

El efecto de Hall en tres tiempos (clásico, cuántico entero y cuántico fraccionario) desde un contexto histórico-experimental



Manuel Antonio Villarreal Uzcategui¹, Gladys Gutiérrez Nieto¹, Jesús Ramón Briceño Barrios², Hebert Elías Lobo Sosa³, Frank Sinatra Daboin Mendez¹

¹*Centro Regional de Investigaciones en Ciencias, su Enseñanza y Filosofía (CRINCEF), Núcleo Universitario Rafael Rangel, Universidad de Los Andes, Trujillo-Venezuela.*

²*IMEF-MPEF Polo 21, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil.*

³*Instituto de Educação-PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil.*

E-mail: mavu@ula.ve

(Recibido el 3 de agosto de 2020, aceptado 29 de septiembre de 2020)

Resumen

En este trabajo se describe uno de los efectos más vanguardista de la Física de la Materia Condensada, el efecto de Hall, desde un contexto histórico-experimental. Se presenta el efecto de Hall en sus tres tiempos: el Efecto de Hall Clásico (1879) a través del experimento iniciado por Rowland y culminado exitosamente por Hall, donde la fuerza de Lorentz juega un papel fundamental en su explicación teórica; el Efecto de Hall Cuántico Entero (1980) mediante el experimento llevado a cabo por von Klitzing y entendido teóricamente por los niveles de energía de Landau; y el Efecto de Hall Cuántico Fraccionario (1982) a través del experimento de Störmer y Tsui, con la aportación teórica iniciada por Laughlin y luego por muchos otros científicos. Desde su epistemología experimental, se pretende comprender las restricciones que impone el experimento del efecto de Hall sobre su desarrollo teórico y señalar que aunque no son muchas las aplicaciones de este efecto, la constante de von Klitzing se utiliza actualmente como medida estándar de la resistencia eléctrica. Desde el ámbito académico, subrayar la importancia que tiene la enseñanza de la Física contemporánea en las aulas de educación media y universitaria.

Palabras clave: Efecto de Hall Clásico, Efecto de Hall Cuántico, Física Contemporánea, Didáctica de las Ciencias Naturales.

Abstract

This work describes one of the most avant-garde effects of Condensed Matter Physics, the Hall Effect, from a historical-experimental context. The Hall effect in its three stages is presented: the Classic Hall Effect (1879) through the experiment initiated by Rowland and successfully culminated by Hall, where the Lorentz force plays a fundamental role in his theoretical explanation; the Integer Quantum Hall Effect (1980) by means of the experiment carried out by von Klitzing and theoretically understood by the Landau energy levels; and the Fractional Quantum Hall Effect (1982) through the Störmer and Tsui experiment, with the theoretical contribution initiated by Laughlin and later by many other scientists. From his experimental epistemology, he tries to understand the restrictions imposed by the Hall effect experiment on his theoretical development, and to point out that although there are not many applications of that effect, the von Klitzing constant is currently used as a standard measure of electric resistance. From the academic field, underline the importance of the teaching of contemporary physics in High School and University classrooms.

Keywords: Classic Hall Effect, Quantum Hall Effect, Contemporary Physics, Teaching of Natural Sciences.

I. INTRODUCTION

El efecto de Hall fue descubierto en el año 1879 por Edwin Hall, cuando todavía era un estudiante de postgrado de la Universidad de Johns Hopkins en Baltimore, Estados Unidos. Un voltaje a lo largo de una lámina delgada de un material conductor aparece cuando una corriente eléctrica es enviada a través de la lámina en presencia de un campo magnético perpendicular al plano de ésta [1]. Normalmente este voltaje es proporcional al campo magnético aplicado.

Además, como también es proporcional a la densidad de portadores de carga, tal efecto ofrece un método conveniente para medir las densidades de carga en varios materiales, el cual es usado con frecuencia en los laboratorios de Física del Estado Sólido [2]. Sin embargo, a temperaturas muy bajas las leyes de la Mecánica Cuántica alteran el efecto de Hall significativamente, si los portadores de carga están confinados a moverse solamente en un plano, es decir un espacio de solo dos dimensiones (por ejemplo, a lo largo de una superficie interna de una capa de algún material semiconductor). Con los avances en la tecnología de

nuestros días, estas estructuras bidimensionales se pueden fabricar con un grosor del orden atómico.

Un siglo después del descubrimiento del efecto de Hall, en el año 1980, Klaus von Klitzing del Instituto Max Planck, en Stuttgart, observó que bajo ciertas condiciones experimentales, la resistencia de Hall se incrementaba no en forma continua sino de manera escalonada (como configurando peldaños o platos) cuando el campo magnético se incrementaba. Lo que significaba que la resistencia de Hall también se estaba cuantificando [3]. El Efecto de Hall Cuántico Entero (EHCE), como se denominó, ocurre cada vez que el número de electrones N_e es proporcional a un entero multiplicado por el número de cuantos de flujo magnético N_m que atraviesan el material. A la relación $f = N_e/N_m$ se le conoce como factor de llenado. El flujo magnético se cuantifica en unidades de h/e , donde h es la constante de Planck y e , la carga del electrón. Por lo tanto, N_m está determinado por el campo magnético que atraviesa el plano, dividido por h/e . Este EHCE fue explicado teóricamente al considerar que los electrones no interactúan entre sí y que además se encuentran bajo la acción de un potencial aleatorio, considerando la teoría o niveles de Landau [2].

En el año 1982, los profesores Störmer y Tsui, ambos de los Laboratorios Bell en New Jersey, trataron de investigar el mismo fenómeno, pero con materiales más puros que los que usaba Klitzing. Pudieron investigar casos para campos magnéticos muy intensos, cuando el número de cuantos de flujo magnético N_m excedía al número de electrones N_e . Así, descubrieron que en adición al efecto cuántico entero, existía una resistencia de Hall cuando el factor de llenado tenía el valor de $f = 1/3$, con la subsecuente suposición de que semejante plato también se podría observar en $f = 2/3$. A este fenómeno lo denominaron Efecto de Hall Cuántico Fraccionario (EHCF).

Posteriormente, en materiales muy puros (movilidad electrónica muy alta) y a temperaturas muy bajas, fue observada una serie de familias del EHCF. Estos resultados correspondían a valores del factor de llenado con números impares como denominador. En el año 1982, Tsui, Störmer y Gossard, reportaron en su artículo original, que la teoría que explicaba el EHCE podría tomar en consideración este EHCF, si se postulaba la existencia de partículas con cargas fraccionarias [4]. La explicación teórica del EHCF no tardaría en llegar. En el año 1983, el profesor Robert Laughlin, quien trabajaba en el Laboratorio Nacional Lawrence-Livermore, propuso una función de onda variacional para el estado fundamental y excitado de un gas de electrones bidimensional, sometido a un campo magnético y que explicaba las anomalías observadas por Tsui y Störmer [5]. El nuevo estado cuántico correspondería al de un fluido cuyas excitaciones elementales, cuasi-electrones y cuasi-huecos, debieran de poseer carga eléctrica fraccionaria. La comprobación experimental de la fragmentación de la carga eléctrica en el EHCF ha sido realizada a lo largo de estos últimos años y ha supuesto la confirmación definitiva de la teoría de Laughlin.

