

ANALISIS DEL TIPO DE CAMBIO DE LA PESETA: UN ESTUDIO DENTRO DE LA TEORIA DEL CAOS

*M^a Rosa Arranz Sombría
M^a del Pilar Pérez González
David Pérez Román*

RESUMEN.—En este trabajo, contrastamos la existencia de caos determinista de baja dimensión en las series de tipo de cambio peseta-marco, peseta-franco y peseta-100 yenes correspondientes al período comprendido entre enero de 1978 y octubre de 1995. Los resultados obtenidos en la aplicación del test de Grassberger-Procaccia señalan la existencia de una componente de no aleatoriedad en las series, corroborada por los resultados obtenidos en la aplicación del test BDS. Sin embargo, parecen indicar la no presencia de caos determinista de baja dimensión en las series. Esta hipótesis se ve reforzada por la magnitud de los errores obtenidos en las predicciones realizadas, que superan, en la mayoría de los casos, los obtenidos para el paseo aleatorio.

1. INTRODUCCION

A comienzos de la década de los 70 se produce un cambio en el Sistema Monetario Internacional. Los tipos de cambio de las principales monedas pasan a determinarse libremente en los mercados de cambios, aunque las fluctuaciones en el valor del tipo de cambio están controladas por la intervención de las autoridades monetarias. Este sistema, vigente desde entonces, recibe el nombre de flotación intervenida.

A partir de este momento se ha realizado un gran esfuerzo en la modelización de los tipos de cambio. Aunque las primeras modelizaciones realizadas parecían prometedoras, trabajos posteriores demuestran que los modelos construidos no parecen adecuados para explicar los actuales tipos de cambio flotantes.

Las series de tipo de cambio, por su apariencia aleatoria, son similares a las generadas por sistemas caótico deterministas. Si una serie está generada por un sistema determinista es en cierto modo predecible, aunque si el sistema es caótico la dependencia sensible a las condiciones iniciales

hace que sólo sea posible precedir a corto plazo. La predecibilidad a corto plazo de las series generadas por sistemas caótico deterministas es útil, no sólo para conocer el futuro de las series caóticas, sino también como herramienta para contrastar la presencia de caos en una serie.

En los últimos años, se han realizado numerosos estudios sobre la detección de caos determinista en series económicas con resultados desiguales. Los problemas fundamentales para la detección de caos en series económicas son la longitud de las series (generalmente son muy cortas) y el alto nivel de ruido que poseen. Mientras en la mayoría de ellas se obtiene de forma clara una estructura no lineal, las evidencias de caos son en general débiles, incluso para series relativamente largas.

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos en el análisis de las series de tipo de cambio peseta-marco, peseta-franco y peseta-100 yenes. Hemos utilizado datos diarios del tipo de cambio comprador correspondientes al período comprendido entre enero de 1978 y octubre de 1995. Las series constan de 4354, 4217 y 4356 datos, respectivamente, y nos han sido proporcionadas por el Banco de España. La elección del tipo de cambio comprador en lugar del tipo de cambio vendedor no es relevante dada la evolución paralela de ambos tipos de cambio¹.

Hemos dividido el trabajo de la siguiente manera. En la segunda sección utilizamos la dimensión de correlación introducida por Grassberger y Procaccia para detectar la posible presencia de caos en los datos. En la sección tercera realizamos el estudio del comportamiento no lineal de las series mediante el test BDS. Seguidamente analizamos la calidad de las predicciones como instrumento de detección de caos determinista en la serie. Para finalizar, en la sección quinta se recogen las conclusiones del estudio realizado. Al igual que para la serie peseta-libra² y en contra de los resultados obtenidos en el trabajo de Bajo-Rubio et al. (1992) sobre la serie peseta-dólar en el que se detecta caos determinista en los datos, los resultados obtenidos en este trabajo parecen indicar lo contrario para las series estudiadas.

2. ¿CAOS DETERMINISTA?

Para detectar la posible existencia de caos determinista en la serie vamos a estudiar la dimensión de correlación introducida por Grassberger y Procaccia (1983 a, b). La dimensión de correlación permite distinguir entre una serie de datos aleatoria y un ruido determinista.

