PANORAMICA GENERAL SOBRE PREFERENCIAS Y UTILIDAD

Esteban Induráin Eraso

RESUMEN.—Estudiamos de manera general el concepto de preferencia como sistema de *escala cualitativa*, comparación u ordenación entre los elementos de un determinado conjunto. A continuación analizamos el problema de representación de una preferencia a través de una *escala cuantitativa*, o numérica, a partir de la búsqueda de adecuadas funciones, que se denominan *funciones de utilidad*, con dominio en el conjunto sobre el que está definida la preferencia y rango en determinados conjuntos de números reales. Hacemos un recorrido por las distintas ramificaciones que aparecen al abordar este problema general, en lo que se conoce como *teoría de la utilidad.*

1. INTRODUCCION

Una de las ideas clave (quizá la que justifica toda la teoría, y su razón de ser), de la *teoría de la utilidad* es la búsqueda de representaciones numéricas de estructuras ordenadas, pasando así de escalas *cualitativas* establecidas a partir de preferencias, comparaciones, opiniones, juicios de valor, etc., a escalas *cuantitativas* basadas en números, cantidades, valores, etc. (a los que, en ocasiones, se les dará alguna interpretación más cotidiana, como *precios,* presupuestos, etc.).

Si bien la teoría tiene ramificaciones importantes, e incluso clásicas (como, por ejemplo, la teoría de Von-Neumann-Morgenstern, la teoría de decisión bajo riesgo o incertidumbre, la teoría de la *libertad de elección*, etc.) podemos entender que el problema básico es el siguiente: X es un conjunto no vacío dotado de algún tipo de ordenación «$\precsim$» total o parcial, o incluso, de una *preordenación* (relación binaria *reflexiva:* $x \precsim x$, para todo $x \in X$ y *transitiva:* $x \precsim y,\ u \precsim z \Rightarrow x \precsim z\ (x, y, z \in X)$ definida sobre X). Se trata entonces de interpretar la estructura $(X, \precsim)$ como una subestructura de la recta real, ordenada con su orden natural, $(\mathbb{R}, \leq)$. Por ejemplo, en el caso de que $\precsim$ sea un preorden completo (relación binaria reflexiva, transitiva y *completa o total:* para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$ ocurre ora que $x \precsim y$ ora que $y \precsim x$), se tratará de buscar *isotonías* entre $(X, \precsim)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$. Es decir, el objetivo es encontrar funciones $u : X \to \mathbb{R}$ tales que $x \precsim y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$ $(x, y \in X)$. A tales funciones «u» (en caso de que existan, por supuesto) se les denomina habitualmente *funciones de utilidad.*

Nótese que la mera existencia de una función de utilidad $u : (X, \precsim) \to (\mathbb{R}, \leq)$ nos impone de entrada fuertes restricciones sobre «$\precsim$». que no puede ser ya cualquier tipo de ordenación o preordenación. Resulta fácil darse cuenta de que si una función de utilidad «u» existe, entonces «$\precsim$» es a fortiori, un preorden completo. Queda por tanto, como problema a dilucidar, si todo preorden completo es o no es *representable a través de una función de utilidad.*

El tipo de problema abordado aquí fue planteado y estudiado ya por Georg Cantor, a finales del siglo XIX. (Véase Cantor [1895, 1897]). Cantor obtiene ya resultados significativos para el caso de conjuntos *finitos o numerables.* En esencia, Cantor sienta las bases del siguiente resultado clásico, a él atribuido, aunque las primitivas y quizá algo incompletas demostraciones que dio en Cantor [1895, 1897] han sido notablemente mejoradas en trabajos posteriores. (Véase, por ejemplo, Kamke [1950], p. 71. Para alguna extensión y profundización véase Bridges y Mehta [1995], pp. 17 y ss.):

TEOREMA 1 *(Cantor):*

La estructura ordenada $(\mathbb{Q}, \leq)$ de los números racionales con su orden natural contiene isotónicamente a cualquier conjunto totalmente ordenado finito o numerable.

(Nota: Por *orden total* se entiende un preorden completo $\precsim$ verificando la propiedad *antisimétrica:* $x \precsim y, y \precsim x \Rightarrow x = y$ $(x, y \in X)$).

En otras palabras, diríamos que siendo $(Z, \precsim)$ una estructura ordenada donde Z es un conjunto finito o numerable, y «$\precsim$» es un orden total, existe siempre una función de utilidad $u : (Z, \precsim) \to (\mathbb{Q}, \leq)$.

Resuelta la cuestión para conjuntos finitos o numerables se plantearía el hacer lo mismo para el caso *no numerable.* Aquí cabe decir que ya no es cierto que cualquier conjunto totalmente ordenado vaya a ser representable a través de una función de utilidad. Y, por tanto, hay que buscar alguna condición que *caracterice* la existencia de funciones de utilidad en conjuntos dotados de un preorden completo o, cuando menos, en conjuntos totalmente ordenados. Caracterizaciones de tal tipo fueron introducidas en la literatura a finales de los años treinta, ya en nuestro siglo XX, por supuesto. (Véase Milgram [1939] o Birkholff [1940]).

Comentaremos con detalle, más adelante, este tipo de caracterizaciones. Pero antes, en la sección siguiente, vamos a analizar otra cuestión relacionada con lo anterior: Como ya hemos dicho, con funciones de utilidad solamente tendrá sentido representar preórdenes completos (y, en particular, órdenes totales). Evidentemente, sucede así que no disponemos de *representaciones numéricas adecuadas* para otros tipos de *preferencias* «$\prec$» sobre un conjunto no vacío X (entendiendo preferencia como relación binaria *asimétrica:* $x \prec y \Rightarrow \neg(y \prec x), (x, y \in X))$, que ya no necesariamente van a dar lugar a preórdenes completos. (Nota: Dada una relación binaria «$\precsim$» sobre un conjunto X le podemos asociar dos nuevas relaciones «$\prec$» y «$\sim$» dadas por $x \prec y \Leftrightarrow \neg(y \precsim x)$; $x \sim y \Leftrightarrow x \precsim y, y \precsim x$. Por otra parte, dada una relación «$\prec$» le podemos asociar otra «$\precsim$» mediante $x \precsim y \Leftrightarrow \neg(y \prec x)$. Resulta un bonito e interesante ejercicio estudiar los vínculos entre las relaciones que van apareciendo: Por ejemplo, de una «$\precsim$» se obtiene una «$\prec$», y, de ésta, otra «$\precsim_2$». ¿Coincide esta última con la primitiva «$\precsim$»?).

La discusión previa a la nota anterior indica que la técnica de las funciones de utilidad es sólo una más de las que podríamos emplear para pasar de escalas cualitativas a escalas cuantitativas. Y no hay razón alguna para pensar que es la única técnica. Por poner algún ejemplo, podríamos pensar en una relación binaria «$\precsim$» sobre un conjunto X, y una función del siguiente tipo, que se conoce como *aplicación bivariante,* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ de forma que se tenga, ponemos por caso, que $x \precsim y \Leftrightarrow F(x, y) > 1$. Este análisis de la representación mediante aplicaciones bivariantes es bastante más general que el que se realiza mediante funciones de utilidad. Ha sido estudiado en Candeal, Induráin y Olóriz [1996 a, b] y también en Rodríguez-Palmero [1996 a, b].

Por otra parte, y aun quedándonos en el contexto de funciones de utilidad, cabe estudiar la existencia de funciones de utilidad que tengan *propiedades adicionales* que, a su vez, guarden relación con propiedades adicionales de la estructura considerada que esté analizando. Por ejemplo, si el conjunto X está dotado de una operación interna asociativa «$*$» puede tener sentido buscar funciones de utilidad «u» que además de preservar el orden preserven esa estructura algebraica, en el sentido de que sean *homomorfismo algebraico* de $(X, *)$ en, ponemos por caso, la recta real aditiva $(\mathbb{R}, +)$, es decir: $u(x * y) = u(x) + u(y)$ $(x, y \in X)$.

También podemos buscar funciones de utilidad que vengan dadas a través de ciertas construcciones matemáticas determinadas, técnicas. Por ejemplo se trataría de encontrar utilidades que vengan inducidas a través de una *medida*. A ello nos dedicaremos en las sucesivas secciones del presente trabajo.

