

CAOS DETERMINISTA EN UN MODELO DE MERCADO ESPECULATIVO

*Fernando Fernández Rodríguez
María Dolores García Artilés*

RESUMEN.—Recientes trabajos empíricos ponen en duda la teoría del camino aleatorio como explicación del movimiento de los precios de un mercado financiero. Analizamos un modelo de mercado especulativo que incorpora dos grupos de agentes muy extendidos en los mercados reales. Los Fundamentalistas, que forman expectativas racionales sobre el valor fundamental de los activos y los Chartistas, que toman posiciones considerando predicciones basadas en el análisis histórico de los precios.

Nuestro modelo es discreto y no lineal, exhibiendo una dinámica mucho más rica que otros modelos similares en tiempo continuo. En efecto, probamos la existencia de un atractor caótico para valores pequeños del parámetro que describe el tiempo de retardo en la formación de expectativa chartista. El caos aparece como una forma sutil de violar la eficacia del mercado: aparente comportamiento aleatorio que oculta una compleja estructura de burbujas, en torno al precio de equilibrio Walrasiano, producida por la interacción especulativa.

1. INTRODUCCION

Desde hace más de tres décadas, la teoría financiera moderna ha basado su análisis de las cotizaciones bursátiles en el concepto de *eficiencia* de los mercados financieros. Un mercado es eficiente cuando la nueva información, que es comprendida rápidamente por todos los participantes, se absorbe instantáneamente y se incorpora a los precios del mercado. Así pues, en un mercado eficiente los precios de los distintos valores reflejan instantáneamente toda la información relevante. El ajuste inmediato de los precios a la nueva información implica que los sucesivos cambios en los precios de cada acción son independientes. Esto es, por definición, un mercado de «camino aleatorio», lo cual indica que el mercado no tiene memoria; es decir, las series históricas de precios no se pueden utilizar para predecir los precios futuros.

El crash bursátil de octubre de 1987 y sucesos más recientes han llevado a los economistas financieros a reconsiderar el comportamiento de los mercados de valores en particular y los mercados especulativos en general. La teoría del camino aleatorio y el paradigma de los mercados eficientes ha comenzado a ser cuestionado como una explicación plenamente satisfactoria del comportamiento de los mercados bursátiles (Peters, 1994). La alta volatilidad registrada en los mercados financieros durante los últimos años ha puesto de manifiesto la necesidad de elaborar teorías que expliquen dicha volatilidad en función del comportamiento especulativo de los agentes que intervienen en los mercados.

Diversos autores consideran la especulación como la principal causa de la alta volatilidad registrada actualmente en los mercados financieros. La especulación suele entenderse como la interacción generada por dos tipos de agentes del mercado: los fundamentalistas, que forman su expectativa racional en base a los valores que sobre los activos indica la teoría económica, y los chartistas, un grupo de agentes que basan su actuación en el mercado por medio del análisis de las tendencias de los precios en el pasado. En este sentido cabe citar diversos trabajos pioneros:

En primer lugar Zeeman (1974), explica el comportamiento inestable en un mercado de valores con especuladores mediante un modelo basado en la teoría de catástrofes de Thom.

Frankel y Frott (1986) sostienen que la gran apreciación del dólar desde 1980 a 1985 no fue debida a cambios en las variables fundamentales que afectaron a dicha moneda (como son los tipos de interés o el aumento de la demanda de activos en dólares en relación con otras divisas), sino que el dólar pudo haber caído en una burbuja especulativa. En su modelo actúan tres clases de agentes: fundamentalistas, chartistas y administradores de cartera cuya actuación se basa en establecer una media ponderada de las predicciones fundamentalistas y chartistas. Su desarrollo no supone un comportamiento plenamente racional de las tres clases de agentes en el sentido en que ninguno de ellos condiciona sus predicciones al conocimiento del modelo en su conjunto. Las burbuja es el efecto del intento de los administradores de carrea de aprender del modelo.

Bowden (1990) plantea una revisión de la teoría de mercados eficientes sobre la base del equilibrio de un juego predictivo con el fin de explicar la alta volatilidad que existe en muchos mercados activos. En su modelo considera la existencia de una mezcla de reglas chartistas de mercado, llegando a la conclusión de que tales reglas tienen que estar sujetas a una dinámica evolutiva, siendo imposible la creación de genuinos patrones de comportamiento a nivel global. Los intentos de los agentes de predecir en base a la historia de las cotizaciones conduce a la evolución de los patrones temporales y a la entrada de nuevas reglas de carácter eventual.

Goldman y Beja (1979) resaltan el papel de los especialistas del mercado y su influencia sobre los precios, utilizando un modelo de ajuste de precios con ecuaciones diferenciales estocásticas. Posteriormente, Beja y

Goldman (1980) desarrollan un modelo en el que el precio de los activos se ajusta con velocidad finita a la demanda agregada de los inversores e introducen un proceso de expectativas adaptativas para determinar la actuación de los chartistas en el mercado de valores, analizando las distintas tasas de convergencia hacia un equilibrio intertemporal walrasiano.