El concepto de dimensión de correlación se basa en la reconstrucción del espacio de fases. Sea $\{x_t\}_{1,\dots,N}$ una serie de números reales, se llama espacio de fases reconstruido con dimensión de inmersión m y retardo τ al subconjunto de \mathbb{R}^m formado por los vectores:

$$x_t^m = (x_t, x_{t+\tau}, \dots, x_{t+(m-1)\tau}) \in \mathbb{R}^m, \quad 1 \leq t \leq N - (m-1)\tau.$$

1 Véase Ayuso, J. (1991).

2 Pérez González, M. P., Arranz Sombría, M. A. y Pérez Román, D. (1996).

Los vectores x_i^m reciben el nombre de m -historias.

El teorema de Takens asegura que la dinámica generada en el espacio de fases reconstruido es equivalente a la dinámica del sistema original cuando $m \geq 2n + 1$. Esto nos permite analizar propiedades del sistema de partida, como la dimensión de correlación del atractor o los exponentes de Lyapunov a través de una serie de datos.

La noción de dimensión de correlación se basa en el concepto de correlación integral definido por:

$$C(m, r) = \lim_{N_m \rightarrow \infty} \frac{1}{N_m^2} \sum_{i, j=1}^{N_m} H(r - \|x_i^m - x_j^m\|),$$

donde N_m es el número de puntos del espacio de fases reconstruido, la norma empleada es la del supremo y H es la función de Heaviside³ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La dimensión de correlación está definida como:

$$C(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(m, r)}{\log r}.$$

Si el sistema dinámico es caótico $C(m)$ se estabiliza en algún valor D cuando m crece. El valor D , es la dimensión de correlación del atractor. Sin embargo, esta condición no es suficiente para garantizar la presencia de caos. En una serie aleatoria la dimensión de correlación y la dimensión de inmersión son prácticamente iguales⁴.

El primer paso para determinar la dimensión de correlación es eliminar la autocorrelación de la serie, si la tiene, pues ésta puede ocasionar resultados engañosos en su estimación. Para ello hemos considerado las series de las diferencias logarítmicas. (Si observamos la figura 7 (p. 346), la dimensión de correlación, parece estabilizarse a partir de $m = 8$, sin embargo, en la serie de las diferencias logarítmicas, la dimensión de correlación crece con la dimensión de inmersión).

En las tres series hemos comprobado que los correlogramas de las diferencias logarítmicas no presentan retardos significativos, por lo que pueden considerarse aproximadamente como los correspondientes a un ruido blan-

3 La definición de la función de Heaviside aquí dada, es la que aparece en (Lorenz, 1993, p. 210). Otros autores asignan imagen 1 también a $x = 0$.

4 Véase Tsonis, A. A. (1992), pp. 168-170.

co. Para reafirmar esta hipótesis hemos aplicado diferentes tests de normalidad y en ningún caso la hipótesis de ruido blanco ha sido rechazada.

En la figura 1 aparecen las gráficas del logaritmo de la correlación integral y de la pendiente como función del logaritmo de la distancia entre los puntos de la serie y de la dimensión de correlación como función de la dimensión de inmersión, para la serie de las diferencias logarítmicas del tipo de cambio peseta-marco.

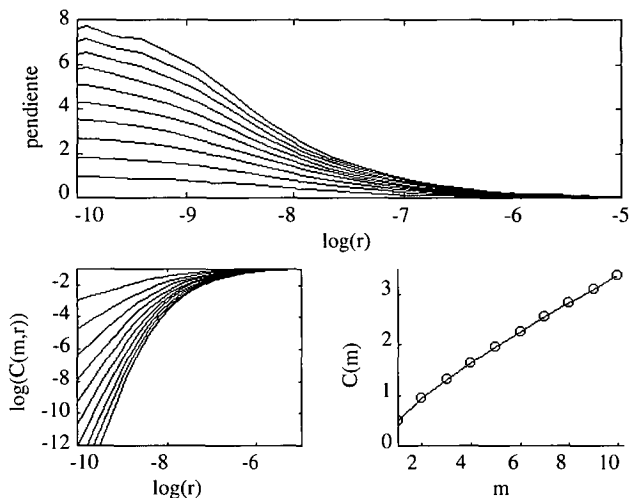


FIG. 1: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie de las diferencias logarítmicas del tipo de cambio peseta-marco.

