Historias de Matemáticas

El largo Viaje de “Sobre la División de las Figuras” (Un libro perdido de Euclides)

The long journey of the “On the Division of Figures” (A lost book of Euclid)

Juan Tarrés Freixenet

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen X, Número 1, pp. 083–094, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Sep’19; Aceptación: 25 Mar’20

1 de abril de 2020

Resumen

Euclides escribió un tratado de agrimensura titulado *Sobre la División de las Figuras* que se perdió en las múltiples vicisitudes por las que atravesó la Biblioteca de Alejandría. Tenemos noticia de él gracias a la obra de Proclo (siglo V d.C.). Se ha podido restaurar tras un largo viaje del mismo a través de algunos manuscritos árabes, textos de geometría de los siglos XII y XIII y traducciones al latín y otras lenguas a partir del árabe, de los siglos XVI a XIX. Esto permitió a Raymond Clare Archibald publicar una reconstrucción del citado texto en 1915.

Palabras Clave: Euclides, Agrimensura, Geometría.

Abstract

Euclid wrote a land surveying treatise entitled On the Division of Figures that was lost in the many vicissitudes through which the Library of Alexandria crossed. We have news of this work thanks to Proclo (Vth century d.C.). It has been possible to be recovered after a long journey through some Arabic manuscripts, geometry texts from the 12th and 13th centuries and translations into Latin and other languages from Arabic, from the 16th to the 19th centuries. This allowed Raymond Clare Archibald to publish a reconstruction of the cited text in 1915.

Keywords: Euclid, Land Surveying, Geometry.

1. Introducción

Con el nacimiento en la antigüedad de la agricultura surgió un nuevo concepto de utilización del suelo desconocido hasta entonces. Como consecuencia de ello, aparecieron los primeros conflictos acerca de la propiedad del mismo, lo que obligó a una parcelación adecuada del terreno conforme a una distribución previamente acordada. Para hacer frente a esta situación, los responsables de las diferentes sociedades debieron crear un nuevo tipo de funcionarios que fueran capaces de delimitar las tierras con precisión, tanto para realizar asignaciones como para mediar en los diferentes conflictos o restituir el terreno a sus usuarios tras alguna catástrofe natural cuyo máximo exponente eran las crecidas de los ríos.

Este fenómeno, común en todas las culturas, tuvo un modelo muy claro en el antiguo Egipto, cuya economía dependía de las crecidas periódicas del Nilo que depositaban un limo fértil en sus riberas. Así, los primeros faraones crearon la figura de los agrimensores, que ellos llamaron tensadores de cuerdas, expertos en la medición y delimitación de las tierras y que debían ejercitar su trabajo mediante la aplicación de depuradas técnicas geométricas. Se ocupaban también de la división del terreno tanto en los casos de algún trato comercial entre propietarios como en el caso de las herencias entre sus descendientes o en asignaciones concretas de los faraones a sus súbditos.

Estos funcionarios usaban sus propios métodos de trabajo, que plasmaban en manuales prácticos de trazado de figuras geométricas. Estos manuales se fueron perfeccionando con el paso del tiempo y de ellos surgió, primero en Egipto y más tarde en Grecia, una nueva ciencia: la Geometría. Así lo expresa Herodoto (siglo V a.C.) en sus Historias (Libro II, nº 109):

> *Sesostris … dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes … Si el río se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar por medio de una medición la extensión exacta de la pérdida … A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la Geometría en Egipto en primer lugar, de donde pasó más tarde a Grecia.*

Si bien la geometría alcanzó altos grados de abstracción y generalidad, especialmente en la Grecia antigua, la actividad de los agrimensores seguía siendo indispensable y algunos autores escribieron tratados que, si bien podían ser usados por esos funcionarios, tenían una fuerte carga teórica. Tal es el caso de un libro escrito por Euclides, que tituló Sobre la División de las Figuras, dedicado en exclusiva a la partición de diferentes figuras geométricas y que se perdió a causa de las múltiples vicisitudes que sufrió la Biblioteca de Alejandría durante el ocaso de la civilización griega. Aunque no disponemos del original griego, éste se ha podido restaurar tras un largo viaje del mismo a través de algunos manuscritos árabes, textos de geometría de los siglos XII y XIII y traducciones al latín y otras lenguas a partir del árabe de los siglos XVI y XIX. Finalmente, en 1915 Raymond Clare Archibald publicó una reconstrucción del texto de Euclides a partir de los diferentes Manuscritos y ediciones de los siglos que hemos citado.