2. ANALISIS DE LA PREFERENCIA: TIPOS DE REPRESENTACIONES NUMERICAS PARA RELACIONES BINARIAS

Estudiamos ahora el problema de la búsqueda de representaciones numéricas de ordenaciones o preordenaciones, en un sentido general. Este contexto matemático se suele denominar *análisis de la preferencia*. Y consiste en estudiar qué tipos de relaciones binarias definidas sobre un conjunto, y que reflejen una idea de *preferencia*, pueden llegarse a considerar, y después, qué tipos de representación numérica podemos diseñar para cada tipo de relación binaria considerado. Un detallado análisis al respecto aparece en Subiza [1992].

En general suelen tomarse distintos tipos de *ordenaciones*, (relaciones reflexivas, antisimétricas y transitivas) o *preordenaciones* (relaciones reflesivas y transitivas), pero para llegar a ello hay que ir considerando distintas hipótesis de *racionalidad* acerca de nuestra idea de «preferir». Así, si X es un conjunto no vacío, y lo dotamos de una relación binaria «$\mathcal{P}$» de manera que $x\,\mathcal{P}y$ signifique «x es peor que y», y además entendemos las preferencias en sentido *estricto*, cabe exigir que $\mathcal{P}$ cumpla condiciones como:

i) *Irreflexividad:* $\neg(x\mathcal{P}x)\ (x \in X)$,
ii) *Asimetría:* $x\mathcal{P}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{P}x)\ (x, y \in X)$,
iii) *Transitividad:* $x\mathcal{P}y,\ y\,\mathcal{P}z \Rightarrow x\mathcal{P}z\ (x, y, z \in X)$,
iv) *Transitividad negativa:* $\neg(x\mathcal{P}y),\ \neg(y\mathcal{P}z) \Rightarrow \neg(x\mathcal{P}z)\ (x, y, z \in X)$,
v) *Completitud o totalidad:* Dados $x, y \in E$ con $x \neq y$ debe ocurrir que o bien $x\,\mathcal{P}y$ o bien $y\,\mathcal{P}x$,
vi) *Aciclicidad:* $x_1\,\mathcal{P}x_2,\ x_2\,\mathcal{P}x_3, \ldots, x_{n-1}\,\mathcal{P}x_n \Rightarrow \neg(x_n\,\mathcal{P}x_1)\ (x_1, \ldots, x_n \in X)$,

Obviamente, exigir que $\mathcal{P}$ cumpla a la vez todas las condiciones anteriores puede ser demasiado exigir. En consecuencia, se empieza por el estudio de relaciones binarias *asimétricas*, sin exigir nada más, y se va gradualizando, imponiendo otras condiciones hasta llegar a alguna $\mathcal{P}$ que, en una situación óptima de racionalidad, verifique todas las condiciones anteriores.

En lo que sigue, llamaremos *preferencia estricta* a una relación binaria asimétrica (y por tanto irreflexiva) definida sobre un conjunto no vacío X. Asociada a una preferencia estricta, consideraremos la relación «$\mathcal{R}$» de *preferencia débil* dada por $x\,\mathcal{R}y \Leftrightarrow \neg(y\mathcal{P}x)$, así como la relación de *indiferencia* «I» dada por $x\ Iy \Leftrightarrow x\mathcal{R}y,\ y\,\mathcal{R}x$. Con estas nuevas definiciones, cabe exigir mayores condiciones de racionalidad a la tripleta $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, I)$. Por ejemplo, puede ser necesario exigir que las tres sean transitivas a un tiempo, o que se verifique $x\mathcal{P}y,\ y\,\mathcal{R}z \Leftrightarrow x\mathcal{P}z\ (x, y, z \in X)$, o que se verifique $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{P}y$ o bien $x\ Iy\ (x, y \in X)$, etc. El análisis de tales propiedades de racionaldad acaba concluyendo que *la situación óptima de racionalidad se da cuando $\mathcal{P}$ es asimétrica y negativamente transitiva*. Aparece así el siguiente resultado:

TEOREMA 2

i) *$\mathcal{P}$ es asimétrica y negativamente transitiva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ es un preorden completo,*
ii) *$\mathcal{R}$ es un orden total $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$ es asimétrica, negativamente transitiva y total.*

Además, si $\mathcal{P}$ es asimétrica y negativamente transitiva, la relación de indiferencia asociada, I, es *de equivalencia* (es decir, es reflexiva, *simétrica:*

$x\ I\ y \Rightarrow y\ I\ x\ (x,\ y \in X)$, y transitiva). Eso permite definir una relación $\mathcal{P}^*$ sobre el conjunto cociente X/I cuyos elementos son las clases de equivalencia que I induce sobre X, esto es $[x] = \{y \in X : y\ I\ x\}$, donde $[x]$ representa la clase de equivalencia del elemento $x \in X$. Se define $[x]\mathcal{P}^*[y] \Leftrightarrow x\mathcal{P}y$. Es fácil ver que $(\mathcal{P}^*)$ es una orden total, y que la estructura $(X,\ \mathcal{P})$ es una estructura representable a través de una función de utilidad si y sólo si la estructura $(X/I,\ \mathcal{P}^*)$ es representable a través de una función de utilidad. En otras palabras, se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 3

El problema de hallar funciones de utilidad que representen preórdenes completos es equivalente al problema de encontrar funciones de utilidad que representen órdenes totales.

Esta sencilla observación aparece en distintos artículos y trabajos sobre utilidad, como, por ejemplo, Tangyan [1988], o Candeal e Induráin [1990 a].

Lo anterior corresponde, por tanto, a una situación de racionalidad óptima que nos permite trabajar con preórdenes completos, órdenes totales y, si existen, funciones de utilidad. Pero, como ya indicamos, entre la mera definición de preferencia estricta como una relación binaria asimétrica, y la situación de racionalidad óptima que hemos considerado, aparece toda una gama gradual de situaciones intermedias. Describimos a continuación alguna de las posibilidades intermedias con las que nos podemos encontrar, así como el tipo de representación numérica que se le intenta encontrar a cada una de esas situaciones intermèdias.

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto no vacío, y sea $\mathcal{S}$ una relación binaria definida sobre X. Diremos que $\mathcal{S}$ es:

a) una relación de *preferencia estricta* si es asimétrica,

b) una *preorden* si es reflexiva y transitiva,

c) un *preorden completo* si es reflexiva, transitiva, y completa,

d) un *orden total* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva,

e) un *orden-intervalo* si es asimétrica y además se verifica que para cualesquiera $x,\ y,\ z,\ t \in X$ con $x\mathcal{S}y$, $z\mathcal{S}t$ ocurre que o bien $x\mathcal{S}t$ o bien $z\mathcal{S}y$,

f) un *semiorden* si es un orden-intervalo y además ocurre que para cualesquiera $x,\ y,\ z \in X$ con $x\mathcal{S}y$ e $y\ \mathcal{S}\ z$ se tiene que, para todo $t \in X$ es $x\mathcal{S}t$ o bien es $t\mathcal{S}z$.

No es difícil observar entonces que se dan las siguientes cadenas de implicaciones estrictas. (Para mayor información puede consultarse Subiza [1992]).

TEOREMA 4

Sea Z un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ *una relación binaria definida sobre X. Entonces*

i) $\mathcal{S}$ *es orden total* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es preorden completo* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es preorden.*

ii) $\mathcal{S}$ *es asimétrica y negativamente transitiva* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es semiorden* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es orden-intervalo* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es una relación irreflexiva y transitiva* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es una relación acíclica* $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ *es una preferencia estricta.*

Veamos ahora qué tipo de representaciones podemos alcanzar para los tipos de relaciones binarias así definidos.

DEFINICIÓN: Sea $\mathcal{S}$ una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío X. Decimos entonces que:

i) $(X, \mathcal{S})$ es *representable por una función de utilidad* si existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ $(x, y \in X)$.

ii) $(X, \mathcal{S})$ es *representable por intervalos* si existen $u, v : X \to \mathbb{R}$ tales que $u(x) \leq \vartheta(x)$ para todo $x \in X$ y además $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \vartheta(x) < u(y)$ $(x, y \in X)$. (Nota: El nombre de *representación por intervalos* se debe a que cada $x \in X$ tiene asignado un intervalo de números reales, a saber $[u(x), v(x)]$).

iii) $(X, \mathcal{S})$ es *representable por intervalos de longitud constante* si existen una función $u : X \to \mathbb{R}$ y un número real $P \geq 0$ tales que $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow u(x) + P < u(y)$ $(x, y \in X)$.

iv) $(X, \mathcal{S})$ *admite una utilidad débil* si existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{S}y \Rightarrow u(x) < u(y)$ $(x, y \in X)$.