En este trabajo se analiza desde un contexto histórico-experimental el efecto de Hall para por una parte tratar de desglosar los fundamentos teóricos que explican el efecto clásico, cuántico entero y cuántico fraccionario, y por otra subrayar la importancia que tiene la enseñanza de la Física contemporánea en las aulas de educación media y universitaria. Se tratará de ser lo menos riguroso posible en las formulaciones matemáticas que comprenden el desarrollo de cada etapa del efecto de Hall, para evitar alejarnos del propósito principal.

II. PRIMER TIEMPO: EL DESCUBRIMIENTO DEL EFECTO DE HALL CLÁSICO, UN APARENTE ERROR DE APRECIACIÓN EN LA TEORÍA DE MAXWELL

En el año 1879 Edwin Herbert Hall publicó el artículo sobre su efecto [1], el cual comienza con una cita de un párrafo del trabajo de Maxwell titulado “Tratado de electricidad y magnetismo” (1873) [6]:

Debe recordarse cuidadosamente que la fuerza mecánica que empuja a un conductor que transporta una corriente a través de las líneas de la fuerza magnética, actúa, no sobre la corriente eléctrica, sino sobre el conductor que la lleva. Si el conductor es un disco giratorio o un fluido, se moverá obedeciendo a esta fuerza; y este movimiento puede o no ir acompañado de un cambio de posición de la corriente eléctrica que lleva. Pero si la corriente misma es libre de elegir algún camino a través de un conductor sólido fijo o una red de alambres, entonces, cuando se hace actuar una fuerza magnética constante sobre el sistema, la trayectoria de la corriente a través de los conductores no se altera permanentemente, sino que luego de que ciertos fenómenos transitorios, llamados corrientes inducidas, se han apagado, se tendrá que la distribución de la corriente es la misma que si no estuviera bajo la acción de la fuerza magnética. La única fuerza que actúa sobre las corrientes eléctricas es la fuerza electromotriz, la cual debe distinguirse de la fuerza mecánica que es el tópico de este capítulo.

Maxwell (1873, v.2, p. 144)

También influyó en el trabajo de Hall la lectura de otro artículo, “La inducción unipolar” (Edlund, 1878), en el que se supone que un imán actúa sobre una corriente en un conductor fijo del mismo modo como actúa sobre el conductor mismo cuando se mueve libremente.

Ante estos puntos de vista, Hall decidió consultar a su tutor de tesis, el profesor Henry Augustus Rowland, quien ya había intentado realizar un experimento para evaluar el postulado de Maxwell, aunque sin éxito. Orientado por este,

Hall inicia una serie de experimentos con un dispositivo que contenía esencialmente: un alambre de plata en forma de espiral plana colocado entre dos discos delgados de caucho.

Este dispositivo era colocado entre los polos de un electroimán, en una posición tal que las líneas de fuerza magnética (o campo magnético) pasasen a través de la espiral perpendicularmente a la corriente eléctrica. El alambre tenía un diámetro de aproximadamente 1,0 mm y con una resistencia de 2,0 Ω . La intensidad del campo magnético se hallaba entre 15 y 20 Kilogauss (KG). Este montaje le permitía detectar un cambio de aproximadamente $1/10^6$ en la resistencia de la espiral.

En estos experimentos Hall realizó 13 series de observaciones en pocos días, consistiendo cada una de ellas en 40 lecturas que alternaban la actividad del imán y un cambio en direcciones opuestas del mismo. No encontró cambios en la resistencia del alambre (en forma de espiral) causados por la acción del imán. Esto lo llevo a reflexionar sobre la naturaleza de la electricidad y su comportamiento como fluido incomprensible, considerando que era necesario medir la diferencia de potencial entre puntos sobre los lados opuestos del conductor.

Utilizó entonces el diseño original de Rowland con un disco metálico colocado entre los polos del electroimán, bajo la acción de las líneas de fuerza magnética perpendicular al disco. Colocó las puntas de prueba de un galvanómetro en diferentes partes del disco, por el cual circulaba una corriente eléctrica, hasta hallar dos puntos cercanamente equipotenciales. Activó el campo magnético externo y observó el galvanómetro con la intención de detectar cualquier indicación de un cambio en el potencial (voltaje). El experimento dio resultados negativos y Hall lo atribuyó al espesor del disco.

Entonces Rowland le sugirió a Hall usar láminas de oro montadas sobre una placa de vidrio. Con este cambio aparentemente menor, tuvo éxito en detectar una clara deflexión de la aguja del galvanómetro, como efecto de la acción del imán. Esta deflexión era grande como para atribuírsela a la acción directa del imán sobre la aguja del galvanómetro u otra causa similar. Además, era permanente. El efecto se invertía cuando se invertía la dirección del campo magnético, pero no se invertía cuando se transferían las puntas de prueba del galvanómetro desde un extremo de la pieza al otro. Como expresa luego Hall en su artículo, el fenómeno observado era justo lo que hubiera esperado ver, como si la corriente eléctrica estuviera empujada, pero no movida, hacia un lado del conductor.

Después Hall preparó un nuevo dispositivo para investigar las variaciones del efecto hallado, en función del campo magnético y la intensidad de la corriente a través de una lámina de oro. En un anexo del mismo artículo, Hall escribe:

Se puede quizás hablar de la acción del imán como estableciendo en la lámina de oro una nueva fuerza electromotriz a ángulos rectos de la fuerza primaria electromotriz. Esa nueva fuerza electromotriz no puede, bajo

condiciones ordinarias, manifestarse por sí misma, si el circuito en el cual ella trabajara estuviera incompleto. Cuando se completa el circuito por medio del galvanómetro de Thomson, fluye una corriente. La corriente real a través del galvanómetro depende, por supuesto, de la resistencia del galvanómetro y de sus conexiones, tanto como de la distancia entre los dos puntos de la lámina de oro en los cuales se aplican los extremos de los alambres desde el galvanómetro.

Hall (1879, p. 292)

Esto se convirtió en el tema de su tesis doctoral, titulada: **“Sobre la nueva acción del magnetismo en una corriente eléctrica permanente”**. La “nueva acción” a la que hace referencia fue la aparición de una diferencia de potencial transversal en el conductor. Este voltaje de Hall (como es conocido actualmente), es perpendicular tanto al campo eléctrico establecido en el conductor como al campo magnético externo aplicado.

Así, un aparente error de apreciación de Maxwell motivó la experimentación sobre un dominio de la electrodinámica clásica que condujo a un nuevo fenómeno. En la segunda edición del tratado de Maxwell, el editor menciona brevemente el aporte de Hall. Sin embargo, es importante resaltar algunos puntos en este descubrimiento del efecto de Hall [7]:

- (i) Fue atractiva la astucia de Rowland acerca del tema, pero el efecto tiene merecidamente el nombre del descubridor.
- (ii) El electrón se descubrió 18 años después de la publicación del artículo de Hall.
- (iii) La fuerza de Lorentz asociada a este efecto, establecida para una carga puntual debida a campos electromagnéticos no estaba desarrollada para ese momento. Usualmente se atribuye esa fuerza a Heaviside en un trabajo de 1889, y se interpreta que Lorentz la derivó poco tiempo después, en el año 1892.