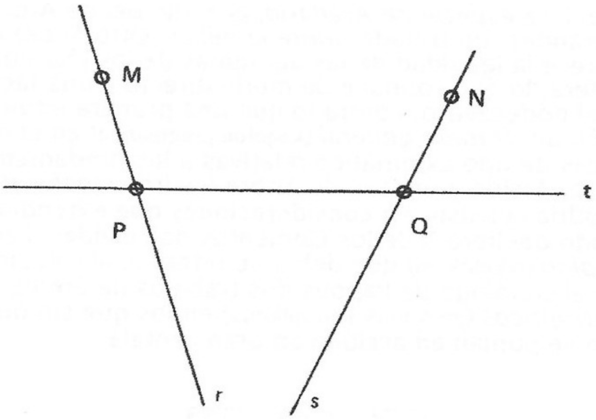
2. Los tiempos de la Grecia antigua

1. Tenemos noticias de *Sobre la División de las Figuras* gracias al *Comentario al Libro I de los Elementos*, de **Proclo** (siglo V d.C.) que cita, sin añadir ningún comentario, la existencia de la obra *Peri Diaipeson Biblion* (Sobre la División de las Figuras) que atribuye a **Euclides**. Un poco más adelante, al hablar de la definición de figura y de la divisibilidad de las mismas en otras diferentes, añade:

> *Puesto que el círculo se puede dividir en partes distintas al mismo en cuanto a concepto, también se puede hacer lo mismo con las figuras lineales; esta es, en efecto, la intención del autor de los Elementos en sus Divisiones, donde divide figuras dadas en unos casos en figuras semejantes y en otros, en figuras no semejantes.*

2. Una de las pocas obras que se ha conservado de Apolonio de Perga, además de las famosas *Cónicas*, es la titulada *Sobre la sección de la razón*, que fue conservada en árabe y traducida al latín en 1706 por Halley. En ella, el problema principal es el siguiente:

> *Dadas dos rectas coplanarias y dos puntos en ellas, trazar desde un tercer punto del plano una recta transversal que corte a las anteriores en segmentos que medidos sobre ellas formen una proporción dada.*



Es decir, dada una razón α, trazar desde A una recta t de manera que:

$$\frac{MP}{NQ} = \alpha$$

Si las dos rectas son convergentes el problema es una cuestión de división de un triángulo mediante una recta transversal que pase por un punto situado en algún lugar del plano de manera que se cumpla el resultado del enunciado anterior.

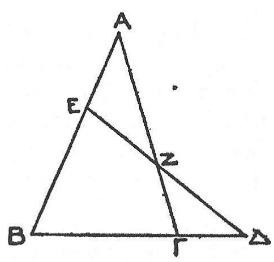
Parecido a éste es el que aparece en la obra *Sobre la sección del área*, desgraciadamente perdida, pero del que conocemos esta proposición:

> *Dadas dos rectas coplanarias y dos puntos en ellas, trazar desde un tercer punto del plano una recta transversal que corte a las anteriores en segmentos que medidos sobre ellas desde lo puntos respectivos determinen un rectángulo igual a un rectángulo dado.*

En este caso sería $MP \cdot NQ = \alpha$.

Si las dos rectas se cortan en un punto y las distancias de los segmentos respectivos se toman desde este punto, esta proposición es prácticamente equivalente a las proposiciones 19, 20, 26 o 27 del texto restaurado de Euclides. Por ejemplo.

Proposición 20. *Cortar una cierta fracción de un triángulo mediante una línea trazada de un punto dado en el interior del triángulo.*



3. En el siglo I d.C., **Herón de Alejandría** estudió la división de figuras planas y sólidas en el tercer libro de su *Métrica*. Pero al contrario del tratamiento de Euclides a estas cuestiones, las soluciones que da Herón son casi siempre aproximaciones prácticas. Por ejemplo, en la proposición siguiente, que aparece también en la reconstrucción de la obra de Euclides:

Proposición 2. *Dividir un triángulo en una razón dada mediante una línea paralela a la base.*

Euclides da una construcción general mientras que Herón considera que las longitudes de los lados del triángulo dado tienen un valor numérico concreto y a partir de aquí halla la distancia aproximada de los vértices a los puntos de los lados en que éstos cortan a la paralela a la base buscada y argumenta que lo hace así debido a que en un campo con una superficie irregular es difícil trazar una línea paralela a otra.

