por $s$ en la Figura 4) es la simétrica respecto de la diagonal que pasa por $P$. En particular, las rectas de pendiente 1 o -1 (como la línea discontinua, de pendiente 1) son perpendiculares a sí mismas.

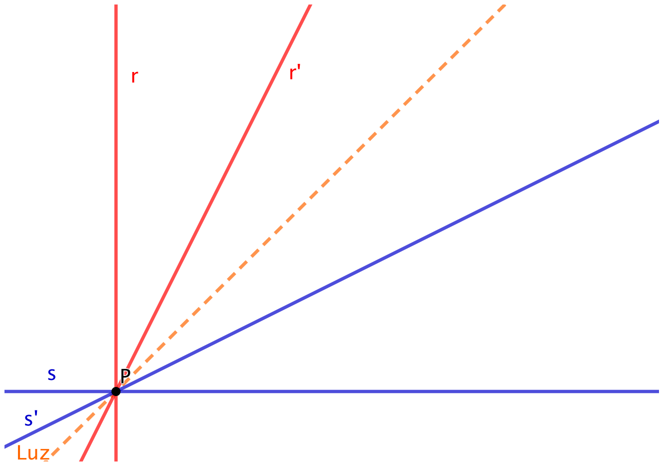


*Figura 4. Las rectas r y s son ortogonales en la geometría minkowskiana. Lo mismo sucede con las rectas r′ y s′. La diagonal, es decir, el cono de luz es perpendicular a sí misma.*

b) Circunferencias: Dado un punto $P \in M$, el conjunto de puntos que distan $R$ unidades de $P$ viene dado por el par de hipérbolas de la Figura 5(b).

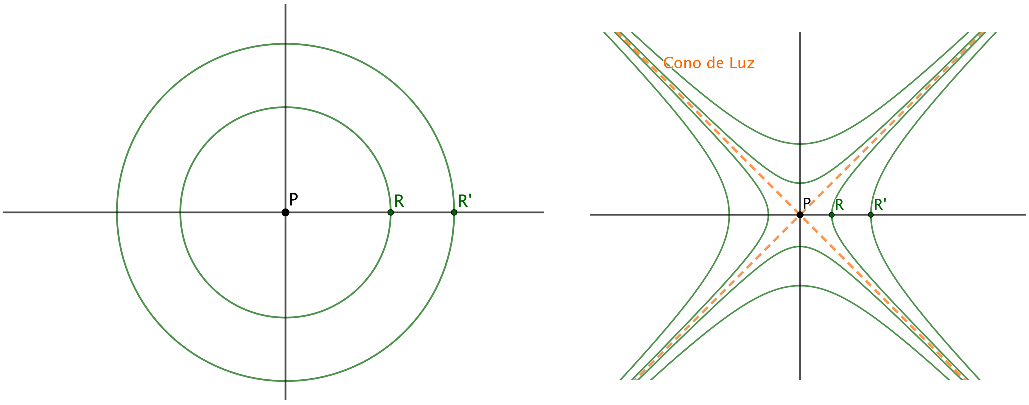


*Figura 5. (a) Circunferencias de radio R y R′ en el plano euclídeo usual. (b) En el plano de Minkowski, los puntos que distan R y R′ unidades de P son las hipérbolas de semieje transverso R y R′, respectivamente.*

c) Desigualdad triangular: Dado un triángulo como el de la Figura 6, en el que los tres lados son temporales (es decir, el triángulo se encuentra dentro del cono de luz en la Figura 3), se cumple la siguiente desigualdad triangular invertida:

$$\overline{AB} + \overline{BC} \leq \overline{AC}\,.$$

En realidad, la afirmación (c) no será utilizada explícitamente en este artículo. La mencionamos aquí para resaltar lo ”extraña” que resulta esta geometría no euclídea. Una aplicación directa de esta desigualdad prueba la conocida ”Paradoja de los gemelos”.