Como podemos observar en las gráficas, la dimensión de correlación no crece en el mismo orden que la dimensión de inmersión, como ocurre en una serie aleatoria, por lo tanto parece existir una componente de no aleatoriedad en la serie. Sin embargo $C(m)$ no llega a ser estable, por lo que podemos deducir la no existencia de caos de baja dimensión en la serie.

Esta componente de no aleatoriedad, se pierde con el barajado de los datos. Como podemos observar en la figura 2, la dimensión de correlación es prácticamente del mismo orden que la dimensión de inmersión para la serie barajada.

En el anexo recogemos las gráficas del logaritmo de la correlación integral y de la pendiente, como función del logaritmo de la distancia entre los puntos de la serie, así como la de la dimensión de correlación como función de la dimensión de inmersión, para las series de las diferencias logarítmicas del tipo de cambio peseta-franco y peseta-100 yenes y para las series peseta-marco, peseta-franco y peseta-100 yenes.

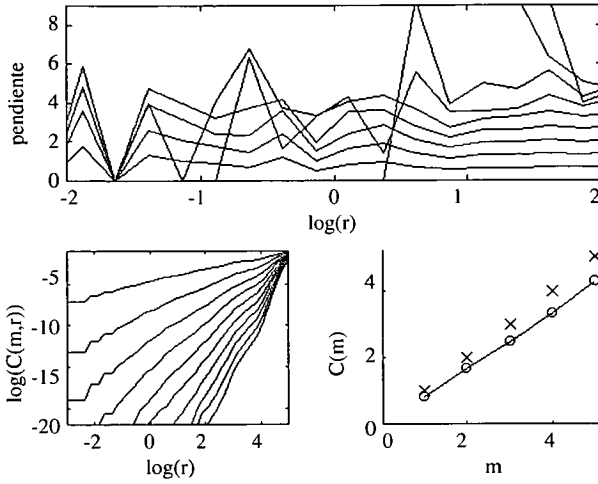


FIG. 2: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie de las diferencias logarítmicas del tipo de cambio peseta-marco barajada.

3. NO LINEALIDAD

En esta sección usamos el test creado por Brock, Dechert y Scheinkman, conocido como el test BDS, para detectar la existencia de no linealidad en los datos. El test BDS contrasta la hipótesis nula de serie i.i.d. frente a otras alternativas. Eliminada la componente lineal, el rechazo de la hipótesis nula indica la presencia de estructura no lineal en la serie.

Brock, Dechert y Scheinkman probaron que

$$C(m, r) - C(1, r)^m$$

es 0 para series infinitas i.i.d. Asimismo probaron la convergencia de

$$N^{1/2} (C(m, r) - C(1, r)^m)$$

a una normal con media 0 y varianza $\sigma(m, r)^2$ cuando $N \rightarrow \infty$, para series i.i.d. Definiendo

$$W(m, r) = N^{1/2} \frac{C(m, r) - C(1, r)^m}{\sigma(m, r)}$$

se tiene la convergencia de $W(m, r)$ hacia una $N(0, 1)$ cuando $N \rightarrow \infty$. La fórmula y una estimación para $\sigma(m, r)^2$ están dadas en BDS (1987).

Si los datos están correlados (lineal o no linealmente), entonces $C(m, r) > C(1, r)^m$ y $W(m, r)$ diverge como $N^{1/2}$.

En el cuadro 1 recogemos los resultados obtenidos en la aplicación del test BDS a las series de las diferencias logarítmicas. Para la elección de r en la aplicación del test, hemos seguido la recomendación de los autores tomando como distancia de referencia, r igual a 0.5, 1, 1.5 y 2 veces la desviación típica de los datos. Como podemos observar en el cuadro 1, los valores obtenidos superan ampliamente el valor crítico 1.96 trabajando con un nivel de confianza del 95 %, lo que ocasiona el rechazo de la hipótesis nula. Esto indica la presencia de no linealidad en los datos.