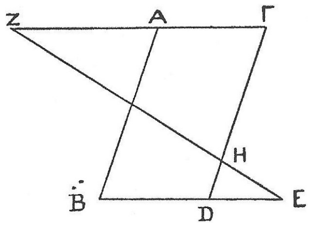
Sin embargo, en algunos casos da resultados teóricos generales como en la:

Proposición 10. *Dividir un triángulo en una razón dada mediante una línea recta trazada desde un punto situado en la prolongación de un lado.*

En la demostración de esta proposición, análoga a la Proposición 20 del libro de Euclides, utiliza el resultado de Apolonio de Perga que hemos visto antes, perteneciente al libro *Sobre la sección del área*.

4. Finalmente, **Pappus** (siglo IV d.C.) al describir los 171 teoremas del libro perdido de los *Porismas* de Euclides, da previamente 38 lemas, el último de los cuales está en relación con las cuestiones que estamos tratando aquí:

Lema 38. *Trazar una línea por un punto fijo E en la prolongación del lado BD del paralelogramo* $A\Gamma DB$ *de manera que el triángulo* $ZH\Gamma$ *sea igual al paralelogramo dado.*



En la demostración de la solución que se da a este problema se usa de nuevo la proposición de Apolonio que ya hemos visto en *Sobre la sección del área*.

Tracemos la recta EZ por E tal que el rectángulo de lados ΓZ y ΓH sea igual al que tiene como lados $A\Gamma$ y ΓD. Entonces, el triángulo $Z\Gamma H$ es igual al paralelogramo $AZDB$ y la recta EZ es la solución.

3. Dos manuscritos árabes

En el largo viaje del tratado de Euclides que nos ocupa tienen un papel importante dos manuscritos árabes que han sido de gran utilidad para la reconstrucción de la obra original. El primero de ellos fue descubierto por el sabio inglés **John Dee** (1527-1608) en una fecha anterior a 1563. Según John Dee contenía parte de la obra de Euclides pese a que estaba encabezado con el nombre de **Machometus Bagdadinus**, al que Dee describe como *geómetra del siglo X*. John Dee tradujo el manuscrito al latín y entregó la traducción a **F. Commandino**, quien lo publicó en forma de libro en 1570 atribuyendo a ambos la autoría. Posteriormente, James Gregory publicó una nueva edición impresa de esta obra en 1706.

Según todos los indicios, el original árabe no habría sido una traducción directa de la obra de Euclides ni, probablemente, una adaptación de la misma; contiene errores y expresiones no matemáticas y, además, no incluye las proposiciones referentes a la división del círculo a las que alude Proclo, lo que confirma la afirmación de Dee de que dicho manuscrito contenía solamente un fragmento del trabajo original de Euclides.

A mediados del siglo XIX, **Woepcke** (1826-1864), sabio geómetra y arabista alemán, halló otro manuscrito árabe que contenía dos fragmentos de las obras desaparecidas de Euclides en la Biblioteca Nacional de París. En 1851 publicó un estudio comparado de este manuscrito y el de John Dee, en una versión bilingüe en árabe y francés en el *Journal Asiatique* (sept.-oct. 1851, pp. 217-247) con el título: *Notice sur des traductions árabes de deux ouvrages perdus d'Euclide*. La diferencia principal que existe entre el manuscrito de Dee y el de Woepcke es que el primero es más teórico y contiene principios generales sobre los problemas estudiados mientras que el segundo presenta casos particulares y concretos que se pueden agrupar bajo aquellos principios.

Está explícitamente atribuido a Euclides en el propio manuscrito y corresponde a la descripción que da Proclo del mismo. De manera general, las divisiones lo son en figuras del mismo tipo que las originales, como por ejemplo, de triángulos en triángulos; pero hay también divisiones en figuras no semejantes, como por ejemplo, la división de un triángulo mediante una línea recta paralela a la base. Las proposiciones perdidas sobre la división de un círculo están también aquí: *dividir en dos partes iguales una figura dada limitada por un arco de circunferencia y dos líneas rectas que forman un ángulo dado o bien dibujar en un círculo dado dos líneas rectas paralelas entre sí que determinan una cierta parte del círculo.*

Por desgracia, sólo están las demostraciones de cuatro proposiciones (incluyendo las dos anteriores) de las treinta y seis totales puesto que el traductor las consideró demasiado sencillas y las omitió. Las cuatro demostraciones son elegantes y dependen solamente de las proposiciones de los *Elementos* o son simples consecuencias inmediatas de las mismas.