Recordemos también que una *correspondencia* entre dos conjuntos no vacíos X e Y es una aplicación F de X en el conjunto de las partes de Y, de forma que F asigna a cada elemento $x \in X$ un *subconjunto* $F(x) \subseteq Y$. En el caso particular en que cada subconjunto $F(x)$ conste de un solo elemento, recuperamos el concepto de aplicación entre X e Y.

A través de correspondencias podemos también representar ciertas relaciones de preferencia. Damos para ello la siguiente definición.

DEFINICIÓN: Sea $\mathcal{S}$ una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío X. Decimos entonces que:

i) $(X, \mathcal{S})$ *admite una representación mediante conjuntos* si existe una correspondencia F de X a $\mathbb{R}$ de forma que $F(x)$ es un conjunto no vacío y acotado para todo $x \in X$ y además $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow F(x)$ está contenido estrictamente en $F(y)$ y se cumple que $supF(x) < supF(y)$.

ii) $(X, \mathcal{S})$ *admite una representación mediante correspondencia de utilidad* si existe una correspondencia F de X a $\mathbb{R}$ de forma que $F(x)$ es un conjunto no vacío y acotado para todo $x \in X$ y además $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow F(x)$ tiene intersección vacía con $F(y)$ y se verifica que $supF(x) < supF(y)$.

En Subiza [1992] se establecen los siguientes teoremas. (Obsérvese que estos teoremas exigen que X sea un conjunto *finito o numerable*).

TEOREMA 6

Sea (X, $\mathcal{S}$) *un conjunto finito o numerable y* $\mathcal{S}$ *una relación binaria asimétrica definida sobre X. Entonces, se tiene:*

i) *(X,* $\mathcal{S}$*) es representable mediante una función de utilidad inyectiva si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es un orden total sobre X.*

ii) *(X,* $\mathcal{S}$*) es representable mediante una función de utilidad si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es un preorden completo definido sobre X.*

TEOREMA 6

Sea X un conjunto finito o numerable y $\mathcal{S}$ *una relación binaria asimétrica definida sobre X. Entonces, se tiene:*

i) *(X,* $\mathcal{S}$*) es representable mediante intervalos si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es un orden-intervalo.*

ii) *(X,* $\mathcal{S}$*) es representable mediante intervalos de longitud constante si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es un semiorden.*

iii) (X, $\mathcal{S}$) *admite una representación mediante conjuntos si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es irreflexiva y transitiva.*

iv) *(X,* $\mathcal{S}$*) admite una correspondencia de utilidad si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es acíclica.*

En general, lo que se afirma en los teoremas anteriores 5 y 6 deja de ser válido en el caso *no numerable.* Como cuando hablamos de funciones de utilidad se necesita alguna condición adicional que caracterice la existencia de la representación correspondiente. A tal respecto, nosotros nos vamos a centrar en el estudio, más clásico, de condiciones que garanticen la existencia de *funciones de utilidad* sobre conjuntos no vacíos dotados de un orden total o preorden completo. Podemos añadir que, además de en el mencionado trabajo Subiza [1992], hay una amplia literatura a base de estudios particulares sobre los distintos tipos de representaciones y sus preferencias asociadas. Por ejemplo, en Luce [1956] y más recientemente en Pirlot [1991] se estudia el concepto de semiorden. En el capítulo 6 de Bridges y Mehta [1995] se analiza profusamente el concepto de orden-intervalo. En Peleg [1970] se analizó la existencia de utilidades débiles para representar preórdenes no necesariamente completos. En Peris y Subiza [1995] se analiza la representación de preferencias acíclicas, etc.

3. EXISTENCIAS DE FUNCIONES DE UTILIDAD PARA CONJUNTOS TOTALMENTE ORDENADOS

Ya hemos indicado que los problemas de existencias de funciones de utilidad, que usualmente se plantean para estructuras en las que aparece un preorden completo, pueden trabajarse, de manera equivalente, mediante estructuras totalmente ordenadas.

Así, en lo que sigue X será un conjunto no vacío y totalmente ordenado a través de una relación «$\precsim$*» en él definida.*

Comentamos ya que cuando X es finito numerable, existe siempre una función de utilidad «u» que representa $(X, \precsim)$, y que, en el caso no numerable, hacía falta alguna *condición adicional que caracterizase la representabilidad.* Condiciones de este tipo fueron apareciendo paulatinamente en la literatura. Podemos catalogarlas en dos tipos: Por un lado aparecen *condiciones ordinales*, que dependen de la existencia de ciertos subconjuntos finitos o numerables de X con determinadas propiedades de densidad, que más adelante pasaremos a definir, y *condiciones topológicas* que tienen que ver con alguna topología que será introducida sobre el conjunto X. En principio, las primeras condiciones sólo dependerán de la relación binaria «$\precsim$» definida sobre X. En cambio, las segundas, dependen expresamente de la introducción de determinadas topologías. Cabe decir, sin embargo, que también las primeras condiciones que veremos pueden entenderse como «topológicas», en relación con una topología muy natural, a saber, la *topología del orden*, que surge de manera espontánea en todo conjunto no vacío totalmente ordenado. A pesar de esta observación, la clasificación de condiciones en estos dos tipos (ordinal y topológico) no es arbitraria, ya que tienen su importancia, aunque sólo fuera desde el punto de vista histórico. Es justo reconocer que el análisis *topológico* de la teoría de la utilidad aparece en la literatura mucho más tarde que la mera obtención de alguna condición, habitualmente ordinal, que caracterice la existencia de funciones de utilidad. Para una mayor información sobre enfoques equivalentes de la teoría de la utilidad puede consultarse Herden [1995].

Una primera observación, desde el punto de vista de la *teoría de conjuntos (axiomática)* nos indica ya que no va a ser posible que cualquier conjunto totalmente ordenado pueda *ser encajado*, mediante una función de utilidad, en la recta real con su orden natural. La razón es que hay conjuntos *«mucho más grandes»* que $\mathbb{R}$. En efecto, podemos pensar en un conjunto X cuya cardinalidad sea estrictamente mayor que la del continuo $\mathbb{R}$. Y dotar a X de una buena ordenación ($\precsim$) que existirá si admitimos el principio de la buena ordenación como axioma de la teoría de conjuntos. Es obvio entonces que $(X, \precsim)$, no puede ser representado en $(\mathbb{R}, \leq)$ por una función de utilidad. Es, claramente, «demasiado grande» para ello. Esto hace que se consideren condiciones que «limiten el tamaño del conjunto X». Ese tipo de condiciones se reflejan, intuitivamente, en la existencia de adecuados «subconjuntos pequeños cuyos elementos están repartidos por todo el conjunto X», lo que técnicamente corresponde a *condiciones de densidad en el orden o de densidad topológica*.

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto no vacío dotado de un orden total «$\precsim$». Diremos que la estructura $(X, \precsim)$ es *separable* si existe un subconjunto *finito o numerable* $C \subseteq X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$ (recuérdese que $x \prec y \Leftrightarrow \neg(y \precsim x)$), y tal que además el conjunto $(x, y) = \{t \in X: x \prec t \prec y\}$ sea no vacío, se verifica que existe $z \in C$ con $x \prec z \prec y$.

Diremos que la estructura $(X, \precsim)$ es *perfectamente separable* si existe un subconjunto *finito o numerable* $C \subseteq X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$, se verifica que existe $z \in C$ con $x \precsim z \precsim y$.

Diremos que la estructura $(X, \precsim)$ es *sin huecos* si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$, se verifica que el conjunto $(x, y) = \{t \in X : x \prec t \prec y\}$ es no vacío.

Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice *acotado superiormente* si existe $a \in X$ tal que $z \precsim a$, para todo $z \in A$. Análogamente se define el concepto de *conjunto acotado inferiormente*. Un elemento $a \in X$ se dice *supremo* del conjunto $A \subseteq X$ si ocurre que para todo $z \in A$ es $z \precsim a$, y además, para todo $b \in X$ con $z \precsim b$ para todo $z \in A$, debe verificarse que $a \precsim b$. Análogamente se define el concepto de *ínfimo* de un subconjunto $A \subseteq X$.

Diremos que la estructura $(X, \precsim)$ es *Dedekind completa* si para cualquier subconjunto de X acotado superiormente existe un supremo.

Nota: Como puede observarse, estas condiciones son de tipo *ordinal.*

Aparece la siguiente caracterización acerca de la existencia de representaciones de utilidad para una estructura $(X, \precsim)$ donde X es un conjunto no vacío y «$\precsim$» es una ordenación total definida sobre X:

TEOREMA 7

$(X, \precsim)$ es representable a través de una función de utilidad si y sólo si es perfectamente separable.