A. El experimento del efecto de Hall clásico

Cuando una corriente I fluye a través de una muestra conductora de longitud l , ancho a y espesor d , la cual es penetrada por un campo magnético \vec{B} (Figura 1), los portadores de carga son desviados hacia los bordes de la muestra debido a la acción de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_L = -e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Esto produce la acumulación portadores en un costado de la muestra originándose así un campo eléctrico transversal o campo de Hall (la carga acumulada es la fuente del campo eléctrico). El proceso de acumulación continúa hasta que se alcanza el equilibrio entre la fuerza magnética de acumulación y la fuerza eléctrica repulsiva producida por el

campo de Hall. En ese instante, la fuerza total es cero y se establece que:

$$e\vec{E} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

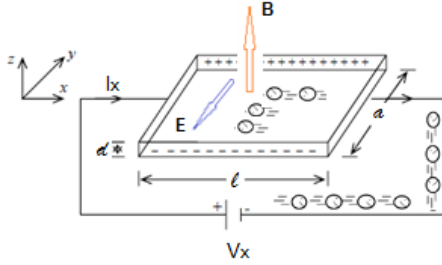


FIGURA 1. Esquema del dispositivo para el efecto de Hall clásico. Adaptada de Referencia [8].

Introduciendo en el sistema de coordenadas cartesianas la dirección de los vectores:

$$\vec{v} = v \hat{x},$$

$$\vec{E} = E \hat{y},$$

$$\vec{B} = B \hat{z},$$

y multiplicando por la densidad de portadores n , se encuentra la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico:

$$neE = jB. \quad (2)$$

Debido a la fuerza magnética transversal que crea el campo de Hall, se origina una diferencia de potencial transversal V_H (voltaje de Hall) dado por la ecuación:

$$V_H = Ea. \quad (3)$$

Experimentalmente, el voltaje y la corriente son medidos, así multiplicando la ecuación (2) por el ancho a de la muestra, se obtiene:

$$neEa = jBa,$$

$$neV_H = IB,$$

donde el cociente V_H/I es la resistencia de Hall, dada por la ecuación:

$$R_H = B/en. \quad (4)$$

Esta resistencia de Hall depende solamente del campo magnético y la densidad de portadores. El resultado no depende del tipo, dimensiones ni la forma de la muestra. Por lo tanto, la explicación teórica de este efecto nos la da la electrodinámica clásica, según la cual una carga eléctrica sometida a la acción simultánea de un campo magnético \vec{B} y un campo eléctrico \vec{E} experimenta una fuerza de Lorentz

(ecuación 1). Esta fuerza hace que las cargas giren con una frecuencia ciclotrónica $\omega_c = eB/m$, mientras que el campo eléctrico produce un arrastre neto de las órbitas ciclotrónicas. Se debe recordar que para la fecha del descubrimiento de este efecto todavía no se había desarrollado la ecuación de Lorentz, pero pudo explicar el efecto una vez establecida.

El efecto de Hall posee aspectos geométricos singulares que facilita la aparición de sorprendentes propiedades físicas. En primer lugar, la conducción eléctrica en los planos de Hall requiere el uso de un tensor de conductividad $\vec{\sigma}$ y un tensor de resistividad $\vec{\rho}$, el uno el inverso del otro, y que relacionan linealmente la densidad de corriente y el campo eléctrico. Las relaciones de Onsager implican que solo hay dos cantidades independientes. En el caso clásico, las cargas no colisionan entre sí, ni con impurezas, y se obtiene:

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{B}{en},$$

$$\rho_{xx} = \sigma_{xx} = 0.$$

En los casos no ideales las componentes longitudinales ρ_{xx} y σ_{xx} no se anulan, pero ρ_{xy} sigue siendo B/en . Esta última relación es la misma que la de la resistencia Hall dada por la ecuación (4). En efecto, la resistividad y la resistencia Hall son la misma cantidad.

Finalmente, que la resistencia de Hall se exprese como R_H no es una mera casualidad, dado el aporte de Rowland al descubrimiento del efecto. Aun cuando se han generado diferentes aplicaciones a partir de este efecto, el cual ha jugado un papel muy importante en la tecnología electromagnética de nuestros días, ha sido muy poca la atención y el interés que se le da en los textos clásicos de electricidad y magnetismo de educación media y universitarios [7].

III. SEGUNDO TIEMPO: EL DESCUBRIMIENTO DEL EFECTO DE HALL CUÁNTICO ENTERO, CAMBIOS EN LAS CONDICIONES EXPERIMENTALES

Un siglo después del descubrimiento del efecto de Hall, el 05 de febrero de 1980, el físico alemán Klaus von Klitzing descubre el efecto de Hall cuántico mientras se encontraba trabajando en el transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor (MOSFET: Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor.), en el laboratorio de Alto Campo Magnético en Grenoble, Francia.

El aspecto novedoso de su investigación radica en que él estaba interesado en la caracterización del transporte electrónico en los transistores y en el deseo de mejorar la movilidad electrónica en estos dispositivos. Era importante encontrar y comprender los procesos de dispersión que dominan la movilidad electrónica. El estudio fue realizado sobre capas finas de materiales, en interfases especiales de

Silicio (Si) y compuestos de Silicio. Para esos fines usó dispositivos Hall que le permitían medidas directas de la resistividad de Hall ρ_{xy} y la resistividad longitudinal ρ_{xx} en función de campo magnético. Cabe señalar, para un correcto entendimiento del aporte de von Klitzing, que ya era conocido que los electrones podían formar un gas electrónico cuasi-bidimensional cuando se acumulan en la superficie de un cristal de Si como consecuencia de aplicar sobre el transistor una tensión de puerta positiva. Además, el ambiente del laboratorio era especial, trabajando a temperaturas muy bajas, de aproximadamente 4 Kelvin (K) y a campos magnéticos considerablemente altos, mayores a 10 Teslas (T).

El desarrollo de la Física de la Materia Condensada estaba en su apogeo para esa época, particularmente en el estudio de las interacciones entre electrones y campos magnéticos. La Física en dos dimensiones comenzaba a cobrar presencia protagónica, naturalmente acompañada de temperaturas muy bajas y campos magnéticos altos. Además, la tecnología de semiconductores ya mostraba fronteras de interés epistemológico. Los MOSFET son los grandes protagonistas tecnológicos en ese cambio conceptual [7].

Entonces, cuando von Klitzing cambió las condiciones experimentales del efecto de Hall clásico: temperaturas de nitrógeno líquido (de aproximadamente 77 K) por temperaturas de Helio líquido (de aproximadamente 4 K), campos bajos del orden de los 5 KG por campos altos mayores de 5 T, láminas de oro con movilidades electrónicas bajas (de aproximadamente 10.000 cm²/V.s) por transistores de efecto de campo con movilidades electrónicas altas (mayores a 100.000 cm²/V.s); de alguna manera también modificó el comportamiento de los portadores de carga dentro del transistor.