4. Otros tres autores árabes

Se tienen noticias de otros tres tratados árabes sobre la cuestión que nos atañe:

1. **Thabit ibn Qurra** (826-901) tradujo partes de los trabajos de Arquímedes y Apolonio, revisó la traducción de **Ishâq** de los Elementos así como de los *Datos* de Euclides y, finalmente, revisó el libro *Sobre la división de las figuras*, traducido por un autor anónimo.

2. **Abû Muhammad el-Hasan** (fallecido en 901) fue un destacado geómetra que escibió *Un comentario sobre las partes difíciles de las obras de Euclides* y *El libro de la proporción*. Según algunos autores, como **H. Sutter**, publicó también otro comentario de *Sobre Divisiones de Figuras* de Euclides.

3. **Abû'l Wefâ** (940-997), uno de los más grandes matemáticos y astrónomos árabes pasó sus últimos años en Bagdad. Es autor de unas *Lecciones de Construcciones Geométricas*. Los capítulos VII, VIII y IX de la versión persa de este tratado, que ha llegado hasta nosotros tras no pocas vicisitudes, se titulaban *Sobre la división de triángulos*, *Sobre la división de cuadriláteros* y *Sobre la división de círculos*, respectivamente. Las tres proposiciones del capítulo IX son prácticamente idénticas a las proposiciones 28 y 29 de la versión de **Woepcke** del libro de Euclides. En el capítulo VIII hay 24 proposiciones inspiradas o incluso idénticas a otras que aparecen en la obra reconstruida de Euclides. Asimismo, en el capítulo XII aparecen nueve proposiciones referidas a la división de una superficie esférica en triángulos equiangulares y equiláteros, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos.

5. El *Liber Embadorum* de Abraham bar Hiyyá

Abraham bar Hiyyá (1065-1136), llamado también **Savasorda**, forma latinizada que deriva del término árabe que designa el cargo que ocupó como jefe de la guardia (sahib al-surta). También se le conoce por el sobrenombre de **Nasí**, **Príncipe**. Se desconoce el lugar de su nacimiento, aunque se sabe que vivió mucho tiempo en Barcelona y también que pasó largas temporadas en Provenza. Fue un ilustre filósofo y científico, campo este último en el que cultivó las matemáticas y la astronomía.

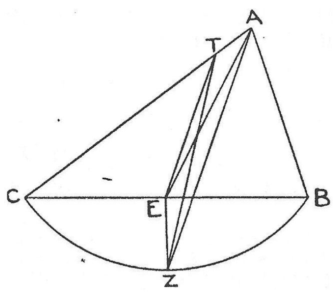
Publicó un libro de geometría, escrito en hebreo que fue traducido al latín por **Platón de Tívoli**, finalizado en 1116, títulado *Liber embadorum*, o libro de las medidas. Es un libro de geometría para los agrimensores que pasó a ser una obra fundamental en el mundo cristiano, tanto por su carácter práctico como por su contenido teórico. Es una de las fuentes del *Liber abaci* y la *Practica geometriae*, de **Leonardo de Pisa** (Fibonacci).

Aunque la versión latina del libro quedó concluida en 1116, no fue publicada en versión impresa hasta 1902 a partir de un manuscrito del siglo XV. Las páginas 130 a 159 de esta edición contienen un *capitulum tertium in arearum divisionum explanatione* con texto latino y alemán. Por otra parte, en 1931, J. Millás Vallicrosa realizó una traducción al catalán de la obra basándose en un texto en hebreo de 1912-13, publicada en la colección de la Biblioteca Hebraico-Catalana.

El Capítulo III del libro tiene un título sumamente explícito: *Sobre la explicación de lo que se refiere a la división de las áreas*. El capítulo trata de la división de los terrenos y se inspira claramente en el libro de Euclides *Sobre la División de las Figuras*. Contiene proposiciones coincidentes con las del libro de Euclides que se recogen también en los libros de **Fibonacci**.