La prueba de este hecho aparece en Milgram [1939] o bien en Birkhoff [1940]. Demostraciones más modernas aparecen en Birkhoff [1967], p. 200, th. 24, o en Jaffray [1975]. Un análisis exhaustivo y detallado acerca de distintas maneras de probar el teorema anterior aparece en los primeros capítulos de Bridges y Mehta [1995]. También es interesante la lectura de Herden y Mehta [1994].

Una idea brillante al estudiar las condiciones ordinales que pueden llegar a caracterizar la existencia de funciones de utilidad que representen una estructura $(X, \precsim)$, donde X es un conjunto no vacío y «$\precsim$» es una relación de orden total definida sobre X es la introducción del concepto de *hueco* antes mencionado. Recordemos que un hueco en $(X, \precsim)$ es una pareja de elementos $x, y \in X$ con $x \prec y$, y de forma que no exista ningún $z \in X$ con $x \prec z \prec y$. El porqué de la importancia de este concepto se ve cuando se piensa que una función de utilidad que represente a $(X, \precsim)$, supuesto que tal función de utilidad exista, ha de «respetar el hueco» en el sentido de que si los elementos $x, y \in X$ generan un hueco en $(X, \precsim)$, en la imagen $u(X)$ entendida como subconjunto ordenado de $(\mathbb{R}, \leq)$ nos aparecerá también un hueco generado por $u(x)$ y $u(y)$. Y claro está, el número posibe de huecos que pueden aparecer en un subconjunto ordenado de la recta real es siempre finito o numerable, puesto que entre cualesquiera dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ podemos encontrar un número racional $c \in \mathbb{Q}$, y el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.

Así, *un conjunto totalmente ordenado que tenga una cantidad no numerable de huecos no podrá ser nunca representado mediante una función de utilidad.* Un ejemplo de esta situación es el conjunto $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$, con el orden lexicográfico «$\precsim_L$» definido por $(a, b) \precsim_L (c, d) \Leftrightarrow a < c$ o bien $a = c$, $b \leq d$. Este ejemplo aparece ya en Wakker [1988]. También ha sido explotado en Candeal e Induráin [1990 b] y en Subiza [1992].

Aunque una estructura de orden total $(X, \precsim)$ no posea ningún hueco, no podemos garantizar aún que vaya a ser representable mediante una función de utilidad. Hace falta algo más. Un ejemplo de un conjunto totalmente ordenado y sin huecos que no es representable es el *plano lexicográfico* $(\mathbb{R}^2, \precsim_L)$. Aquí lo que ocurre es que de existir una función de utilidad representando la estructura anterior, esta función debe mandar cada recta vertical del plano $\mathbb{R}^2$ en un intervalo abierto de la recta real, y de manera que dos rectas verticales distintas vayan a parar a dos intervalos abiertos distintos. Ocurre entonces que el conjunto de rectas verticales del plano es no numerable, mientras que cualquier colección de intervalos abiertos disjuntos dos a dos de la recta real $\mathbb{R}$ es forzosamente finita o numerable, puesto que cada intervalo contendrá un número racional. Esto hace que no pueda existir tal función de utilidad, y que el plano lexicográfico, en consecuencia, no sea representable. Este ejemplo aparece ampliamente estudiado y aprovechado en Debreu [1959, 1973]. Se trata de un ejemplo clave, que se menciona también en muchos otros trabajos, como por ejemplo, Birkhoff [1967], p. 201, exercise 4.

La condición que falta al hecho de que el número de huecos sea finito o numerable para que una estructura totalmente ordenada sea representable por una función de utilidad es que sea *separable*. Aparece así el teorema siguiente:

TEOREMA 8

Una estructura totalmente ordenada $(X, \precsim)$ es representable a través de una función de utilidad si y sólo si es separable y posee una cantidad a lo más numerable de huecos.

La prueba de este hecho aparece, por ejemplo, en Candeal e Induráin [1990 b]. Puede consultarse alguna idea adicional en Fishburn [1983].

Hasta aquí hemos presentado fundamentalmente la línea *ordinal* de caracterizaciones de la existencia de funciones de utilidad. Pasamos ahora acomentar la línea *topológica*, cuya idea subyacente es la consideración de alguna topología τ sobre la estructura totalmente ordenada $(X, \precsim)$, y la búsqueda de funciones de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que sean *continuas* cuando consideramos sobre X la topología τ y sobre $\mathbb{R}$ la *topología usual*. Es necesaria aquí la observación de que las caracterizaciones ordinales que nos hemos encontrado antes pueden ser interpretadas desde un punto de vista topológico si dotamos a la estructura totalmente ordenada $(X, \precsim)$ de una topología que aparece de modo natural, imitando la topología usual de $\mathbb{R}$ a base de abiertos básicos del tipo (a, b). Esta topología en $(X, \precsim)$ se llamará *topología del orden*. La denotaremos «θ». Una subbase de la misma la constituyen los conjuntos del tipo $\{\{(\leftarrow, a) = \{x \in X : x \prec a\} \cup \{(b, \rightarrow) = \{x \in X : b \prec x\}\}_{a,b \in X}$. Con esta topología alguna de las condiciones ordinales anteriores se traduce en alguna propiedad de *densidad o de separabilidad* de la tología θ. Sin ir más lejos, el concepto de «separable» antes definido se corresponde exactamente con el hecho de que la topología θ sea separable (es decir: exista un subconjunto finito o numerable que corte a cualquier θ-abierto). Otra propiedad interesante es que la topología θ hace de X un conjunto *conexo* si y solamente si la estructura $(X, \precsim)$ es Dedekind completa y sin huecos, conceptos ambos que se introducen en el contexto ordinal. Este es un hecho bien conocido, que aparece, por ejemplo, en Jameson [1974], p. 52, o también en Candeal e Induráin [1990 a].

En el marco de las caracterizaciones *topológicas* de la existencia de funciones de utilidad que representan estructuras totalmente ordenadas, justo es reconocer a G. Debreu como pionero e introductor de estas ideas, cuando menos en el contexto propio de la economía teórica. A tal respecto sus trabajos relativos al tema (Debreu [1954, 1959, 1964]) constituyen una referencia obigada. Cabe añadir, sin por ello restar ningún mérito a Debreu, que este tipo de técnicas topológicas para el estudio de estucturas ordenadas tiene *precedentes* importantes en los trabajos de Eilenberg [1941] y Nachbin [1950, 1965]. En este tipo de trabajos se prueban, entre otras cosas, los resultados siguientes:

TEOREMA 9: *Eilenberg-Debreu*

i) *Para que una estructura totalmente ordenada $(X, \precsim)$ y dotada de una topología «τ» sea representable por una función de utilidad continua $u : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, usual)$ es condición suficiente que τ verifique el segundo axioma de numerabilidad (existencia de una base numerabe de la topología).*

ii) *Para que una estructura totalmente ordenda $(X, \precsim)$ y dotada de una topología «τ» sea representable por una función de utilidad continua $u : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, usual)$ es condición suficiente que τ sea conexa y separable.*

Uno de los resultados más relevantes del contexto de Debreu, que probablemente es su resultado estrella en esta teoría de la existencia de funciones de utilidad, y el cual, sin embargo, no parece ser suficientemente conocido y utilizado, es el denominado *«open gap lemma»*. La idea que busca Debreu es el paso mediante alguna técnica adecuada de una función de utilidad a una función de utilidad continua. Esto es, puede que una estructura ordenada $(X, \precsim)$ dotada de una topología «τ» admita una función de utilidad «u», pero lo que no está tan claro a priori es que u vaya a ser continua. Lo que Debreu analiza, entonces, es la posibilidad de modificar u de manera que se llegue a otra función de utilidad v que, esta sí, resulte ya continua. Debreu caracteriza cuándo se puede hacer esto, en virtud de un resultado que se conoce como el *«lema del hueco abierto»* («open gap lemma», en inglés). Veremos inmediatamente qué dice el «open gap lemma». (Para más detalles puede consultarse Debreu [1964], Bowen [1968], Beardon [1992], Beradon y Mehta [1994 a,b] o finalmente Bridges y Mehta [1995].