A. Los sistemas de electrones cuasi-bidimensionales

El carácter bidimensional de un sistema de electrones se puede entender de la forma siguiente: los posibles estados de energía del electrón están cuantizados en una dimensión espacial, por ejemplo z; sin embargo, los electrones pueden moverse libremente en las otras dos direcciones espaciales x e y. Por supuesto, estos sistemas no son bidimensionales en el sentido estricto ya que las funciones de onda tienen una extensión espacial en la dirección z, y los campos electromagnéticos que actúan sobre los electrones no están confinados en el sistema bidimensional [9].

Hasta el presente existen tres tipos de sistemas de electrones cuasi-bidimensionales (SE-2D) logrados experimentalmente:

1. El primer dispositivo en el que se obtuvo un gas de electrones cuyo comportamiento se podía asimilar al de un sistema cuasi-bidimensional, fue el transistor efecto de campo metal-óxido-semiconductor (MOSFET), compuesto de una puerta metálica, un óxido (generalmente SiO₂) y Si con un dopaje tipo-p no tan fuerte. El sistema en el cual el efecto de Hall cuántico fue descubierto tenía Si en el

semiconductor y SiO₂ en el aislante. La Figura 2 muestra una vista lateral esquemática de un MOSFET de silicio en el cual se representa la compuerta de aluminio (Al), el aislante SiO₂ y el sustrato cristalino de Si tipo-p.

Al aplicar sobre el transistor una tensión de puerta positiva, los electrones son atraídos hacia la superficie de separación entre el SiO₂ y el Si (Figura 3). Si se incrementa esta tensión hasta el punto de que el fondo de la banda de conducción se aproxime y traspase el nivel de Fermi, aparece una región próxima a esta superficie en la que se mejora la conductividad. Esta constituye la capa de inversión, llamada así porque esta región ha pasado de tener un comportamiento tipo-p a uno tipo-n.

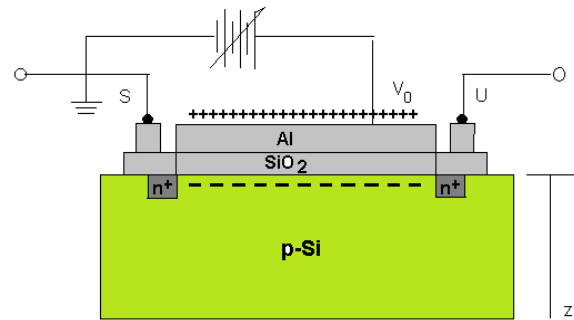


FIGURA 2. Vista lateral esquemática de un MOSFET de Silicio.

Además, como el movimiento de los electrones está restringido a una zona próxima a la superficie de separación, se considera que se comporta como un gas de electrones cuasi-bidimensional (GE-2D). La región donde las bandas están curvadas será una región de resistividad alta, debido a la reducción de la densidad de los portadores de carga.

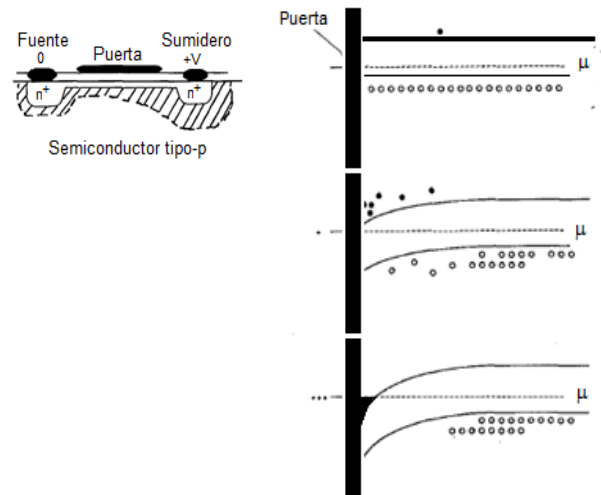


FIGURA 3. Esquema de un MOSFET y su comportamiento en función de la tensión de puerta (+) aplicada. Densidad de portadores de carga $\sim 10^{13}$ cm⁻². Adaptada de Referencia [9].

Las regiones tipo-n cercanas a los contactos que hacen de fuente y sumidero para la intensidad de corriente están más fuertemente dopadas, y su función es la de efectuar un buen

contacto con la capa de inversión tipo-n para el paso de corriente a través del GE-2D. La región de la banda curvada en la unión entre el contacto tipo-n y el sustrato tipo-p está unido con la zona curvada creada por la tensión de puerta, de manera que la canal tipo-n está completamente aislada del sustrato tipo-p.

2. El desarrollo de la técnica de epitaxia por haces moleculares (Molecular Beam Epitaxy, MBE) ha permitido obtener otro tipo de sistema de electrones cuasi-bidimensionales, las heteroestructuras semiconductoras, que se caracterizan por el crecimiento en capas sucesivas de diferentes compuestos semiconductores. De este modo se reduce el principal problema que presentan los MOSFET, esto es, la dispersión de los electrones debido a las impurezas ionizadas. Usando esta técnica MBE: técnica de síntesis en ultra-alto vacío de láminas delgadas a partir de sus componentes elementales en fase vapor, que condensan sobre un sustrato monocristalino; se pueden crear dos semiconductores alternados para formar un emparedado bidimensional como estructura (Figura 4-b).

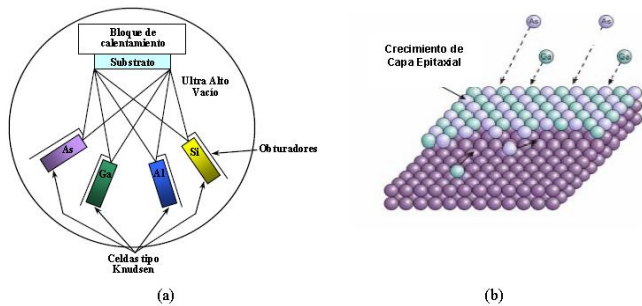


FIGURA 4. Esquema de (a) la técnica de epitaxia por haces moleculares y (b) la formación de las capas epitaxiales. Fuente: Referencia [8].

Cada capa tiene un ancho de aproximadamente varios nanómetros. Les llaman la superred. Ellas también pueden crecerse mediante la deposición de vapor metal-orgánico químico. Así, se obtuvo el transistor de movilidad electrónica alta (High Electronic Mobility Transistor, HEMT) constituido por un material con dopaje tipo-n, generalmente $Ga_{1-x}Al_xAs$ y denominado barrera, que se intercala entre el electrodo de la puerta y una zona no demasiado gruesa de GaAs que se dopa débilmente tipo-p. Los electrones del sistema cuasi-bidimensional, situados físicamente en el GaAs/ $Ga_{1-x}Al_xAs$, y que aparecen a consecuencia de la igualación de los niveles de Fermi de cada semiconductor, provienen de los niveles donores del $Ga_{1-x}Al_xAs$. Al estar los átomos ionizados físicamente separados del SE-2D, no reducen la movilidad de los electrones en la capa de inversión. La Figura 5 muestra la estructura de bandas en este proceso.