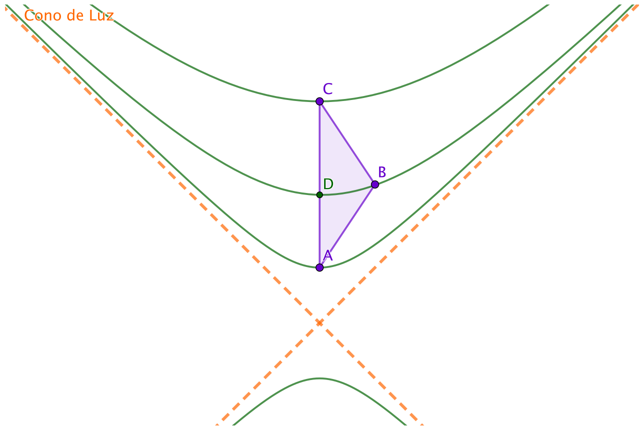


*Figura 6. Triángulo con todos sus lados temporales.*

## 3. Interpretaciones físicas

A continuación procedemos a dar una interpretación física a cada uno de los elementos geométricos del espacio de Minkowski. Un observador en M se puede representar como una curva temporal futura $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$, parametrizada por la longitud de este intervalo $I = [t_1, t_2]$, cuyo vector tangente es temporal futuro y unitario en todo punto de su trayectoria (ver Figura 7). La longitud de $\gamma$ entre dos eventos de su vida A y B representa el tiempo propio transcurrido entre ambos sucesos, es decir, el tiempo que mide su reloj (y no el de otro observador, como veremos). Así, si $A = \gamma(t_1)$ y $B = \gamma(t_2)$, el tiempo transcurrido para el observador $\gamma$ entre $A$ y $B$ es $t_2 - t_1$.

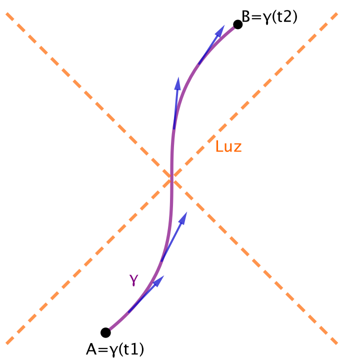


*Figura 7. La curva $\gamma$ representa un observador en el espacio de Minkowski.*

En particular, si la curva $\gamma$ es una recta, el observador se llamará inercial. Recordemos que un observador en ausencia de gravedad es inercial cuando no actúa ninguna fuerza sobre él, de modo que se desplaza con velocidad uniforme respecto a otro observador en reposo. Las trayectorias de los rayos de luz vienen representadas por rectas de pendiente 1 o -1, coincidentes con el cono de luz, y de ahí su nombre.