DEFINICIÓN: Denotemos con $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ la recta real extendida. Un *conjunto degenerado en* $\bar{\mathbb{R}}$ es uno que tenga a lo sumo un elemento. Un *gap (o hueco)* de un subconjunto S de $\bar{\mathbb{R}}$ es un intervalo no degenerado maximal disjunto con S y con alguna cota inferior y alguna cota superior en S. Un intervalo de $\bar{\mathbb{R}}$ de la forma $(a, b]$ o bien $[a, b)$ se dice *semi-abierto semi-cerrado.*

TEOREMA 10: *(Lema del hueco abierto («open gap lemma») de Debreu)*

i) *Si S es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$, existe una función estrictamente creciente $g : S \to \mathbb{R}$ de forma que los huecos (gaps) que origina en $g(S)$ son todos abiertos.*

ii) *Sea $(X, \precsim)$ una estructura totalmente ordenada representable por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$. Si $u(X)$ no tiene huecos semi-abiertos semi-cerrados, entonces u es continua como aplicación que va de (X, θ) a $(\mathbb{R}$, usual).*

Un *corolario inmediato* del teorema anterior es el siguiente:

TEOREMA 11

Si sobre una estructura ordenada $(X, \precsim)$ se considera la topología del orden θ entonces la existencia de una función de utilidad u: $(X, \precsim) \to (\mathbb{R}, \leq)$ es equivalente a la existencia de una función de utilidad v continua cuando en X se considera la topología θ, y en $\mathbb{R}$ la usual.

Veamos a continuación algún otro resultado que aparece en el contexto *topológico.* Una buena colección de este tipo de resultados puede verse en Candeal e Induráin [1990 b]. Un análisis exhaustivo de propiedades topológicas relativas a preferencia y utilidad aparece también en Rodríguez-Alcantud [1995 a,b,c, 1996] y Rodríguez-Alcantud y Gutiérrez [1995 a,b]. Por otra parte, estos estudios pueden completarse con consideraciones acerca de la *derivabilidad, diferenciabilidad, o uniformidad* de ciertas familias de funciones de utilidad. A tal respecto cabe consultar el capítulo 7 de Bridges y Mehta [1995], así como Besada y Vázquez [1994], Mc Lennan [1995] y Vázquez [1995].

Pasamos ya a enunciar algún nuevo resultado de caracterización topológica de la existencia de funciones de utilidad. Antes necesitamos algunas definiciones. (Para más detalles sobre los conceptos definidos y otros conceptos topológicos empleados, recomendamos la consulta de Dugundji [1996]).

DEFINICIÓN: Sea $(X, \precsim)$ una estructura totalmente ordenada.

i) Decimos que es *contablemente acotada* si existe un subconjunto $C \subseteq X$ finito o numerable tal que para todo $x \in X$ existen $a, b \in C$ con $a \precsim x \precsim b$.

ii) Decimos que es *fuertemente separable* si existe un subconjunto $C \subseteq X$ finito o numerable tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$ existe $c \in C$ con $x \prec c \prec y$.

DEFINICIÓN: Un espacio topológico (Z, τ) es *metrizable* si su topología proviene de una métrica o distancia definida por él. Es *de Lindelöf* si de cada recubrimiento de Z mediante conjuntos abiertos en la topología τ es posible extraer un subrecubrimiento finito o numerable. Es *conexo por caminos* si entre dos elementos dados $x, y \in X$ existe una función continua, llamada *camino* $f: [0, 1] \rightarrow Z$ continua cuando sobre $[0, 1]$ se considera la topología euclídea usual, y sobre Z la topología τ, y tal que $f(0) = x, f(1) = y$.

DEFINICIÓN: Se denomina *cubo de Hilbert* al producto cartesiano de una cantidad a lo más numerable de copias del intervalo $[0, 1]$. Tal conjunto (cubo de Hilbert) estará dotado con la topología producto que se obtiene considerando sobre $[0, 1]$ la topología euclídea usual.

DEFINICIÓN: Se dice que dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe una aplicación biyectiva, continua, y de inversa continua que aplique un espacio sobre el otro.

TEOREMA 12

Sea $(X, \precsim)$ una estructura totalmente ordenada sobre la que se considera la topología del orden θ. Se tiene:

i) *Si es contablemente acotada y conexa por caminos, entonces es conexa y fuertemente separable.*

ii) *Si es fuertemente separable, es perfectamente separable.*

iii) *Si es perfectamente separable, es separable.*

iv) *Si es separable, es contablemente acotada.*

v) *Es fuertemente separable si y sólo si es perfectamente separable y carece de huecos.*

vi) *Es perfectamente separable y sin huecos si y sólo si es separable y sin huecos.*

vii) *Es perfectamente separable si y sólo si es representable mediante una función de utilidad.*

viii) *Es perfectamente separable si y sólo si es representable mediante una función de utilidad continua cuando sobre X se considera la topología θ y sobre $\mathbb{R}$ la usual.*

El apartado i) del teorema anterior se debe a P. C. Monteiro (Véase Monteiro [1987]).

TEOREMA 13

Sea $(X \precsim)$ una estructura totalmente ordenada sobre la que se considera la topología del orden θ. Entonces, son hechos equivalentes.

i) *$(X, \precsim)$ es perfectamente separable,*

ii) *$(X, \precsim)$ es separable con a lo más una cantidad numerable de huecos,*

iii) *(X, θ) verifica el segundo axioma de numerabilidad,*

iv) *$(X, \precsim)$ es representable a través de una función de utilidad,*

v) *$(X, \precsim)$ es representable a través de una función de utilidad continua cuando sobre X se considera la topología θ y sobre $\mathbb{R}$ la usual,*

vi) *(X, θ) es homeomorfo a algún subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre el que se considera la topología euclídea inducida usual,*

vii) *(X, θ) es homeomorfo a algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sobre el que se considera la topología euclídea inducida usual,*

viii) *(X, θ) es homeomorfo a algún subconjunto del cubo de Hilbert sobre el que se considera la topología inducida,*

ix) *(X, θ) es un espacio topológico metrizable y separable.*

x) *(X, θ) es un espacio topológico metrizable y de Lindelöf.*

Para terminar esta sección cabe añadir una referencia al hecho de que esta aproximación topológica puede, evidentemente, extenderse a situaciones más generales acerca de representaciones numéricas de preferencias, al estilo de las que fueron contempladas en la sección 2, pero ahora, teniendo en cuenta alguna consideración topológica adicional. A tal respecto debemos mencionar el magno trabajo de G. Herden, que ha logrado caracterizar la representabilidad de estructuras preordenadas. (Véase Herden [1989 a, b]).

Otra cuestión topológica interesante a analizar sería la *ordenabilidad* de un determinado espacio topológico (X, τ), es decir, la posibilidad de definir sobre X un orden total $\precsim$ de forma que τ sea, precisamente, la topología del orden, θ, asociada a $\precsim$. Este tipo de cuestiones aparece estudiado en gran profundidad en Rodríguez-Alcantud [1996]. Un problema relacionado consiste en encontrar ordenaciones que sean *continuas* para la topología τ en el sentido de que todo abierto en la topología del orden sea τ-abierto. Resulta curioso algún resultado parcial al respecto: Por ejemplo, no es posible dotar a $\mathbb{R}^n$ de un orden total que sea continuo para con la topología euclídea usual. (Véase Candeal e Induráin [1993 a]).

4. TIPOS ESPECIALES DE PREFERENCIA Y UTILIDAD

Comentamos aquí alguna de las líneas de investigación acerca de preferencia y utilidad con alguna característica especial adicional. Por poner algún ejemplo, podemos pensar en funciones de utilidad que vengan dadas a través de una *medida* (véase, por ejemplo Candeal e Induráin [1993 b]), o en la extensión de una utilidad *local*, definida en un subconjunto del conjunto totalmente ordenado X, a una utilidad *global*, que represente a toda la estructura $(X, \precsim)$. (Véase, por ejemplo, Bardsley [1993]).

Haremos así un breve repaso, como botón de muestra, acerca de las cuatro teorías siguientes:

i) Utilidad bajo riesgo e incertidumbre, y utilidad esperada.
ii) Utilidad algebraica.
iii) Utilidad a través de medida.
iv) Teoría local de la utilidad.

Obviamente, hay muchas más teorías especiales de la utilidad. Por ejemplo, podría estudiarse *utilidad difusa* (véase Kacprzyk y Fedrizzi [1990], Barret, Pattanaik y Salles [1992], García-Lapresa [1993], o García-Lapresta y Llamazares [1996]. También podría estudiarse *utilidad en espacios de dimensión infinita.* (Véase Estévez y Hervés [1995], o Candeal, Induráin y Mehta [1996]).