La técnica MBE ha permitido además desarrollar un nuevo tipo de dopaje, llamado dopaje δ , que consiste en intercalar en el material que hace las veces de barrera, una única capa de átomos dopantes, generalmente para un dopaje tipo-n, Si.

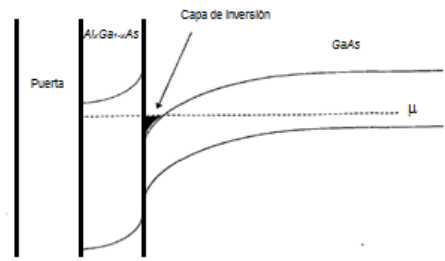


FIGURA 5. Esquema del nivel de energía de los electrones en el HEMT, basado en una heteroestructura de $Ga_{1-x}Al_xAs/GaAs$. Densidad de portadores de carga $\sim 10^{13} \text{ cm}^{-2}$. Adaptada de Referencia [9].

3. El sistema de electrones cuasi-bidimensional también puede formarse en la superficie del Helio líquido. Existe un potencial de barrera de alrededor de 1 eV en la superficie del Helio líquido, que impide que los electrones se transmitan en el líquido. Por otra parte, el potencial espejo atrae a los electrones a la superficie, resultando un GE-2D con densidad de carga de $\sim 10^9 \text{ cm}^{-2}$.

El efecto Hall cuántico ha sido observado en los dos primeros tipos de SE-2D. En el MOSFET ocurre el efecto Hall cuántico entero cuando se tienen las condiciones siguientes: temperaturas muy bajas (de aproximadamente 50 mK), campos magnéticos altos (10 T) y una movilidad electrónica moderada (20.000-80.000 $\text{cm}^2/\text{V.s}$). En el caso de movilidades electrónicas altas (mayores a 100.000 $\text{cm}^2/\text{V.s}$) y campos magnéticos muy altos (30 T) se tiene la presencia del efecto Hall cuántico fraccionario.

B. El experimento del efecto de Hall cuántico entero

Hall realizó sus experimentos (usando láminas de oro) a temperatura ambiente y con campos magnéticos inferiores a 1 T. A finales de los años 70 los científicos empezaron a utilizar temperaturas del orden de los mK y campos magnéticos muy altos, de hasta 30 T. Las láminas de oro fueron sustituidas por la superficie de separación entre distintas partes de semiconductores, diseñados por la industria electrónica en la búsqueda de transistores de bajo ruido o alta movilidad electrónica.

En el año 1980, Klaus von Klitzing descubrió que en condiciones extremas de temperaturas bajas y campos magnéticos altos, la resistividad de Hall no varía linealmente con B sino que presenta una serie de saltos en función de B (Figura 6). En su trabajo reportó un nuevo método para determinar la constante de estructura fina [3], basándose en el hecho de que el gas de electrones en la capa de inversión de un MOSFET está totalmente cuantizado, cuando el transistor opera a temperaturas de Helio líquido y en un campo magnético alto, del orden de 15 T.

La intercalación en la figura 6 muestra el diagrama esquemático del MOSFET usado por Klitzing. El campo eléctrico perpendicular a la superficie (campo compuerta) produce sub-bandas para el movimiento normal a la interfase oxido-semiconductor, y el campo magnético

produce una cuantización de Landau en el movimiento paralelo a la interfase.

Los saltos o platos en la resistencia de Hall (Figura 6, derecha) no dependen de las propiedades específicas del material, sino que están dados por una combinación de constantes universales como lo son la constante de acción de Planck y la carga del electrón,

$$R_H = h/ie^2, \quad (5)$$

donde: $i = 1, 2, \dots$ es un número entero que caracteriza cada salto o plato de Hall, que es por definición la región de campos magnéticos donde la resistividad está cuantizada de acuerdo con la ecuación (5).

Dentro de cada plato la resistividad longitudinal ρ_{xx} se anula, al igual que ocurre en ciertos metales a temperaturas bajas al pasar a un estado superconductor. La diferencia entre las resistividades de Hall, la cual es exactamente igual a nh^2/e_0 , hace al EHCE útil como patrón de la resistencia eléctrica. La constante de von Klitzing es:

$$R_K = h/e^2 = 25812,807449(86) \Omega.$$

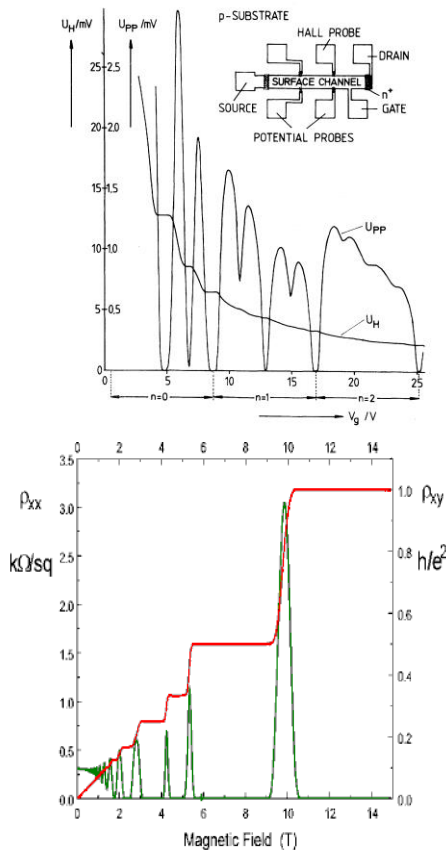


FIGURA 6. Resultados obtenidos por von Klitzing en un campo magnético constante de 18 Teslas, a una temperatura de 1,5 K y a una corriente de 1 μ A; voltaje Hall U_H y voltaje entre las sondas de potencial U_{pp} en función del voltaje de entrada V_g . A la derecha se observan la resistividad de Hall ρ_{xy} y la resistividad longitudinal ρ_{xx} en función del campo magnético. Fuente: Referencia [3].

Para propósitos prácticos los Institutos Nacionales de Metrología (INM) utilizan la ecuación (5), donde la resistencia de Hall cuantizada adquiere los valores siguientes [8]:

$$R_H(2) = h/2e^2 = R_K/2 = 12906,403 (5) \Omega,$$

$$R_H(3) = h/3e^2 = R_K/3 = 8604,269 \Omega,$$

$$R_H(4) = h/4e^2 = R_K/4 = 6453,201 (75) \Omega,$$

El valor más utilizado por los INM es cuando $i = 2$, debido a la proximidad con el valor de 10 K Ω donde se cuenta con referencias de excelente calidad metrológica.

La constante de von Klitzing también está relacionada con la constante de estructura fina $\alpha = e^2/hc$, que usando el valor de la velocidad de la luz, viene dado por $\alpha^{-1} = 137035968(23)$. Este resultado es comparable al valor obtenido a partir de la medida del momento magnético anómalo del electrón y de complejísimo cálculos de electrodinámica cuántica, $\alpha = 1/137035993(5)$.