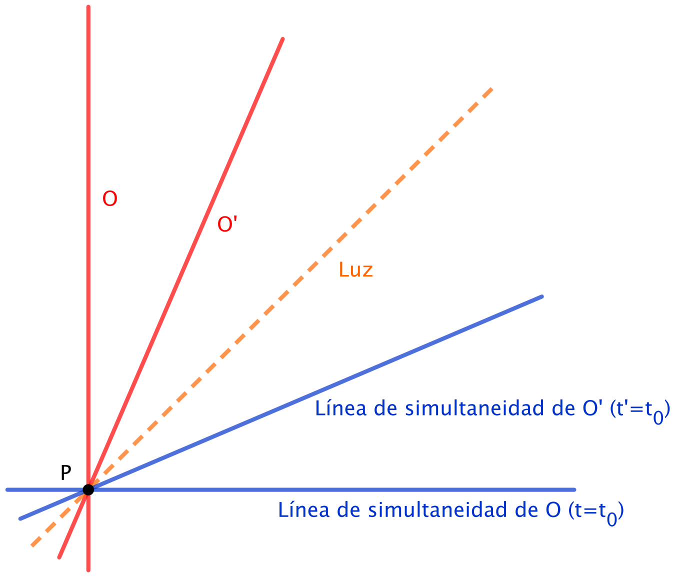


*Figura 8. Líneas de simultaneidad de los observadores O y O′.*

Consideremos un observador inercial representado por la recta $O = O(t)$. Supongamos un evento en la vida de este observador, $P = O(t_0)$. En la Figura 8 observamos la recta perpendicular a $O$ en $P$, que representa el conjunto de eventos simultáneos con $P$ para $O$, es el llamado espacio (o línea) de simultaneidad con $P$ para $O$. Esta recta representa el "espacio físico" que $O$ observa en el instante en que su reloj marca $t = t_0$. Sobre este espacio, el observador $O$ mide longitudes de objetos (en dimensiones superiores mide áreas o volúmenes). De esta manera, el espacio ya no es absoluto (es decir, igual para todos los observadores), sino que depende del observador y del evento de su vida que estemos considerando. Del mismo modo observamos la recta perpendicular a $O'$ en $P$, que es la línea de simultaneidad con $P$ para $O'$ y representa el espacio físico que $O'$ observa en el instante en que su reloj marca $t = t_0$.

Supongamos que dos observadores (inerciales, por simplicidad) $O$ y $O'$ coinciden en un evento $P$ en cierto instante de sus vidas. El ángulo hiperbólico $\alpha$ entre ambas rectas se denomina rapidez de $O'$ respecto de $O$ y su tangente hiperbólica $\tanh \alpha$ es la velocidad que $O$ mide de $O'$. La velocidad de $O'$ medida por $O$ será mayor conforme su trayectoria se acerca más al cono de luz, ya que el ángulo hiperbólico aumentará hasta hacerse infinito en la dirección del mismo. De aquí se puede deducir una de las afirmaciones más importantes de la Relatividad: la velocidad de la luz en el vacío es constante para cualquier observador (e igual a 300.000 km/s). Notemos también que la rapidez de la luz es infinita para todos los observadores.

## 4. La dilatación del tiempo gráficamente

Una de las primeras consecuencias "anti-intuitivas" de la Relatividad Especial está relacionada con la dilatación temporal, expuesta por ejemplo en [Merino y Merino, 2005], y que ahora pasamos a mostrar gráficamente sin su formulación matemática. Sean $O$ y $O'$ dos observadores inerciales, moviéndose con velocidad relativa $v$, que en un determinado instante de sus vidas se encuentran en el evento $P \in M$. Supongamos que sincronizan sus relojes a un mismo tiempo $t_0$ en el suceso $P$, por tanto, $O(t_0) = O'(t_0) = P$. Nos preguntamos, ¿qué marcará el reloj de $O'$ cuando para $O$ haya transcurrido un tiempo $T$? Con más precisión, ¿qué verá $O$ que marca el reloj de $O'$ cuando el reloj de $O$ marca $T$?

Para analizarlo, observemos primero la Figura 9 (a). Llamemos $A = O(T)$ al evento de la vida de $O$ cuando para él ha transcurrido un intervalo de tiempo $T$. Trazando la línea de simultaneidad de $O$ en $A$ (es decir, la recta simétrica a la recta $O$ respecto a la diagonal que pasa por el evento $A$; en este caso es la perpendicular usual euclídea) obtenemos que $A'$ es el evento simultáneo con $A$ para el observador $O$, y será de la forma $A' = O'(T')$ para cierto tiempo $T'$. ¿Será $T = T'$ tal y como nos grita la intuición? La respuesta es negativa. De hecho, teniendo en cuenta cómo son las circunferencias en el espacio de Minkowski (como vimos en la Figura 5 (b)) se tiene que $T > T'$. Como vemos en la Figura 9 (a), la circunferencia del espacio de Minkowski que pasa por A está más alejada del origen que la que pasa por $A'$. Es decir, el segmento $\overline{PA}$ visto con "gafas minkowskianas" es más largo que $\overline{PA'}$.