4.1. Utilidad bajo riesgo e incertidumbre, y utilidad esperada

Quizá ésta sea una de las teorías más clásicas, donde aparecen nombres tan conocidos y relevantes como Von Neumann, Morgenstern, Savage, Ramsey, etc. De hecho, en ocasiones se considera que es aquí, en este terreno, donde *nació la teoría de la utilidad* al menos como parte fundamental de la teoría de la decisión. Sin querer extendernos demasiado, y únicamente con el objetivo de dar alguna intuición general, podemos pensar que un determinado agente o individuo ha definido una relación binaria de tipo *cualitativo* «$\precsim$», relación de preferencias sobre un determinado conjunto de alternativas X. Hasta aquí todo sería como en la discusión hecha en las secciones anteriores. Se trataría de encontrar representaciones numéricas *cuantitativas* vía, ponemos por caso, funciones de utilidad, que representen a $(X, \precsim)$. Pero podemos también pensar, haciendo una *hipótesis adicional,* que al agente no se le presentan habitualmente los hechos, sucesos, alternativas, o posibilidades $x, y \in X$ como algo *seguro* de manera que el agente compara el hecho «x» con el hecho «y», sino que más bien, x e y se le ofrecen al agente como cosas posibles o *inciertas*, quizá con determinadas probabilidades asignadas a cada uno de ellos, y de forma que el agente no sólo comparará los hechos «seguros» x e y, sino también cualesquiera *situaciones inciertas intermedias*, en las que el hecho x puede darse con una determinada probabilidad p, mientras que el y puede aparecer con la probabilidad $1 - p$. Por tal motivo, el agente habrá de *extender sus preferencias* del conjunto de alternativas X que podríamos interpretar como *hechos seguros*, al conjunto que denotaremos $L(X)$ y llamaremos *conjunto de las loterías sobre* X, cuyos elementos son *distribuciones de probabilidad* sobre el conjunto X. Aparecen así dos importantes problemas bien diferenciados. Por un lado, el de la *extensión* de las preferencias del conjunto X al conjunto $L(X)$. Por otro lado, el de la *representación* de estas preferencias a través de adecuadas funciones de utilidad. Más aún, cabe exigir que la función de utlidad que aparezca en $L(X)$ sea tal que a un hecho incierto del tipo «el suceso x tiene probabilidad p y el suceso y tiene probabilidad q» asigne exactamente la suma aritmética de p veces el valor de la utilidad del hecho «se da x con certeza» más q veces la utilidad del hecho «se da y con certeza». Todo esto conduce a unas determinadas *axiomáticas* de esta teoría de la utilidad, que han sido objeto de amplio estudio. Recomendamos la lectura de Von Neumann y Morgenstern [1944], Herstein y Milnor [1953], Luce y Raiffa [1956], Fishburn [1970, 1982] o Machina [1982].

4.2. UTILIDAD ALGEBRAICA

En este tipo de estudios, la cuestión fundamental a admitir es que la estructura ordenada $(X, \precsim)$ tiene una *estructura algebraica adicional*. Por ejemplo, podemos pensar que sobre X está definida una operación binaria «$*$» de forma que $(X, *)$ es un *grupo*. Naturalmente, *buscaremos ahora funciones de utilidad que preserven la estructura algebraica* aprovechando que $\mathbb{R}$ es un conjunto rico en estructura algebraica para las operaciones de suma y producto habituales. Así, sin ir más lejos, cabe exigir que cuando $(X, *, \precsim)$ sea un grupo dotado de un orden total, las funciones de utilidad que se vayan a utilizar tengan la propiedad añadida de ser un homomorfismo de grupos de $(X, *)$ en la recta real aditiva $(\mathbb{R}, +)$. También es razonable pensar que la estructura ordenada $(X, \precsim)$ esté ligada, de algún modo, a la estructura algebraica $(X, *)$. A tal respecto, es muy frecuente exigir que se dé una propiedad de *invariancia por traslaciones* de la forma $x \precsim y \Leftrightarrow t * x \precsim t * y \Leftrightarrow x * z \precsim y * z$, para todo $x, y, t, z \in X$.

Curiosamente, resultados fundamentales de esta teoría aparecieron en la literatura matemática en estudios puramente algebraicos (grupos ordenados, anillos ordenados, cuerpos ordenados, espacios vectoriales ordenados, etc.) sin ninguna conexión explícita con la teoría de la utilidad. Incluso, alguno de los resultados claves de este contexto apareció mucho antes de que la teoría de la utilidad, tal como la conocemos hoy, hubiese sido concebida e inventada. Ello tiene una explicación: Si pensamos *desde el punto de vista de la utilidad* la utilidad algebraica consiste en añadir propiedades adicionales algebraicas a estructuras ordenadas dadas. Por otra parte, *desde el punto de vista del álgebra* cabe estudiar estructuras algebraicas con la propiedad adicional de estar dotadas de alguna ordenación. Evidentemente, ambos puntos de vista desembocarán en el mismo tandem *orden más operación algebraica*, y acabarán llegando a idénticos resultados. Así no resulta extraño entender que el enfoque más algebraico, en el que lo adicional es la ordenación se haya estudiado antes que el enfoque más propio de una rama especial de la teoría de la utilidad, donde lo adicional es la operación algebraica. Y es que el álgebra, justo es reconocerlo, tiene más años de historia que la teoría de la utilidad.

Citamos, como muestra, un resultado fundamental de esta teoría:

TEOREMA 14 *(Hölder, 1901)*

Sea $(G, *)$ un grupo dotado de un orden total «$\precsim$» invariante por traslaciones. Entonces, existe una función de utilidad $u : (G, \precsim) \to (\mathbb{R}, \leq)$ tal *que además $u(x * y) = u(x) + u(y)$ para cualesquiera $x, y \in G$, si y solamente si $(G, *, \precsim)$ es arquimediano. (Esto es: siendo e el elemento neutro de $(G, *)$, para cualesquiera $x, y \in G$ con $e \prec x \prec y$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \prec n.x = x * \ldots \text{(n veces)} \ldots * x$).*

Para una prueba de este resultado puede consultarse Hölder [1901], Fuchs [1963], o Birkhoff [1967], p. 300.

Resulta también interesante hacer notar que este contexto algebraico de la teoría de la utilidad aparece también en otro tipo de estudios que, a primera vista, no tienen punto en común alguno con la economía. Por ejemplo, el uso de grupos o semigrupos ordenados, y la consecuente búsqueda de funciones de utilidad que preserven esta estructura algebraica aparece también en la denominada *teoría de la medición extensiva* («extensive measurement», en inglés) propia de estudios de psicología matemática. Así aparecen demostraciones del teorema de Hölder en Krantz et al. [1971], Roberts [1979], o Narens [1985] por citar sólo tres libros dedicados al tema de la medición. Asimismo, es posible encontrar contextos similares en estudios sobre *lógica de primer orden*. Una referencia a este respecto es Skala [1975].

En cuanto al tipo de estructura algebraica que puede añadirse a una estructura totalmente ordenada cabe decir, para terminar esta sección 4.2, que las técnicas que se utilizan varían considerablemente de unas estructuras algebraicas a otras, y que, si nos situamos en el escalón de *grupos*, propio del contexto del teorema de Hölder, las direcciones que se nos presentan son dos: o bien *rebajar estructura algebraica* considerando semigrupos, grupoides, etc., o bien *aumentar estructura algebraica* considerando anillos, cuerpos, etc. Pues bien, los problemas más relevantes o, cuando menos, los que ocupan un mayor número de estudios en la literatura, se centran en *semigrupos*, por un lado, y en *espacios vectoriales topológicos*, por otro. Por citar alguna referencia que muestre las técnicas en cada caso, de la primera situación cabe mencionar a Alimov [1950], Gottinger [1976], De Miguel [1995] o De Miguel et al. [1996], mientras que de la segunda cabe mencionar a Trockel [1992], Candeal e Induráin [1995], Neuefeind y Trockel [1995], o Bridges y Mehta [1995], pp. 68-71.

4.3. UTILIDAD A TRAVÉS DE MEDIDA

La idea subyacente a esta parte de la teoría de la utilidad es bastante simple. Por fijar ideas, supongamos que tenemos un conjunto finito totalmente ordenado. Una manera de definir una función de utilidad es *contar (o medir)* cuántos elementos del conjunto son, en el sentido del orden, peores que un elemento dado. Así al mínimo elemento según la ordenación se le asignaría el *0*, al siguiente, el *1*, etc., hasta llegar al máximo, al que se asigna $n - 1$ (suponemos que el conjunto consta de n elementos). Y esto, claramente, define una función de utilidad con todas las de la ley.