La figura 7 muestra un esquema del sistema para medir el EHCE. Experimentalmente el voltaje de Hall (V_H) se mide en la dirección perpendicular a la corriente, mientras que la corriente se aplica en la dirección x . El EHCE puede comprenderse al considerar que los electrones no interactúan entre sí y que además se encuentran bajo la acción de un potencial aleatorio. Esto es, se explica por el comportamiento individual cuántico de los electrones bidimensionales en campos magnéticos, el cual fue descrito por el físico ruso Lev Landau en términos de la mecánica cuántica del oscilador armónico.

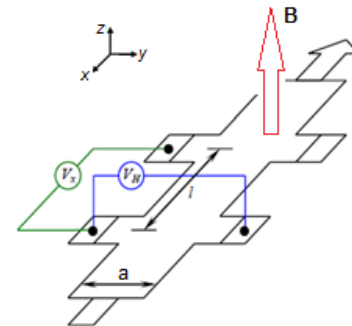


FIGURA 7. Esquema de un sistema para la medición del EHCE. Adaptada de Referencia [8].

El Hamiltoniano de un electrón sometido a un campo magnético constante en dos dimensiones espaciales viene dado por la ecuación:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m}, \quad (6)$$

donde: $\vec{P} = \vec{p} + e\vec{A}$, es el vector momento lineal, y el vector potencial \vec{A} ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$) se propone de la forma $\vec{A} = (0, B_x, 0)$, esto es, un gauge de Landau.

Los autoestados de este Hamiltoniano dependen de dos números cuánticos n y m_l , $n = 0, 1, 2, \dots$ es el número cuántico principal que determina la energía del estado según la ecuación:

$$\varepsilon_\alpha = \hbar\omega_c(n + 1/2). \quad (7)$$

mientras que $m_l = 0, 1, 2, \dots$ es el momento angular orbital del estado.

El principio de indeterminación de Heisenberg implica la existencia de un radio mínimo para las orbitas ciclotrónicas, la longitud magnética, dada por la ecuación:

$$l_B^2 = \frac{\hbar}{eB}. \quad (8)$$

Los niveles de energía de Landau etiquetados por n están degenerados, pero el carácter fermiónico de los electrones y la existencia de un radio mínimo impide que estos se puedan “amontonar” todos en un mismo nivel. Si se imaginan a los estados de Landau como pequeños discos de área $2\pi l_B^2$, entonces en un área A de la muestra habrá $A/2\pi l_B^2$ estados disponibles. La degeneración de cada nivel de Landau n , definida como el número de estados en ese nivel por unidad de área de la muestra, viene dado por:

$$N_L = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{h}. \quad (9)$$

El primer nivel de energía de Landau $n = 0$ se llena completamente cuando la densidad electrónica N_e (número de electrones por unidad de área) iguala la densidad de Landau, N_L . El paso al siguiente nivel $n = 1$ conlleva un gasto de energía finito dado por $\hbar\omega_c$. El llenado de los dos primeros niveles de Landau se consigue para una densidad N_e el doble de la densidad de Landau. Por lo tanto, es conveniente definir el factor de “llenado” ν de los niveles de energía de Landau por el cociente,

$$\nu = \frac{N_e}{N_L}, \quad (10)$$

de manera que un valor entero de ν corresponde a un llenado completo de los ν primeros niveles.

De lo expuesto, se puede entender la naturaleza cuántica de la ecuación (5) del EHCE a partir de la ecuación clásica (4) y la cuantización de Landau. En efecto, si en la ecuación (4) se sustituye el valor de B en función de N_L y se utiliza la definición del factor de llenado, se encuentra como resultado la ecuación del EHCE, esto es:

$$R_H = \frac{B}{Ne} = \frac{h N_L}{e^2 N} = \frac{h}{\nu e^2}, \quad (11)$$

donde ν coincide con el entero i de la ecuación (5), llegando a la conclusión que el EHCE es una manifestación macroscópica de la cuantización de Landau.

Desde el descubrimiento del EHCE, diversos modelos han sido desarrollados, todos con un mismo denominador común: el modelo de invariancia gauge y el concepto de

gap de movilidad de Mott. Entre ellos se encuentran: el modelo de Laughlin [10], el modelo (de los estados de borde) de Halperin [11], el modelo de los números de Chern [citado en 12], el modelo de Hofstadter [13], y el formalismo teórico de Landauer-Büttiker [14].

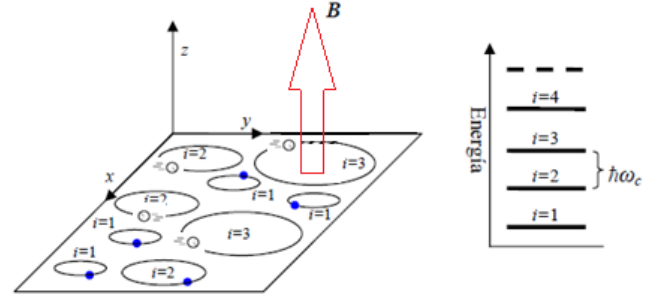


FIGURA 8. Esquema de electrones que pueden ocupar solamente estados discretos con energías bien definidas, niveles de Landau. Adaptada de Referencia [8].

Gracias al descubrimiento del EHCE, en 1985 von Klitzing recibió el premio Nobel de Física. Con motivo de la entrada en vigor en todo el mundo de un nuevo sistema internacional de pesos y medidas basado en el efecto de Hall cuántico, el 20 de mayo de 2019, Día Mundial de la Metrología, von Klitzing fue invitado por la Fundación Ramón Areces y la Real Sociedad Española de Física a explicar el alcance de sus investigaciones. Durante su intervención, reclamó un mayor apoyo a la ciencia básica y puso como ejemplo que el descubrimiento del efecto de Hall cuántico fue un "hallazgo totalmente inesperado". La investigación básica necesita un fuerte apoyo ya que la generación de nuevos conocimientos siempre conduce a nuevas aplicaciones [15].

IV. TERCER TIEMPO: EL DESCUBRIMIENTO DEL EFECTO DE HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO, OTRA CARA DE LA MISMA MONEDA

Dos años después del descubrimiento del EHCE, los físicos Horst Störmer de la Universidad de Columbia y Daniel Tsui de la Universidad de Princeton descubrieron el Efecto de Hall Cuántico Fraccionario (EHCF) en unas muestras de arseniuro de galio preparadas por Arthur Gossard, donde los electrones se mueven sin apenas difusión por las impurezas (movilidad electrónica muy alta). En los experimentos de Störmer y Tsui se observaron platos en campos magnéticos intensos asociados a factores de llenado ν fraccionarios. La ecuación (11) para la resistencia de Hall seguía siendo válida, pero con valores de ν igual a 1/3. Posteriormente, se han encontrado platos asociados a otras fracciones 2/3, 2/5, 3/7, ... (Figura 9).

La explicación del EHCE no provee un entendimiento del EHCF; no hay razón de que deba de existir una brecha a ν fraccionario. Así que, para comprender el efecto fraccionario, hay que tener en cuenta las interacciones entre

los electrones. El EHCF ocurre cuando el número de electrones es menor que el número de estados cuánticos posibles en el menor valor de energía del nivel de Landau. En este régimen, el número de estados para muchas partículas que está degenerado en ausencia de interacciones, diverge exponencialmente de la dimensión del sistema. El estudio perturbativo de las interacciones, que es usado en el líquido de Fermi (una especie de líquido formado por electrones en metales y semiconductores), falla completamente.