CUADRO 1. Aplicación del test BDS. α es la fracción de la desviación típica tomada para elegir r

MARCO					FRANCO					YEN				
m/α	0.5	1	1.5	2	m/α	0.5	1	1.5	2	m/α	0.5	1	1.5	2
2	19.62	19.08	17.08	15.63	2	9.61	9.56	16.01	14.41	2	14.04	14.82	14.82	14.01
3	25.45	24.04	21.06	18.88	3	10.85	10.92	18.75	16.43	3	18.01	18.25	18.06	17.27
4	30.92	27.32	23.12	20.37	4	12.51	12.74	19.94	16.99	4	22.64	21.38	20.36	19.14
5	36.28	29.77	24.38	20.96	5	13.62	14.05	20.91	17.16	5	27.70	24.49	22.07	20.19
6	43.02	32.50	25.68	21.63	6	14.97	15.52	21.68	17.45	6	33.50	27.85	23.76	21.11
7	50.81	35.21	26.68	22.07	7	15.77	16.46	22.33	17.50	7	40.90	31.41	25.27	21.85
8	61.12	38.30	27.69	22.44	8	16.80	17.62	23.02	17.53	8	51.78	35.89	26.89	22.47
9	74.92	41.81	28.64	22.69	9	18.41	19.38	23.59	17.61	9	66.09	40.95	28.49	23.10
10	91.82	45.56	29.60	22.95	10	20.29	21.53	24.24	17.68	10	86.10	46.98	30.35	23.78

Asimismo, hemos realizado un barajado de los datos y hemos comprobado que elimina la estructura no lineal. En el anexo II (cuadro 3) se recogen los resultados de la aplicación del test BDS a las series mezcladas. La aplicación del test no rechaza la hipótesis nula.

4. PREDICCIONES

El principal objetivo de las técnicas de predicción es conocer el futuro a partir de los datos recogidos en el pasado, pero también es una forma de detectar caos en una serie de tiempo.

Si la serie es caótica, es de esperar que los errores de las predicciones decrezcan a un valor próximo a cero cuando la dimensión de inmersión m crece hacia el mínimo valor correcto de la dimensión de inmersión m^* , permaneciendo próximos a cero para valores de m superiores a m^* ⁵.

Una vez hallados estos puntos, que denotamos $x_{t_i}^m$ para $i = 1, \dots, k$, y basándonos en las ideas de Farmer y Sidorowich (1987) y de Cleveland, Devlin y Grosse (1988), realizamos predicciones para la serie asignando en el primer caso a x_{t+T}^m el valor:

5 Véase Casdagli, M. (1989), p. 345.

$$x_{i+T}^m = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} x_{i+T}^m.$$

En el segundo caso el procedimiento es similar utilizando la función de pesos

$$W(u) = \begin{cases} (1-u^3)^3 & \text{for } 0 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

evaluada en $u = \frac{d_i}{d_k}$, donde d_i es la distancia entre $x_{i_i}^m$ y x_i^m y d_k es el máximo de los d_i , para $i = 1, \dots, k$.

Los resultados obtenidos por ambos métodos aparecen recogidos en el cuadro 2. El primer método lo hemos denotado por I y el segundo por II. El número de puntos predichos es 10. El número de puntos próximos utilizados es el 1 %, el 2 % y el 3 % de los datos. Para evaluar la calidad de las predicciones, calculamos el error cuadrático medio que denotamos E_1 . Asimismo, para comparar con las predicciones obtenidas por el paseo aleatorio, calculamos el error cuadrático medio obtenido al predecir por el último dato conocido, que denotamos E_2 . En el cuadro 2 aparece el cociente E_1/E_2 . Cuando este cociente es menor que uno, las predicciones realizadas mejoran la del paseo aleatorio.