Para el caso de que el conjunto totalmente ordenado sea infinito, nos aparece un problema obvio: Puede haber elementos que tengan una cantidad infinita de elementos peores según el orden. Ello haría que, en la línea de lo anterior, a esos elementos se les asignara un valor infinito, lo que ya no nos sirve, pues una función de utilidad debe tomar valores reales (y, por supuesto, finitos). No obstante, la situación tiene remedio en casos notables: Por ejemplo, si el conjunto es *numerable*, podemos pensar en la siguiente construcción: Se parte de una sucesión $(x_n)_{\{n \in N\}}$ representando unívocamente a los elementos del conjunto ordenado. Después se considera una serie convergente cualquiera de números reales estrictamente positivos (una candidata sería la de término general $1/2^n$). Se define ahora una función de manera que al elemento x_n se le asigne la suma de todos los términos $1/2^k$ de la serie anterior, extendida a aquellos subíndices «k» tales que $x_k \prec x_n$. Esto define una función de utilidad. La idea aparece subyacente en Rader [1963]. Puede verse también en Candeal e Induráin [1993 b]. Nótese además que se ha definido una *medida* cuyos *átomos* son precisamente los elementos x_n del conjunto, y de forma que el elemento x_n tiene un *peso* igual a $1/2^n$. El empleo de conjuntos numerables puede servir también para definir medidas que den lugar a utilidades en contextos más amplios. Así, si se tiene un conjunto totalmente ordenado $(X, \precsim)$ que sea perfectamente separable, podemos pensar en definir una medida del tipo anterior, concentrada en los elementos de un conjunto numerable C que dé lugar a la perfecta separabilidad de X. Esta idea incluso puede llegar a plantearse en un ámbito más general: Se tratará de definir una medida μ tal que a cada elemento $x \in X$ se les asigne $\mu(L(x))$ siendo $L(x) = \{z \in X : z \prec x\}$. (Obviamente, los conjuntos $L(x)$ habrán de ser μ-medibles). En Candeal e Induráin [1993 b] se dan condiciones para que este tipo de construcción defina, en efecto, funciones de utilidad. (Para tener información sobre el concepto abstracto de *medida* recomendamos la lectura de Rudin [1988]). Ideas relativas al empleo de medidas para la búsqueda de representaciones numéricas de estructuras ordenadas aparecen también en Neuefeind [1972], Mount y Reiter [1976], Chichilnisky [1977, 1980], Candeal e Induráin [1992, 1994], Subiza y Peris [1995] o Bridges y Mehta [1995].

4.4. TEORÍA LOCAL DE LA UTILIDAD

La idea base de la teoría *local* de la utilidad resulta también bien simple y fácil de entender: Supongamos que tenemos una estructura totalmente ordenada $(X, \precsim)$ donde X es «demasiado grande», de forma que, incluso en el caso en que sepamos que exista, no sea fácil construir una función de utilidad sobre todo X. Supongamos, sin embargo, que podemos descomponer X en conjuntos más pequeños, de manera que sobre éstos conjuntos más pequeños, sí que somos capaces de construir funciones de utilidad. ¿Es posible entonces construir una función de utilidad *global* pegando, de alguna manera, las funciones de utilidad *locales* de que disponemos para esos conjuntos pequeños? La respuesta es afirmativa en casos significativos, que exigen alguna condición topológica al espacio X. Resulta interesante hacer notar que este tipo de ideas ha sido utilizado en contextos muy clásicos, como la construcción de Arrow-Hahn de una *utilidad métrica* sobre ciertos conjuntos $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dotados de un preorden total «$\precsim$»: En tal caso, la construcción pasa por, fijado un elemento x_0, considerar, para otros elementos x con $x_0 \prec x$, la distancia entre x_0 y el *contorno superior del elemento* x, esto es, el conjunto $G(x) = \{y \in X : x \prec y\}$. Esto define representaciones *locales* de la estructura ordenada, y se trata de agregarlas hasta obtener una utilidad *global*. Esta es, en esencia, la técnica utlizada por Arrow y Hahn. (Véase Arrow y Hahn [1971], pp. 82-87, Mehta [1991], o bien Bridges y Mehta [1995], pp. 27-34). Otra posible construcción es descomponer el espacio ordenado en forma de sucesión creciente de espacios con mejores propiedades topológicas, y aplicar algún teorema acerca de paso al límite de tales sucesiones crecientes, por ejemplo, basándose en la noción de *límite inductivo*, clásica en topología general. (Véase, por ejemplo, Dugundji [1966]). Así, por ejemplo, una posibilidad es disponer de un espaco ordenado *σ-compacto* (unión numerable de conjuntos *compactos*) para después construir utilidades locales sobre subconjuntos compactos, algo más sencillo, y después intentar pegarlas hasta obtener una utilidad *global*. Esta técnica ha sido discutida en Candeal, Induráin y Mehta [1995]. Algunas otras referencias sobre *utilidad local* o sobre la *extensión* (*«lifting»*, en inglés) de utilidades son Bardsley [1993] y Herden [1989 c, 1990].

BIBLIOGRAFIA

Alimov, N. G. (1950): «Sobre semigrupos ordenados». (En ruso). *Izvestia Akad. Nauk* 14, 569-576.

Arrow, K. J. y Hahn, F. (1971): *General competitive analysis*. Oliver and Boyd. Edinburgh.

Bardsley, P. (1993): «Local utility functions». *Theory and Decision* 34, 109-118.

Barret, C. R., Pattanaik, P. K. y Salles, M. (1992): «Rationality and aggregation of preferences in an ordinally fuzzy framework». *Fuzzy Sets and Sustems* 49, 9-14.

Beardon, A. F. (1992): «Debreu's gap theorem». *Economic Theory* 2, 150-152.

Beardon, A. F. y Mehta, G. B. (1994 a): «The utility theorems of Wold, Debreu and Arrow-Hahn». *Econometrica* 62 (1), 181-186.

Beardon, A. F. y Mehta, G. B. (1994 b): «The order type of the continuum». *Journal of Mathematical Economics* 23, 388-390.

Besada, M. y Vázquez, C. (1994): «Preferencias débilmente uniformes». *Revista Española de Ecomomía* 11 (2), 299-309.

Birkhoff, G. (1940): *Lattice theory*. (First edition). American Mathematical Society. Rhode Island.

Birkhoff, G. (1967): *Lattice theory*. (Third edition). American Mathematical Society. Rhode Island.

Bowen, R. (1968): «A new proof of a theorem in utility theory». *International Economic Review* 9 (3), 374.

Bridges, D. S. y Mehta,G. B. (1995): *Representations of preference orderings*. Springer Verlag. Berlin.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1990 a): «Representación numérica de órdenes totales». *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid* 84 (3), 415-428.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1990 b): «Sobre caracterizaciones topológicas de la representabilidad de cadenas mediante funciones de utilidad». *Revista Española de Economía* 7, 235-244.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1992): «Utility functions on partially ordered topological groups». *Proceedings of the American Mathematical Society* 115 (3), 765-767.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1993 a): «Utility functions on chains». *Journal of Mathematical Economics* 22, 161-168.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1993 b): «Utility representations from the concept of measure». *Mathematical Social Sciences* 26, 51-62.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1994): «Medida de Lebesgue de las clases de indiferencia de ciertos preórdenes». *Cuadernos Aragoneses de Economía*. (Segunda época), 4 (2), 345-350.
Candeal, J. C. e Induráin, E. (1995): «A note on linear utility». *Economic Theory* 6, 519-522.
Candeal, J. C., Induráin, E. y Mehta, G. B. (1995): «Some utility theorems on inductive limits of preordered topological spaces». *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 52, 235-246.
Candeal, J. C., Induráin, E. y Mehta, G. B. (1996): «Utility functions on Banach spaces». (Preprint). Department of Economics. University of Queensland. Brisbane, Australia.
Candeal, J. C., Induráin, E. y Olóriz, E. (1996 a): «Aplicaciones bivariantes que representan semigrupos ordenados» (Preprint). Universiad Pública de Navarra.
Candeal, J. C., Induráin, E. y Olóriz, E. (1996 b): «Construction of additive utilities on totally ordered semigroups» (Preprint). Universidad Pública de Navarra.
Cantor, G. (1895): «Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre I». *Mathematische Annalen* 46, 481-512.
Cantor, G. (1897): «Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre II». *Mathematische Annalen* 49, 207-246.
Chichilnisky, G. (1977): «Spaces of economic agents». *Journal of Economic Theory* 15, 160-173.
Chichilnisky, G. (1980): «Continuous representations of preferences». *Review of Economic Studies* 47, 959-963.
De Miguel, J. R. (1995): «Representaciones numéricas de semigrupos totalmente ordenados». (Tesis Doctoral). Universidad Pública de Navarra. Departamento de Matemática e Informática.
De Miguel, J. R., Candeal, J. C. e Induráin, E. (1996): «Archimedeaness and additive utility on totallyordered semigroups». *Semigroup Forum* 52, 335-347.
Debreu, G. (1954): «Representation of a preference ordering by a numerical function», en *Decision processes*, editado por R. M. Thrall y otros. John Wiley, New York.
Debreu, G. (1959): *Theory of value*. John Wiley, New York.
Debreu, G. (1964): «Continuous properties of Paretian utility». *International Economic Review* 5, 285-293.
Debreu, G. (1973): *Teoría del valor*. Bosch. Barcelona.
Dugundji, J. (1966): *Topology*. Allyn and Bacon, Boston.
Eilenberg, S. (1941): «Ordered topological spaces», *American Journal of Mathematics* 63, 39-45.
Estévez, M. y Hervés, C. (1995): «On the existence of continuous preference orderings wiithout utility representations». *Journal of Mathematical Economics* 24, 305-309.
Fishburn, P. C. (1970): *Utility theory for decision-making*. John Wilye, New York.
Fishburn, P. C. (1982): *The foundations of espected utility*. D. Reidel. Dordrecht, The Netherlands.