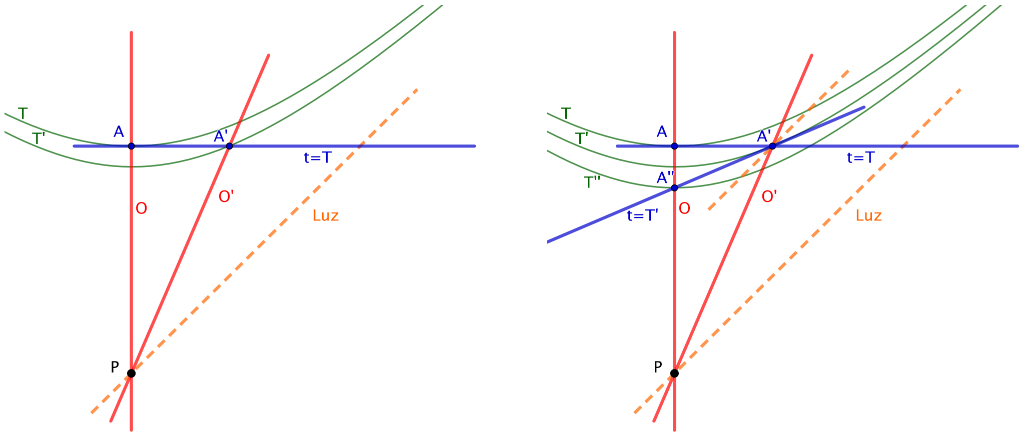


*Figura 9. Dilatación del tiempo. Observamos que se verifica* $\overline{PA} = T > \overline{PA'} = T' > \overline{PA''} = T''$.

Por tanto, $O$ *percibe* que su reloj se adelanta respecto al de $O'$, o que el tiempo para $O'$ se *dilata*. Ahora bien, puesto que ambos observadores son inerciales (y por tanto, físicamente equivalentes), $O'$ tiene perfecto derecho para afirmar que es él quien está quieto y que es $O$ el que se mueve. Aplicando los mismos argumentos que antes, concluiríamos que $O'$ percibe que es su reloj el que se adelanta respecto al de $O$. ¿Es esto posible o es una contradicción?

Fijémonos en el dibujo de la Figura 9 (b). Trazando la línea de simultaneidad de $O'$ en $A'$ obtenemos que el suceso simultáneo para el observador $O'$ con el evento $A'$ es, sin embargo, $A'' = O(T'')$ para cierto valor de $T''$ que, como observamos gracias a las circunferencias del espacio minkowskiano de la Figura 9 (b), es menor que T (y también menor que $T'$). Es por ello que el segmento $\overline{PA'}$ también es más largo que $\overline{PA''}$. Por tanto, no hay contradicción, pues *cada observador mide que el reloj del otro se atrasa*.

## 5. La contracción de las longitudes gráficamente

Un argumento similar al anterior conduce a otro de los fenómenos paradigmáticos de la Relatividad: la contracción de las longitudes.

Consideremos una regla cuya longitud medida por el observador $O$ (en reposo respecto a la regla, ver Figura 10) vale $L$, que es la longitud del segmento $\overline{AB}$ situado sobre la línea de simultaneidad de $O$ en $A$. La cuestión es: ¿cuánto mide la regla para los observadores $O'$, que se mueven con una cierta velocidad $v$ respecto a la regla y los observadores $O$?

Para saber cuánto mide la regla para el observador $O'$ debemos trazar la línea de simultaneidad del observador $O'$ en el suceso $A = A'$, obteniendo que el evento simultáneo a $A'$ para