Como podemos observar, los resultados obtenidos por ambos métodos ponen de manifiesto la impredecibilidad de las series, incluso a corto plazo. Sólo para la serie peseta-marco las predicciones realizadas mejoran, en algunos casos, las realizadas por el paseo aleatorio. Para esta serie los errores decrecen al aumentar la dimensión de inmersión, pero no se aproximan y estabilizan en 0 para $m \leq 9$. No podemos concluir por tanto que en ese caso se refleje la dinámica del sistema en dimensión de inmersión menor o igual a 9. Para el resto de las series, los errores cometidos en las predicciones superan siempre los cometidos por el paseo aleatorio, siendo además ambos bastante elevados, sobre todo en la serie peseta-100 yenes.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo estudiamos la serie de datos diarios del tipo de cambio comprador peseta-marco, peseta-franco y peseta-100 yenes correspondientes al período comprendido entre enero de 1978 y octubre de 1995.

La aplicación del test de Grassberger-Procaccia a la serie peseta-100 yenes parece indicar presencia de caos pues la dimensión de correlación se estabiliza, sin embargo al tomar la serie de las diferencias logarítmicos la dimensión de correlación no se estabiliza. Si la serie fuese caótica, el com-

portamiento de la dimensión de correlación debería haber sido el mismo en los dos casos. Podemos concluir entonces que esa serie no posee caos de baja dimensión. En el caso de las otras series la dimensión de correlación no se estabiliza en ninguno de los dos casos. Podemos por tanto concluir que ninguna de las series presenta caos de baja dimensión, aunque se detecta una componente de no aleatoriedad en las series.

CUADRO 2. Predicciones. m es la dimensión de inmersión, E_1 es el error cuadrático medio para nuestras predicciones, E_2 es el error cuadrático medio para el paseo aleatorio, k es el número de puntos próximos utilizado expresado como porcentaje sobre el número de datos de la serie.

	m	5	6	7	8	9	TIPO	k
MARCO	E_1	0.1471	0.1613	0.1764	0.2088	0.2011	I	1%
		0.1752	0.1551	0.1802	0.1730	0.1790	II	
		0.0844	0.0718	0.0712	0.0575	0.0536	I	
		0.1451	0.1505	0.1576	0.1620	0.1586	II	
		0.0331	0.0309	0.0290	0.0264	0.0248	I	
	0.0876	0.0854	0.0851	0.0877	0.0865	II	3%	
	E_1/E_2	1.5511	1.6901	1.8599	2.2019	2.2107	I	1%
		1.8478	1.8466	1.9001	1.8247	1.8873	II	
		0.8899	0.7571	0.7506	0.6063	0.5665	I	
		1.5296	1.5875	1.6622	1.7087	1.6722	II	
0.3492		0.3258	0.3062	0.2789	0.2621	I		
0.9237	0.9002	0.8976	0.9246	0.9120	II	3%		
FRANCO	E_1	0.6851	0.6596	0.6323	0.6323	0.6323	I	1%
		0.3141	0.3505	0.4207	0.6471	0.6611	II	
		1.3483	1.3339	1.3001	1.3040	1.3040	I	
		0.5989	0.6141	0.6341	0.6704	0.6717	II	
		1.8711	1.8713	1.8650	1.8576	1.8576	I	
	0.6322	0.6397	0.6522	0.6704	0.6717	II	3%	
	E_1/E_2	8.3547	8.0434	7.7106	7.7106	7.7106	I	1%
		3.8300	4.2747	5.1302	7.8917	8.0620	II	
		16.4429	16.2665	15.8541	15.9029	15.9029	I	
		7.3039	7.4888	7.7325	8.1751	8.1913	II	
22.8181		22.8210	22.7441	22.6532	22.6532	I		
7.7093	7.8013	7.9537	8.1751	8.1913	II	3%		
YEN	E_1	4.8969	4.8573	5.0099	7.5816	8.7310	I	1%
		6.5188	4.8075	4.8873	4.9615	5.0313	II	
		9.8669	10.8600	11.6790	12.3372	12.0043	I	
		7.7474	7.6101	7.8875	8.3449	8.6022	II	
		13.4457	17.4357	18.8352	20.3261	21.8528	I	
	8.9359	9.2927	9.6055	10.0417	10.4428	II	3%	
	E_1/E_2	2.4891	2.4690	2.5466	3.8537	4.4380	I	1%
		3.3135	2.4437	2.4843	2.5219	2.5574	II	
		5.0154	5.5202	5.9365	6.2710	6.1018	I	
		3.9381	3.8683	4.0092	4.2417	4.3725	II	
6.8345		8.8636	9.5740	10.3319	11.1079	I		
4.5421	4.7083	4.8825	5.1043	5.3081	II	3%		