Fishburn, P. C. (1983): «Utility functions on ordered convex sets». *Journal of Mathematical Economics* 12, 221-232.
Fuchs, L. (1963): *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press. Oxdord.
García-Lapresta, J. L. (1993): «Criterios de coherencia en preferencias intensas». *Anales de Estudios Económicos y Empresasirales* 8, 163-175.
García-Lapresta, J. L. y Llamazares, B. (1996):«Mayorías cualificadas cuando los votantes manifiestan gradualmente sus preferencias». (Preprint). Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Gottinger, H. (1976): «Existence of a utility on a topological semi-group». *Theory and Decision* 7, 145-158.
Herden, G. (1989 a): «On the existence of utility functions». *Mathematical Social Sciences* 17, 297-313.
Herden, G. (1989 b): «On the existence of utility functions (II)». *Mathematical Social Sciences* 18, 107-117.
Herder, G. (1989 c). «Some lifting theorems for continuous utility functions». *Mathematical Social Sciences* 18, 119-134.
Herden, G. (1990): «On a lifting theorem of Nachbin». *Mathematical Social Sciences* 19, 37-44.
Herden, G. (1995): «On some equivalent approaches to mathematical utility theory». *Mathematical Social Sciences* 29, 19-31.
Herden, G. y Mehta, G. B. (1994): «The continuous analogue and generalization of the classical Birkhoff-Milgram theorem». *Mathematical Social Sciences* 28, 59-66.
Herstein, I. N. y Milnor, J. (1953): «An axiomatic aproach to easurable utility». *Econometrica* 21, 291-297.
Hölder, O. (1901): «Der Axiome der Quantität und die Lehre von Mass». Leipzig Ber. Math. Phys. Cl. 53, 1-64.
Jaffray, J. Y. (1975): «Existence of a continouous utility function: an elementary proof». *Econometrica* 43, 981-983.
Jameson, G. J. O. (1974): *Topology and normed spaces*. Chapman and Hall. London.
Kacprzyk, J. y Fredrizzi, M. (eds.) (1990): *Multiperson decision making using fuzzy sets and possibility theory*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands.
Kamke, E. (1950): *Theory of sets*. Dover. New York.
Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, A. y Tversky, A. (1971): *Foundations of measurement (I)*. Academic Press. New York.
Luce, R. D. (1956): «Semi-orders and a theory of utility discrimination». *Econometrica* 24, 187-191.
Luce, R. D. y Raiffa, H. (1956): *Games and decisions*. John Wiley, New York.
Machina, M. J. (1982): «Expected utility analysis without the independence axiom». *Econometrica* 50 (2), 277-323.
Mc Lennan, A. (1995): «On the representability of C^{τ} preference relations by utility functions». *Economic Theory* 6, 357-363.
Mehta, G. B. (1991): «The Euclidean distance approach to continuous utility functions». *Quarterly Journal of Economics* 106, 975-977.
Milgram, A. N. (1939): «Partially ordered sets, separating systems and inductiveness», in *Reports of a Mathematical Colloquium, 2nd series (1)*, University of Notre Dame, IN.
Monteiro, P. K. (1987): «Some results on the existence of utility functions on path-connected spaces». *Journal of Mathematical Economics* 16, 147-156.
Mount, K. R. y Reiter, S. (1976): «Construction of a continuous utility function for a class of preferences». *Journal of Mathematical Economics* 3, 227-245.
Nachbin, L. (1950): *Topologia e ordem*. University of Chicago Press.
Nachbin, L. (1965): *Topology and order*. Van Nostrand. Princeton, NJ.
Narens, L. (1985): *Abstract measurement theory*. MIT Press. Cambridge, MA.
Neuefeind, W. (1972): «On continuous utility». *Journal of Economic Theory* 5 (1), 175-176.

Neuefeind, W. y Trockel, W. (1995): «Continuous linear representability of binary relations». *Economics Theory* 6, 351-356.
Peleg, B. (1970): «Utility functions for partially ordered topological spaces». *Econometrica* 38, 93-96.
Peris, J. E. y Subiza, B. (1995): «A weak utility function for acyclic preferences». *Economicss Letters* 48 (1) 21-24.
Pirlot, M. (1991): «Synthetic description of a semiorder». *Discrete Applied Mathematics* 31, 299-308.
Rader, T. (1963): «The existence of a utility function to represente preferences». *Review of Economic Studies* 30, 229-232.
Roberts, F. S. (1979): *Measurement theory with applications to decision making, utility, and the social sciences.* Addison Wesley. Reading, MA.
Rodríguez-Alcantud, J. C. (1995 a): «Orderabillity of topological spaces by continuous preferences». (Preprint). Universidad de Salamanca. Facultad de Economía y Empresa.
Rodríguez-Alcantud, J. C. (1995 b): «Topological separability and axioms of countability in GPO-spaces» (Preprint). Universidad de Salamanca. Facultad de Economía y Empresa.
Rodríguez-Alcantud, J. C. (1995 c): «Weak utilities from acyclicity» (Preprint). Universidad de Salamanca. Facultad de Economía y Empresa.
Rodríguez-Alcantud, J. C. (1996): «Contribuciones al estudio de los espacios ordenados y aplicaciones a la economía». (Preprint). Universidad de Salamanca. Facultad de Economía y Empresa.
Rodriguez-Alcantud, J. C. y Gutiérrez, J. M. (1995 a): «Preference through indifference: a topological approach».(Preprint). London School of Economics.
Rodríguez-Alcantud, J. C. y Gutiérrez, J. M. (1995 b): «Saturated identificacions and topological properties of GPO-spaces». (Preprint). London School of Economics.
Rodríguez-Palmero, C. (1996 a): «A representation of acyclic preferences». (Preprint). Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias Económicas y Empesariales.
Rodríguez-Palmero, C. (1996 b): «A representation of partiel orders». (Preprint). Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Rudin, W. (1988): *Análisis real y complejo.* (Tercera edición). Mc Graw Hill. Madrid.
Skala, H. J. (1975): *Non-archimedean utility theory.* D. Reidel. Dordrecht, The Netherlands.
Subiza, B. (1992): «Representaciones numéricas de preferencias cuasitransitivas y acíclicas». (Tesis doctoral). Universidad de Alicante.
Subiza, B. y Peris, J. E. (1995): «Theree kinds of utility functions from the measure concept». (Preprint). Departamento de Economía.Universidad de Alicante.
Tangyan, A. S. (1988): «Representation of a weak ordering by a numerical function». Soviet Math. Doklady 37 (1), 222-225.
Trockel, W. (1992): «An alternative proof for the linear utility representation theorem». *Economic Theory* 2, 298-302.
Vázquez, C. (1995): «Preferencias uniformes en retículos de Banach». (Tesis doctoral). Departamento de Matemáticas e Didáctica da Matemática. Universidad de Vigo.
Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944): *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press. Princeton, NJ.
Wakker, P. (1988): «Continuity of preference relations for separable topologies». *Internacional Economic Review* 29, 105-110.