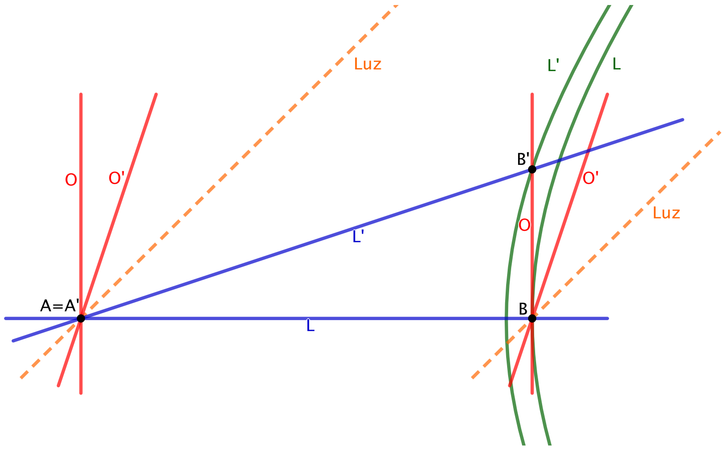


*Figura 10. La longitud de la regla medida en reposo es $L = \overline{AB}$, mayor que la medida por un observador en movimiento $O'$, que vale $L' = \overline{A'B'}$.*

$O'$ es $B'$. Una forma de entender esto es recordar que la regla siempre está en reposo respecto al observador $O$, por lo que siempre medirá $L$ para este observador conforme transcurra su tiempo propio. Sin embargo, la longitud de la regla para el observador $O'$, que mide sobre la citada línea de simultaneidad, es $L'$, la distancia de $A'$ a $B'$. Vemos que $L'$ es menor que $L$ sin más que tener en cuenta cómo son las circunferencias minkowskianas, como se observa en la Figura 10. Por tanto, las longitudes de objetos medidas en movimiento relativo son menores que las realizadas en reposo.

## 6. Comentarios finales

En este artículo hemos demostrado los dos fenómenos relativistas más conocidos, teniendo sólo en cuenta la hipótesis fundamental de la teoría de la Relatividad Especial, es decir, usando sólo que la geometría del espaciotiempo es pseudoeuclídea, en base a tres postulados. De hecho, con argumentos puramente geométricos que pueden ser representados gráficamente de manera sencilla es posible demostrar prácticamente cualquier otra paradoja relativista [Boya y Santander, 2005] y [De la Fuente y Salamanca, 2017].

Debido a que las herramientas matemáticas utilizadas son aptas para un alumnado de Bachillerato defendemos por tanto esta manera esquemática de introducir y explicar la Relatividad Especial no sólo por su sencillez, sino por ser mucho más precisa y próxima a las ideas esenciales que sustentan la teoría.

## Agradecimientos

Los dos primeros autores están parcialmente financiados por el proyecto de investigación "Semi-Riemannian Geometry and variational problems in Mathematical Physics" (Referencia MINECO y ERDF MTM-2016- 78807-C2-1-P).

# Referencias


[1] BOYA, L.J., SANTANDER, M, *Paradojas relativistas*, Revista Española de Física, 19, pp. 17–24, 2005.

[2] CALLAHAN, J.J., *The geometry of spacetime: an introduction to special and general relativity*, Springer Science & Business Media, 2013.

[3] DE LA FUENTE, D., SALAMANCA, J.J., *El movimiento rígido en Relatividad: paradojas de Bell y Ehrenfest*, Revista Española de Física, 31, nº1., 2017.

[4] MERINO, F., MERINO, A., *En recuerdo de Einstein*, Suma, nº50, pp.15–18, 2005.

[5] *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, 3 de enero de 2015.

[6] REQUENA, A., *Einstein y las Matemáticas*, Suma, nº50, pp.7–14, 2005.

[7] ROMERO, A., *Geometría y Relatividad: una introducción a la geometría básica de la teoría*, Epsilon, nº41, pp. 305–320, 1998.


**Sobre los autores:**


*Nombre:* Daniel de la Fuente Benito
*Correo electrónico:* fuentedaniel@uniovi.es
*Institución:* Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, 33003, Gijón, España.

*Nombre:* José Antonio Sánchez Pelegrín
*Correo electrónico:* jpelegrin@ugr.es
*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad CEU San Pablo, Julián Romea 23, 28003, Madrid, España.

*Nombre:* Alfonso Zamora Saiz
*Correo electrónico:* alfonso.zamorasaiz@ceu.es
*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad CEU San Pablo, Julián Romea 23, 28003, Madrid, España.