Los resultados obtenidos en la aplicación del test BDS muestran de forma clara la no linealidad de las series. Los valores obtenidos superan ampliamente el valor crítico 1.96 trabajando con un nivel de confianza del 95%.

Asimismo los errores obtenidos en las predicciones apoyan la hipótesis sugerida por la aplicación del test de Grassberger-Procaccia de no presencia de caos determinista de baja dimensión en la serie. El error cuadrático medio de las predicciones supera en la mayoría de los casos el error cuadrático medio del paseo aleatorio.

Podemos por tanto concluir que las series no presentan caos de baja dimensión aunque poseen una estructura no lineal subyacente.

BIBLIOGRAFIA

- Ayuso, J. (1991): «Los defectos de la entrada de la peseta en el SME sobre la volatilidad de las variables financieras españolas». *Moneda y Crédito*, 193, pp. 111-145.
- Bajo Rubio, O., Fernández Rodríguez, F. y Sosvilla-Rivero, S. (1992): «Chaotic behaviour in exchange-rate series. First results for the peseta-U.S. dollar case». *Economics Letters*, 39, pp. 207-211.
- Brock, W. A., Dechert, W.D. y Scheinkman, J. A. (1987): «A test for independence based on the correlation dimension». SSRI Working paper n°. 8702, Department of Economics, University of Wisconsin.
- Casdagli, M. (1989): «Nonlinear prediction of chaotic time series». *Physica D*, 35, pp. 335-356.
- Cleveland, W. S., Devlin, S. J. and Grosse, E. (1988): «Regression by Local Fitting». *Journal of Econometrics*, 37, pp. 87-114.
- Farmer, J. D. and Sidorowich, J. J. (1987): «Predicting chaotic time series». *Physical Review Letters* 59, n° 8, pp. 845-848.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983a): «Measuring the strangeness of strange attractors». *Physica*, 9D, pp. 189-208.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983b): «Characterization of strange attractors». *Physical Review Letters*, 50, pp. 346-349.
- Lorenz, H. W. (1993): *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*. Springer-Verlag.
- Pérez González, M. P., Arranz Sombría, M. A. y Pérez Román, D. (1996): «Estudio del Comportamiento Caótico de la Serie de Tipo de Cambio Peseta-Libra». *X Reunión Asepelet-España* (en prensa).
- Tsonis, A. A. (1992): *Chaos: from theory to applications*. Plenum Press. New York.

ANEXO I

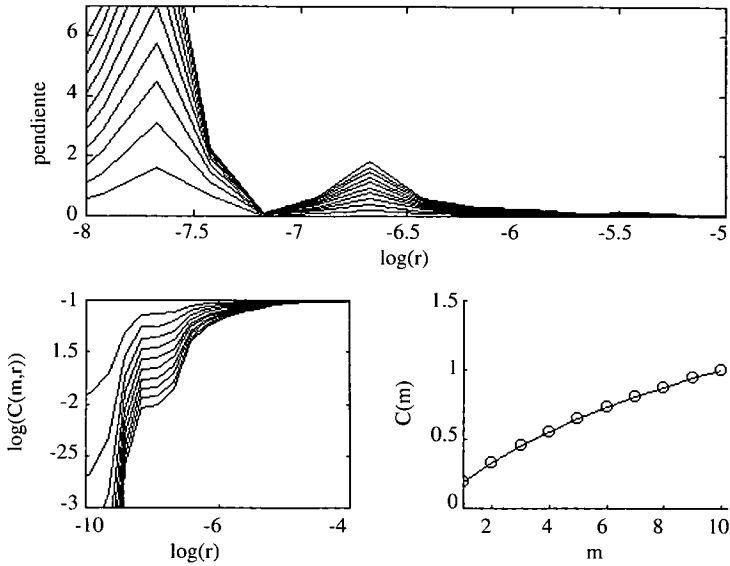


FIG. 3: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie de las diferencias logarítmicas del tipo de cambio peseta-franco.