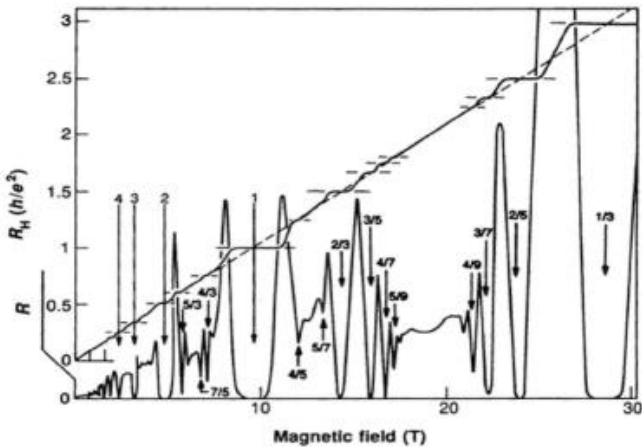


FIGURA 9. La recta diagonal representa la resistencia de Hall clásica mientras que la curva diagonal continua representa los resultados experimentales. Los campos magnéticos donde se observan los platos están marcados por las flechas. El primer plato por la derecha fue el descubierto por Störmer y Tsui (1/3) para el valor de campo magnético más alto. Los platos descubiertos por von Klitzing aparecen a valores más bajos de campo magnético. Fuente: Referencia [4].

Toda la física discutida en este fenómeno ocurre en un régimen de campo magnético intenso en sistemas para los cuales la interacción electrón-electrón domina sobre la interacción electrón-desorden. La realización de semejantes sistemas ha requerido el desarrollo de técnicas de modulación de dopaje para la creación de capas bidimensionales de movilidad alta para los electrones. Como estos sistemas con la tecnología actual son accesibles, los experimentos han revelado una gran variedad de efectos correlacionados, muchos de los cuales todavía son muy poco entendidos.

Trabajos posteriores en esta área han mostrado que adicionalmente a la propiedad de tener cargas eléctricas fraccionarias, las cuasipartículas también exhiben una estadística fraccionaria. A éstas las llaman también “anyones” [16]. Esto quiere decir que no son bosones (partículas con valores enteros de espín) ni tampoco fermiones (partículas con valores de espín fraccionario). Estas nuevas entidades cuánticas están entre los bosones y los fermiones. Pero, ¿cuál es la naturaleza de estas cuasipartículas con cargas fraccionarias? Una de las posibles explicaciones tiene raíces profundas en las teorías de entidades no lineales llamadas *solitones*, en las que las excitaciones colectivas del estado líquido (donde los

electrones tienen una fuerte correlación entre sí), origina el EHCF. Específicamente, ya existen evidencias de la existencia de texturas de espín cargadas en el efecto Hall cuántico llamados *skyrmiones* que son instantones con carga topológica en el espacio de fase [17].

Los instantones son solitones (algo semejante a ondas solitarias) que “viven” en un espacio euclidiano. Este último es un espacio-tiempo común, con la sola diferencia de que el tiempo ahora está multiplicado por el número imaginario $i = \sqrt{-1}$. El nombre de skyrmeon se les dio a estos solitones en honor al físico británico Skyrme, quien introdujo una idea paradójica “demencia” sobre partículas. Al estudiar la interacción no lineal de los campos mesónicos, descubrió que éstos pueden formar solitones, así propuso una hipótesis valiente: los solitones se deben considerar como si fueran los protones y neutrones que se observan experimentalmente. Esta hipótesis contradecía todas las teorías sobre partículas de entonces y tuvo que aislarse por más de 20 años hasta que nuevamente fue recordada.

La teoría de Skyrme es demencial porque el protón no puede estar formado de mesones, ya que entraría en contradicción con ciertas leyes de conservación de cargas. Se ha encontrado que el skyrmeon cercano al factor de llenado $\nu = 1/3$ es el estado relevante de la cuasipartícula en la presencia de un campo magnético intenso.

Estuvo claro desde el primer momento que la teoría de Landau era incapaz de explicar el EHCF, pues el factor de llenado $\nu = 1/3$ no presenta ninguna particularidad especial. La única explicación posible del EHCF debía tener en cuenta la repulsión Coulombiana entre los electrones, así como su interacción con el resto de los iones de la red. La dinámica de este complicado sistema está regida por el Hamiltoniano de interacción:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (\vec{p}_i - e\vec{A}_i)^2 + V(\vec{r}_j) + \sum_{j < k} \frac{e^2}{|r_j - r_k|}, \quad (12)$$

donde: $V(\vec{r}_j)$, es el potencial generado por el resto de los iones de la red. La solución exacta de los niveles de energía de este Hamiltoniano estaba en 1982, y en la actualidad también, fuera del alcance de los ordenadores más potentes, salvo para un pequeño número de electrones.

Un paso crucial en la teoría del efecto de Hall fraccionario fue la función de onda variacional propuesta por Robert Laughlin [5], para un sistema de N electrones en un disco. La función de onda de un sistema de muchas partículas para factores de llenado $\nu \leq 1$ puede escribirse como el determinante de Slater para los estados de una partícula:

$$\psi_{n_j}(z) = f(z) z^j L_n^j(|z|) \exp(-|z|^2/2), \quad (13)$$

donde: $z = (x + iy)/l_B$, es la coordenada compleja, L_n^j , un polinomio generalizado de Laguerre y $f(z)$, una función analítica.

Las funciones dadas por la ecuación (13) también son autofunciones del momento angular \vec{J} , por lo tanto:

$$H \psi_{nj} = \hbar \omega_c (n + 1/2) \psi_{nj}, \quad (14)$$

$$J \psi_{nj} = \hbar j \psi_{nj}. \quad (15)$$

Para $j \gg n$, la densidad de probabilidad $|\psi_{nj}|^2$ tiene la forma de $n + 1$ anillos concéntricos alrededor de un origen. El anillo exterior tiene un radio $r_{m\acute{a}x} \sim l_B \sqrt{j}$, así el mayor valor de j que puede ocurrir en un disco de radio R (y área $S = \pi R^2$) es:

$$j_{m\acute{a}x} = \frac{R^2}{l_B^2} = \frac{BS}{\phi_0}. \quad (16)$$

Como la energía del sistema no depende de j tenemos un $j_{m\acute{a}x}$ veces degenerado de cada nivel de Landau. En campos magnéticos muy altos es suficiente limitar la discusión al nivel de Landau más bajo, para el cual la función de onda de una partícula puede expresarse en la forma:

$$\Phi_m = f(z) z^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right). \quad (17)$$

Estas funciones son los autoestados del momento angular con un autovalor m . Dado que todos los Φ_m están degenerados, cualquier combinación lineal de ellos también es un autoestado aceptable.