En particular, figura la proposición siguiente, citada por Proclo, del libro de Euclides y que no figura en la versión de John Dee y que si está contenida tanto en la *Practica Geometriae* de Fibonacci como en la versión de Woepcke en una versión más general:

> *Si se tiene una figura, un lado de la cual es curvo y los otros dos rectos, la queremos dividir en dos partes iguales,*



Demuestra esta proposición tanto en el caso simétrico como en el no simétrico. Las demostraciones que da son idénticas a las que podemos encontrar tanto en el libro de Fibonacci como en el de Woepcke.

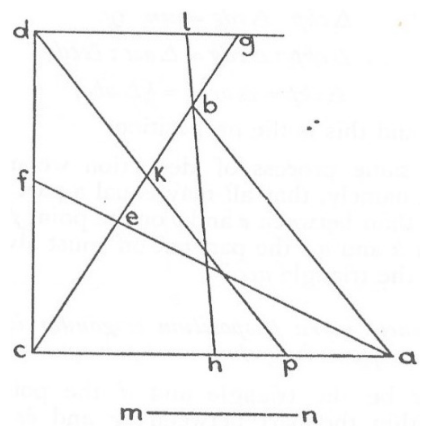
6. Jordano Nemorario y la división de las figuras

Otro autor que trató la cuestión de la división de las figuras es Jordano Nemorario, fallecido el 1237 y del que sabemos muy poco de su vida. Escribió varios tratados de matemáticas, entre los que destaca una *Geometria vel De Triangulis*, que consta de cuatro libros. El segundo de ellos está dedicado casi en su totalidad a problemas sobre divisiones: las proposiciones 1 a 7 tratan de la división de líneas, mientras que las que llevan los números 8, 13, 17, 18 y 19 estudian la división de figuras planas. La mayoría de estas últimas aparecen también en el libro de Woepcke y también en la *Practica Geometrie* de **Fibonacci**, si bien las demostraciones que da difieren de las de estos dos últimos autores.

Así, por ejemplo, la proposición 13 de Jordano, que corresponde a la 26 en los libros de Woepcke y Fibonacci, los enunciados coinciden, pero las demostraciones son completamente diferentes:

Proposición 13. *Dados un triángulo y un punto exterior al mismo, trazar una línea por este punto que divida el triángulo en dos partes iguales.*

Demostración de Jordano. Sean abc el triángulo y d el punto exterior, comprendido entre las medianas prolongadas aef y hbl.



Trazamos la recta dg, paralela al lado ca, que corta la prolongación de cb en g. Unimos cd y determinamos mn de manera que sea

$$\frac{\Delta cdg}{\Delta aec} = \frac{cg}{mn}$$

y observamos que $\Delta aec = \frac{1}{2}\Delta abc$. Ahora, dividimos cg por el punto k de manera que:

$$\frac{gk}{kc} = \frac{kc}{mn}$$

Prolongamos dk hasta cortar ca en p. Afirmamos que dp divide el triángulo abc en dos partes iguales:

En efecto, como el triángulo ckp es semejante al kdg, por la proposición VI.4 de los *Elementos* de Euclides y, en virtud de la proposición I.15 y el corolario VI.17 de los citados *Elementos*, se tiene

$$\frac{\Delta ckp}{\Delta kdg} = \frac{mn}{kg}$$

pero:

$$\frac{\Delta kdg}{\Delta cdg} = \frac{kg}{cg}$$

por lo que:

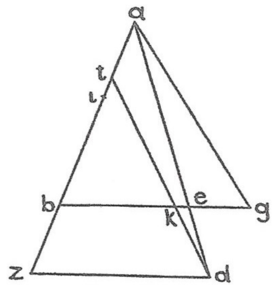
$$\frac{\Delta ckp}{\Delta cdg} = \frac{mn}{cg}$$

$$\frac{\Delta ckp}{\Delta cdg} = \frac{\Delta aec}{\Delta cdg}$$

y, en consecuencia:

$$\Delta ckp = \Delta aec = \frac{1}{2}\Delta abc$$

por V.9 de los *Elementos*, lo que prueba la proposición.



Demostración de Woepcke. Sean abg el triángulo y d el punto exterior. Unimos ad, que corta el lado bg en el punto e. Si $be = eg$, el problema está resuelto. Pero si $be \neq eg$ sea $be > eg$ y tracemos por d una línea paralela a bg, que corta la prolongación de ab en el punto z.