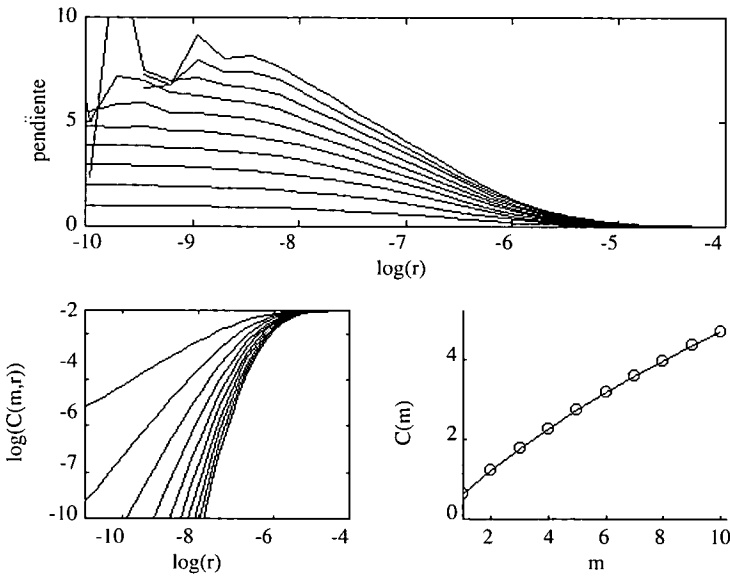


FIG. 4: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie de las diferencias logarítmicas del tipo de cambio peseta-100 yenes.

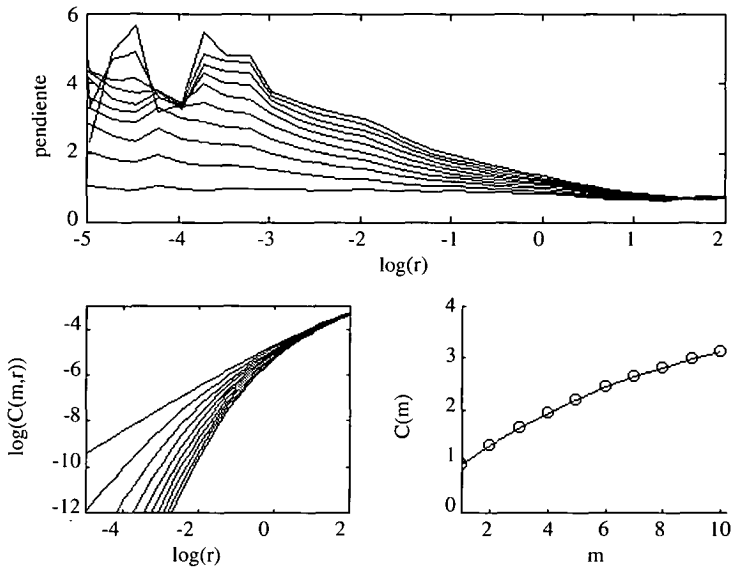


FIG. 5: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie del tipo de cambio peseta-marco.