Para el caso de dos partículas en los estados de momento angular más bajo, el determinante de Slater se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \psi(z_1, z_2) &= f(z) [(z_1)^0 (z_2)^1 \\ &\quad - (z_2)^0 (z_1)^1] \exp\left(-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{4}\right), \\ &= f(z) (z_1 - z_2) \exp\left(-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Luego, para N partículas en los estados de momento angular más bajo se tiene:

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(z) \prod_{i < j}^N (z_i - z_j) \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2\right). \quad (19)$$

La gran idea de Laughlin fue sugerir que la función de onda para el estado fundamental *apropiada* para el EHCF con un factor de llenado $\nu = 1/m$ tuviese la forma:

$$\psi_m = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2\right). \quad (20)$$

El único parámetro variacional en la ecuación (20) es m , que en el caso de Tsui y Störmer corresponde a $m = 3$. Laughlin llegó a esta función de onda considerando ciertos principios generales [17]:

(a) la función de onda estaría formada por los estados de una partícula, ya que los estados de una partícula son

polinomiales en z , el estado de muchas partículas también debería serlo.

(b) para minimizar la energía, la función de onda debería construirse a partir de la función de onda de un único electrón en el nivel de Landau más bajo, esto es, debería ser una función holomorfa hasta un factor de $e^{-z^2/4}$ por cada electrón. Este requisito es razonable si la escala de energía para la interacción es pequeña comparada con $\hbar \omega_c$.

(c) la función de onda deberá ser un autoestado del momento angular total, esto significa que la función holomorfa multiplicada por los factores Gaussianos debería ser un polinomio homogéneo en z . Ya que el momento angular conmuta con el Hamiltoniano, está condición se satisface si el estado fundamental es no degenerado (existe una brecha).

(d) la función de onda debería ser antisimétrica (dado que los electrones son fermiones), los valores de m están limitados a enteros impares que sean consistentes con la ausencia de platos a factores de llenado $\nu = p/m$, con m par.

Las funciones de onda (20), son solo funciones de la forma Jastrow:

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i < j}^N f(z_i - z_j), \quad (21)$$

las cuales satisfacen los requisitos anteriores. Por lo tanto, este argumento predice una serie de estados fundamentales discretos, correspondientes a los diferentes factores de llenado. La elección de esta forma para la función de onda variacional es realmente donde las interacciones repulsivas entre los electrones están incluidas; cualquier f con $f(0) = 0$ mantendrá las partículas separadas.

Una manera sencilla de encontrar el factor de llenado de la ecuación (20) es la siguiente. Dado que los electrones ocupan la muestra, el estado de momento angular más alto ocupado por una partícula siempre será el estado más alto en el primer nivel de Landau. Por otra parte, podemos calcular el momento angular máximo para una partícula de la ecuación (20); este es justamente la potencia máxima de cualquier z_k , la cual es $(2m + 1)(N - 1)$. Esto significa que el primer nivel de Landau contiene $\sim (2m + 1)N$ estados, mientras hay solo N electrones y de aquí que el factor de llenado sea $\nu = 1/(2m + 1)$.

Finalmente, la explicación del EHCF desde el punto de vista de las ideas Laughlin es que existen factores de llenado en los cuales el gas de electrones es particularmente estable y condensa dentro de un estado fundamental especial con alta correlación. Las ligeras desviaciones de estos factores de llenado resultan en excitaciones, cuasi-partículas con cargas fraccionarias. Como estas excitaciones se obtienen de las impurezas y el desorden presentes en la muestra, ellas no contribuyen a la corriente del sistema. Por lo tanto, la resistencia de Hall no cambia con este factor de llenado hasta que se alcanza el valor de llenado del próximo estado fundamental estable. Por el descubrimiento del EHCF y su desarrollo teórico, Laughlin, Störmer y Tsui compartieron el premio Nobel de Física en 1998.

V. CONCLUSIONES

Aunque existe un gran número de publicaciones referentes al tema en la literatura, son muy pocos los que tratan el efecto de Hall cuántico desde un contexto histórico-experimental. La mayoría tratan de explicarlo desde un punto de vista científico (físico-matemático), mientras que otros lo hacen desde un punto de vista meramente divulgativo.

Por la importancia del tema en la física de la materia condensada, es pertinente darlo a conocer como un tópico de la física contemporánea en los cursos de educación media y universitaria, aun cuando son muy pocos los textos (en estos niveles) en los que se encuentran presentes y discutidos con profundidad el efecto de Hall cuántico.

No son muchas las aplicaciones efecto de Hall cuántico, pero es importante señalar que la constante von Klitzing se usa actualmente como medida estándar de la resistencia eléctrica. Además, se puede medir con gran precisión la constante de estructura fina del electromagnetismo. Como futuro no muy lejano, podría ser posible realizar computación cuántica en el régimen del efecto de Hall cuántico fraccionario, donde los anyones (fermiones compuestos) son necesarios para su aplicación.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. NURR-C-606-15-05-B.

REFERENCIAS

[1] Hall, E. H., *On a new action of the magnet on electric currents*. Am. J. Math. **2**, 287-292 (1879).
[2] Agüero, M., Medina A., *Cargas Eléctricas Fraccionarias ¿Se podrá dividir al electrón?* Ciencia Ergo Sum **6**, 207-210 (1999).
[3] Klitzing, K., Dorda G, Pepper M., *New Method for Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on the Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494-497 (1980).

[4] Tsui, D. C., Störmer H. L., Gossard A. C., *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559-1562 (1982).
[5] Laughlin, R. B., *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395-1398 (1983).
[6] Maxwell, J. C., *A treatise on electricity and magnetism*, (Clarendon Press, Oxford, 1873).
[7] Rodríguez, V., *El efecto Hall cuántico y sus contextos*, SIENTIAE Studia **11**, 141-158 (2013).
[8] Hernández, F. L., *Estudio del efecto Hall cuántico en heteroestructuras semiconductoras desarrolladas en México para reproducir la unidad de resistencia eléctrica*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, (2006).
[9] Hidalgo, M. A., *Contribución al estudio de los efectos galvanomagnéticos en el gas de electrones bidimensional*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid, (2009).
[10] Laughlin, R. B., *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B **23**, 5632-5633 (1981).
[11] Halperin, B. I., *Quantized Hall conductance, current carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential*, Phys. Rev. B **25**, 2185-2190 (1982).
[12] Avron, J. E., Osadchy, D., Seiler, R., *A topological look at the Quantum Hall Effect*, Physics Today **56**, 38-42 (2003).
[13] Hofstadter, D. R., *Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields*, Phys. Rev. B **14**, 2239-2249 (1976).
[14] Büttiker, M., *Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors*, Phys. Rev. B **38**, 9375-9389 (1988).
[15] el Periódico, España 2019, disponible en <https://www.elperiodico.com/es/sociedad/20190510/el-premio-nobel-de-fisica-klaus-von-klitzing-lamenta-que-los-politicos-se-muestran-reacios-a-apoyar-la-ciencia-basica-7448664> visitado en julio 2020.
[16] Mravlje, J., *Anyons in the fractional quantum Hall effect*. Seminary Doctoral, Physics Department, University of Ljubljana, (2005).
[17] Sierra G., Martín M., *El efecto Hall fraccionario: un nuevo líquido cuántico*. Anales de la Real Sociedad Española de Química. Segunda Época, (1999).