Como $be > \frac{1}{2}bg$, se tiene área$(ab.be) >$ área$(ab.bg)$ y como $zd > be$, también área$(ab.zd) >$ área$(ab.bg)$. Si i es un punto tal que:

$$\text{área}(ib.zd) = \text{área}(ab.bg)$$

se tiene entonces área$(ab.be) >$ área$(ib.zd)$ y también $\frac{zd}{be} = \frac{ba}{bi}$.

Pero: $\frac{zd}{be} = \frac{za}{ba}$ y así o bien $\frac{zd}{ba} = \frac{ai}{ib}$ o bien área$(zb.bi) <$ área$(ba.ai)$.

Aplicando un rectángulo igual al $zb.bi$ a la línea bi, pero que exceda en un cuadrado; es decir, a bi se aplica una línea tal que, al multiplicarla por sí misma y por bi, la suma sea igual a $zb.bi$. Sea ti el lado del cuadrado.

Trazamos ahora la recta tkd. Como:

$$\text{área}(zb.bi) + ti = \text{área}(bt.ti)$$

$$\frac{zb}{bt} = \frac{ti}{ib}; \quad \frac{zt}{bt} = \frac{bt}{bi}$$

Pero $\frac{zt}{bt} = \frac{zd}{bk}$ lo que conlleva que $\frac{zd}{bk} = \frac{bt}{bi}$ y área$(bt.ti) =$ área$(zd.bi)$. Y como área$(zd.bi) = \frac{1}{2}$ área(ab, bg) se cumple $\Delta tbk = \frac{1}{2}\Delta abg$.

Luego, el triángulo abg queda dividido en dos partes iguales por la línea tkd, trazada desde el punto d. Estas partes son el triángulo tbk y el cuadrilátero $tkga$. La proposición queda probada.

Digamos finalmente que la proposición 18 se refiere a encontrar el centro de gravedad de un triángulo, cuestión que se plantea como un problema de división:

Proposición 18. *Hallar un punto en un triángulo tal que, al unirlo con cada uno de sus puntos angulares, el triángulo queda dividido en tres partes iguales.*

7. El *De Practica Geometrie* de Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Aunque la obra más famosa de **Leonardo de Pisa**, conocido habitualmente como **Fibonacci** (ca. 1170 - ca. 1240) es el *Liber Abaci*, publicado en 1202, es autor de otras obras, entre las que queremos destacar *De Practica Geometrie*, de 1222, que es una recopilación de toda la geometría Griega y Árabe conocida hasta entonces. El propio título del libro indica la intención inicial de su autor, que no es otra que la de escribir un tratado de Geometría Práctica, término acuñado por **Hugo de San Víctor** (ca. 1096 - 1141) para denominar la geometría que usaban los agrimensores. Sin embargo, la obra traspasa con amplitud los intereses de estos artesanos y es un auténtico tratado de geometría teórica que permite su aplicación a las necesidades de los encargados de su aplicación a otros ámbitos.

Las fuentes que utilizó Fibonacci son muy variadas dada la amplitud de cuestiones tratadas en el mismo. Conocía los textos griegos a través de las traducciones árabes dado que viajó con frecuencia al norte de África desde su Pisa natal. Asimismo, pudo tener una influencia importante el *Liber Embadorum* de Abraham Bar Hiyyá, que ya hemos comentado, puesto que bastantes de las proposiciones de esta última obra aparecen de manera casi literal en el libro de Fibonacci. Por otra parte la mayoría de las proposiciones de la versión de Woepcke están recogidas también en el libro de Fibonacci si bien éste contiene las demostraciones de todas ellas, mientras que en la versión de Woepcke solamente cuatro de ellas están demostradas, como ya hemos dicho.

Respecto del tema que nos interesa, la división de las figuras, el *De Practica Geometrie* dedica el capítulo cuarto a esta cuestión. Este capítulo está titulado *División de campos entre socios*, suficiente explícito en lo que se refiere a sus objetivos. El énfasis del contenido se centra en los tipos de campos y en cómo dividirlos en una abundante variedad de casos. Fibonacci da una corta introducción y divide el capítulo en cuatro partes, cada una de las cuales está dedicada a las diferentes formas del campo que hay que dividir: triangular, cuadrangular, polígonos de más lados y circular. La propia tabla de contenidos muestra la complejidad del desarrollo del capítulo. Las condiciones para dividir las figuras son estas: en dos partes iguales, varias partes iguales, dos partes formando una razón dada y varias partes formando razones determinadas. Todas las proposiciones, además de ir acompañadas de una demostración teórica de las mismas, contienen una aplicación práctica con números, igual que en el *Liber Embadorum* de Abraham bar Hiyyá.