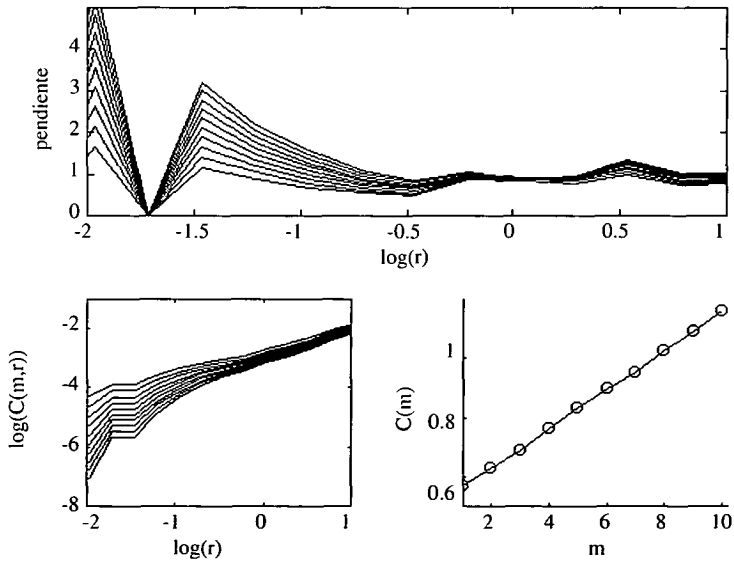


FIG. 6: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie del tipo de cambio peseta-franco.

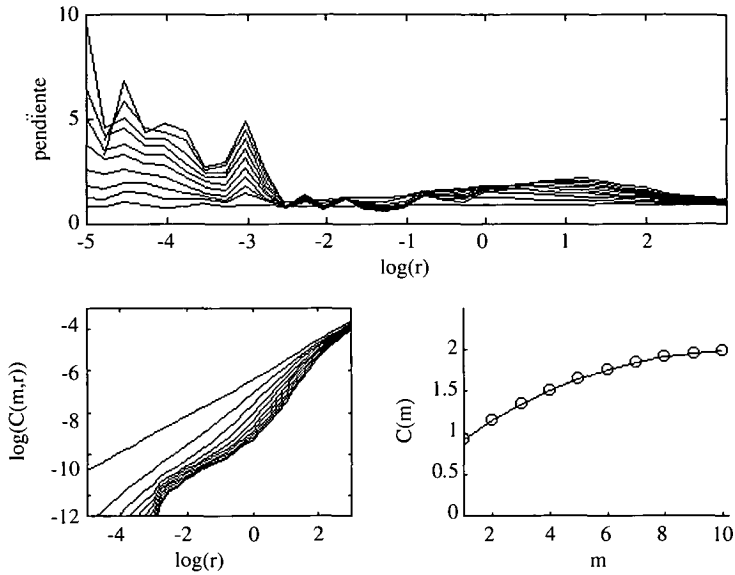


FIG. 7: m es la dimensión de inmersión, r es la distancia entre los puntos de la serie, $C(m, r)$ es la correlación integral y $C(m)$ es la dimensión de correlación para la serie del tipo de cambio peseta-100 yenes.

ANEXO II

CUADRO 3. Aplicación del test BDS a las series mezcladas. α es la fracción de la desviación típica tomada para elegir r .

MARCO					FRANCO					YEN				
m/α	0.5	1	1.5	2	m/α	0.5	1	1.5	2	m/α	0.5	1	1.5	2
2	-0.23	-1.01	-1.76	-1.55	2	0.93	0.93	-1.35	-1.35	2	-1.96	-1.75	-1.19	-0.39
3	-1.05	-1.43	-1.69	-1.38	3	0.29	0.29	-1.05	-1.05	3	-2.05	-1.84	-1.24	-0.33
4	-1.07	-1.50	-1.56	-1.14	4	0.17	0.17	-1.11	-1.11	4	-1.84	-1.66	-1.12	-0.45
5	-1.24	-1.55	-1.33	-0.73	5	0.37	0.37	-0.95	-0.95	5	-1.63	-1.59	-1.09	-0.52
6	-1.34	-1.46	-1.14	-0.54	6	0.44	0.44	-0.88	-0.88	6	-1.57	-1.62	-1.11	-0.56
7	-1.41	-1.27	-0.89	-0.31	7	0.55	0.55	-0.93	-0.93	7	-1.43	-1.48	-1.09	-0.67
8	-1.43	-1.15	-0.78	-0.28	8	0.54	0.54	-1.11	-1.11	8	-1.41	-1.40	-1.05	-0.71
9	-1.36	-1.04	-0.66	-0.22	9	0.56	0.56	-1.16	-1.16	9	-1.23	-1.41	-1.06	-0.79
10	-1.18	-0.89	-0.54	-0.19	10	0.54	0.54	-1.09	-1.09	10	-1.30	-1.35	-1.09	-0.89