UNA FÓRMULA CURIOSA

AUGUSTO SILVA S.
Profesor Titular
Programa de Matemáticas y Física
Universidad Surcolombiana

Tratándose de derivadas vamos a convenir que la derivada cero de una función f es la misma f, o sea $f^{(0)}=f$. Valen los resultados siguientes:

$$(f.g)' = (f.g)^{(1)} = fg' + gf' = f^{(0)}g^{(1)} + f^{(1)}g^{(0)}$$

$$(f.g)'' = (f.g)^{(2)} = (fg' + gf')' = fg'' + g'f' + gf'' + f'g' = f''g + 2f'g' + fg'' = f^{(2)}g^{(0)} + 2f^{(1)}g^{(1)} + f^{(0)}g^{(2)}$$

$$(f.g)''' = (f.g)^{(3)} = f^{(2)}g^{(1)} + g^{(0)}f^{(3)} + 2f^{(1)}g^{(2)} + 2g^{(1)}f^{(2)} + f^{(0)}g^{(3)} + g^{(2)}f^{(1)} = f^{(3)}g^{(0)} + 3f^{(2)}g^{(1)} + 3f^{(1)}g^{(2)} + f^{(0)}g^{(3)}$$

El objetivo de este artículo es mostrar una fórmula que permita calcular derivadas de orden alto, digamos 4, 5 ó más, de un producto de funciones sin tener que conocer las derivadas intermedias. El resultado es curioso, dado que guarda mucha analogía con la fórmula conocida con el nombre de Teorema del Binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En particular:

$$(a+b) = a + b = a^1 b^0 + a^0 b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 b^0 + 2ab + a^0 b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = a^3 b^0 + 3a^2 b + 3ab^2 + a^0 b^3$$

Obsérvense las analogías entre los coeficientes y los exponentes de $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ y las derivadas $(f.g)'$ $(f.g)''$ $(f.g)'''$. En general, se tiene el siguiente resultado : si f, g son funciones que admiten derivadas hasta de orden n entonces (f.g) también admite derivadas de orden n y además

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Al igual que en el caso del Teorema del Binomio, este resultado también se prueba por inducción. En efecto:

1. Es claro que el resultado vale para n=1.

2. Supongamos que el resultado vale para n y veamos su validez para n+1:

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} \left[f^{(n-k)} g^{(k)} \right]' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{K} \left[f^{(n-k)} g^{(k+1)} f^{(n-k+1)} \right]$$

$$= \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{K} g^{(k)} f^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{K=1}^{n+1} \binom{n}{K-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{K} g^{(k)} f^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \binom{n}{K-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n}{K} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n}{0} g^{(0)} f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{K} g^{(k)} f^{(n-k+1)}$$

$$= \overset{n+1}{\binom{K+1}{0}} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{K-1} + \binom{n}{K} \right] f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$$= \binom{K+1}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{K} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{K=0}^{n+1} \binom{n+1}{K} f^{(n-k+1)} g^{(k)}$$

A manera de ejemplo, la cuarta derivada de e^x sen x es :

$$(e^x \operatorname{sen} x)^{(4)} = (e^x)^{(4)} (\operatorname{sen} x)^{(0)} + 4(e^x)^{(3)} (\operatorname{sen} x)^{(1)} + 6(e^x)^{(2)} (\operatorname{sen} x)^{(2)} + 4(e^x)^{(1)} (\operatorname{sen} x)^{(3)}$$

$$+ (e^x)^{(0)} (\operatorname{sen} x)^{(4)} = e^x \operatorname{sen} x + 4e^x \cos x - 6e^x \operatorname{sen} x - 4e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$= 2e^x \operatorname{sen} x - 6e^x \operatorname{sen} x = -4e^x \operatorname{sen} x$$

BIBLIOGRAFÍA

1. APOSTOL, Tom. *Calculus.* Volumen I, Editorial Reverté, 1976
2. COURANT, R., Robbins, H., *¿Qué es la matemática?.* Editorial Aguilar, 1976
3. RAINVILLE, Earl D., *Ecuaciones diferenciales elementales.* Editorial Trillas, 1979