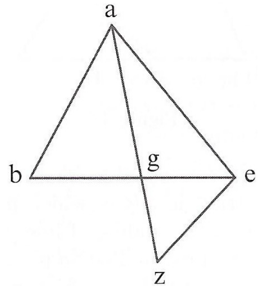
En muchos casos, Fibonacci saca consecuencias de las propias proposiciones. Por ejemplo, la proposición 1, cuyo enunciado es:

Proposición 1. *Dividir un triángulo en dos partes iguales desde uno de sus ángulos.*

Va seguida de dos corolarios, que utilizará después en sus demostraciones:

Corolario 1. *Si dos triángulos tienen un ángulo igual, sus áreas forman una razón compuesta por los lados que contienen los ángulos iguales.*

Sean los triángulos abg y gez, con ángulos iguales en g. El sentido que hay que dar al enunciado de este corolario es:



$$\frac{abg}{gez} = \frac{bg}{ge} \cdot \frac{ag}{gz}$$

Demostración. Dibujemos la línea ae entre los triángulos abg y gez. La razón del triángulo

abg respecto del gez la podemos escribir:

$$\frac{abg}{gez} = \frac{abg}{age} \cdot \frac{age}{egz}$$

Pero la razón del triángulo abg al age es igual a la razón de las bases respectivas, ya que los dos comparten sus alturas, y lo mismo sucede con la razón de los triángulos age y egz. Es decir:

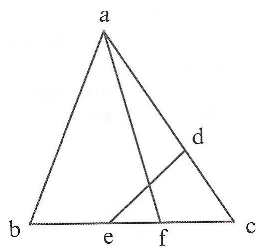
$$\frac{abg}{age} = \frac{bg}{ge} \cdot \frac{age}{egz} = \frac{ag}{gz}$$

Luego:

$$\frac{abg}{gez} = \frac{bg}{ge} \cdot \frac{ag}{gz}$$

Corolario 2. *Si se traza una línea que corte dos lados de un triángulo formando con ellos un triángulo que tenga un ángulo común con el triángulo original, la razón de las áreas de un triángulo al otro es como la de los productos respectivos de los dos lados que contienen dicho ángulo.*

Demostración. Sean el triángulo abc y la línea de que corta los lados ca y cb en los puntos d y e respectivamente. Construimos el triángulo acf igual a dec (Elementos, I.44). Veamos que es:



$$\frac{abc}{dec} = \frac{bc.ac}{dc.ec}$$

Como los triángulos abc y afc tienen la misma altura será:

$$\frac{abc}{afc} = \frac{bc}{fc}$$

pero

$$\frac{ac}{fc} = \frac{ac.bc}{bc.fc}$$

Luego:

$$\frac{abc}{afc} = \frac{ac.bc}{ac.fc}$$

y como acf y dce son iguales y tienen un ángulo común podemos afirmar:

$$\frac{abc}{dec} = \frac{ac.bc}{ac.cf}$$

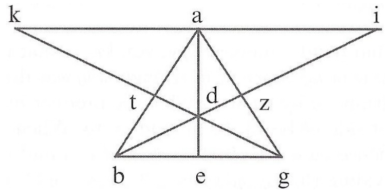
Ahora, puesto que acf y dce son iguales y tiene un ángulo común, con lados comunes que forman tal ángulo, de acuerdo con Elementos IV.15, se cumple: que $\frac{ac}{dc} = \frac{ce}{cf}$. Luego:

$$\frac{abc}{dec} = \frac{ac.bc}{dc.ce}$$

Con el fin de preparar a sus lectores para proceder a la división de triángulos desde un punto situado en el interior de un triángulo, Fibonacci da algunos principios:

P1. *Si se trazan dos líneas desde sendos ángulos de un triángulo hasta los puntos medios de los lados opuestos, se cortarán con proporcionalidad y cada parte de la línea comprendida entre el ángulo y el punto de intersección es el doble de la otra parte de la misma.*

Este principio es el que determina el centro de gravedad, cuestión recurrente en muchos autores. Hemos visto como Jordano la trata como un problema de división de un triángulo en tres partes iguales, que es muy distinto del tratamiento que le da Fibonacci en esta obra.



Sean el triángulo abg y las rectas ae y bz que cortan los puntos medios de los lados bg y ag, respectivamente y que se encuentran en el punto d. Desde a trazamos una recta $ai = bg$ y prolongamos la recta bz hasta el punto i. Tenemos así dos triángulos semejantes azi y gbz, por lo que $\dfrac{az}{zg} = \dfrac{iz}{zb}$ y por tanto $\dfrac{ai}{g} = \dfrac{az}{zg}$.

En consecuencia, $\dfrac{iz}{zb} = \dfrac{az}{bg}$ y como los triángulos adi y bde son semejantes,

$$\frac{ia}{be} = \frac{ab}{de} = \frac{id}{db}$$

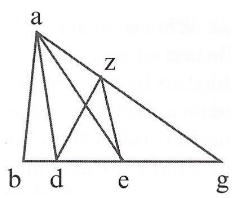
Ahora, $bg = 2be$ y así, $ad = 2de$, $id = 2bd$ y como $iz = zb$, si se añade a ambas zd resulta $bi = bz + zd$, por lo que $id = 2db$. Como $bz + zd = 2bd$, restando bd de ambos miembros de la igualdad se obtiene $bd = 2dz$.

P2. (Recíproco de P1). Una línea trazada desde el ángulo restante que pase por el punto de intersección divide el lado opuesto en dos partes iguales.

P3. (Consecuencia de P1). Una línea trazada desde el ángulo restante hasta el punto medio del lado opuesto pasará por el punto de intersección.

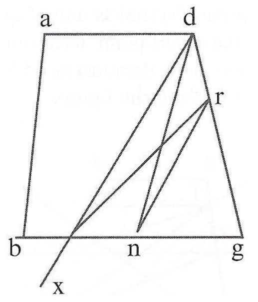
Proposición 2. *Dividir un triángulo en dos partes iguales mediante una línea trazada en un punto situado en uno de sus lados.*

Demostración. Sea el triángulo abg y tomemos el punto d situado en el lado bg. Dividimos el lado bg en dos partes iguales por el punto e y unimos a con d y con e. Trazamos la recta dz. Afirmamos que el triángulo abg queda dividido en dos partes iguales por la recta dz.



Los triángulos ade y adz son iguales ya que tienen la base común ad y la misma altura puesto que ad y ez son paralelas. Añadimos a ambos triángulos el triángulo abd con lo que obtenemos el cuadrilátero $abdz$ y el triángulo abe. Pero este último es igual al triángulo aeg y, en consecuencia, el cuadrilátero $abdz$ es también la mitad de abg.

En la demostración del método que resuelve la división de un cuadrilátero en dos partes iguales desde un punto exterior al mismo (Proposición 36), Fibonacci da la solución de manera semejante a la anterior, moviendo un par de rectas paralelas hasta que una de ellas pasa por el punto.



Destaquemos, finalmente, que a lo largo de todo el capítulo, Fibonacci da muestras de sus conocimientos de geometría teórica y sus proposiciones están cuidadosamente probadas con demostraciones basadas preferentemente en las obras de Euclides.

8. Conclusión

Tras todos estos avatares, el largo viaje de Sobre la División de las Figuras llega ya a su fin. Como ya hemos comentado, en 1915, Raymond Clare Archibald consiguió restaurar el texto perdido de Euclides. Para ello se valió, principalmente, de los textos de Woepcke y Fibonacci y la referencia que de esa obra nos dio Proclo.

Sin embargo, el interés que la cuestión de la división de las figuras suscitó en todas las épocas fue notable, como hemos visto en el relato de este largo viaje. Esto dio lugar a que una gran cantidad de autores trataran estos problemas en las obras que hemos comentado. Éstos y otros dieron soluciones a los problemas planteados tanto en lo que respecta a los aspectos teóricos de la cuestión como sus aplicaciones prácticas.

Referencias

[1] ARCHIBALD, Raymond Clare, *Euclid's Book on Division of Figures*. Cambridge University Press, 1915.

[2] [BAR HIYYÁ, Abraham, *Llibre de geometría*, Versión en catalán a partir del hebreo de J. Millás Vallicrosa. Biblioteca Hebraico-Catalana. Alpha. Barcelona, 1931.

[3] HUGHES, Barnabas, *Fibonacci's De Practica Geometrie. Sources and Studies in the Mathematics and Physical Sciences*. Springer. New York, 2008.

Sobre el autor:
Nombre: Juan Tarrés Freixenet
Correo electrónico: jtarres@ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.