Finalmente, la aportación de Chiarella (1992) a este último modelo es la introducción de no linealidades en el exceso de demanda chartista, lo cual da lugar a una dinámica de los precios donde el nivel de equilibrio puede ser estable o inestable. En el caso estable, los precios convergen al equilibrio tras un shock que lo haya perturbado inicialmente, mientras que en el caso inestable, los precios tenderán a un ciclo límite estable alrededor del mismo.

La organización del artículo es la siguiente: En el apartado 2, se describe el modelo desarrollado por Chiarella (1992) que es la base de nuestro trabajo. En el apartado 3 se estudia la versión discreta de este modelo analizando su dinámica y los distintos tipos de bifurcaciones que presenta. Utilizando un teorema de Marotto (1978), en el apartado 4 se demuestra que nuestro modelo discreto presenta un comportamiento caótico encontrado para un determinado rango de los parámetros la existencia de un atractor extraño. En el apartado 5, detectamos un complejo movimiento transitorio o pre-caos en un rango de parámetros muy cercano al que produce este movimiento caótico. Por último, en los apartados 6 y 7 expone-mos nuestras conclusiones y las referencias bibliográficas.

2. UN MODELO BIDIMENSIONAL CONTINUO DE FUNDAMENTALISTAS Y CHARTISTAS

El modelo especulativo de Chiarella (1992) es una alternativa al punto de vista de que el precio sólo refleja el valor fundamental del activo esperado racionalmente. El estudio se concentra en analizar las dinámicas del precio de un activo, considerando la interacción generada por las dos clases diferentes de inversores: los fundamentalistas y los chartistas.

Por simplicidad, se considera un mercado especulativo donde se negocia un único activo. Inicialmente, se admite que los intercambios comerciales pueden realizarse de forma continua. Se adopta como premisa básica que los cambios del precio están forzados por el *exceso de demanda agregada* de los inversores

$$|\dot{P}(t) = D_t^*(.)| \quad (1)$$

donde $\dot{P}(t)$ es el logaritmo de los precios del activo en un tiempo t , y D_t^* la función del exceso de demanda de los inversores para el activo, en el tiempo t . El exceso de demanda de los inversores depende de su percepción sobre el mecanismo del mercado. Se supone que existen las dos tendencias clásicas sobre el funcionamiento del mercado de valores: una tendencia

basada en el análisis fundamental, y otra tendencia basada en el análisis técnico. El chartista, al contrario que el fundamentalista, es un operador a corto plazo. Ambas tendencias son compatibles dentro del mercado de valores. Es por esto por lo que la segunda premisa del modelo es considerar que el exceso de demanda de los inversores tiene una componente fundamental y una componente especulativa:

$$D_t^*(.) = D_t(.) + d_t(.) \quad (2)$$

donde D_t se refiere al exceso de la demanda fundamental y d_t al exceso de la demanda chartista.

Sea $W(t)$ el logaritmo del precio que la demanda fundamental justifica en un tiempo t , esto es, el precio de equilibrio subyacente de la acción. Es posible expresar el exceso de demanda fundamentalistas como una función lineal monótona creciente que se anula en cero.

$$D_t(.) = a(W(t) - P(t)), \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (3)$$

donde « a » es la *pendiente de la demanda fundamentalista*. Esto sugiere que dicha demanda se ajusta con una dinámica de *expectativas racionales*. Si la estimación del valor intrínseco de una acción es mayor que el precio real de mercado, la demanda fundamentalista aumentará y disminuirá en el caso contrario.

El exceso de demanda chartista se determina definiendo una nueva variable $\Psi(t)$, que mide la estimación (media) de la tendencia actual de $P(t)$; sea también $g(t)$ la tasa creciente de inversiones alternativas, como es el caso de bonos gubernamentales (sin riesgo). Se considera, por tanto, que el exceso de demanda chartista es una función de la diferencia entre el rendimiento esperado del activo, medido por la estimación chartista de la tendencia del precio, y el rendimiento de algún activo alternativo, esto es, $\Psi(t) - g(t)$

$$d_t(.) = h(\Psi(t) - g(t)) \quad (4)$$

donde h es una funcional no lineal, creciente, que pasa por el origen, con un punto de inflexión en $(-g)$ y acotada superior e inferiormente, lo que indica que el volumen de contratación especulativo está controlado en función del activo.

El modelo se cierra especificando el modo en que los chartistas forman su estimación de la tendencia del precio. Los chartistas consideran estimaciones sobre el estado del mercado basándose en la hipótesis de que los precios varían siguiendo tendencias de los precios pasados. Todo ello lleva a suponer que la dinámica de un mercado especulativo fuera del equilibrio se basa en un proceso de *expectativas adaptativas* de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\dot{\Psi}(t) = c(\dot{P}(t) - \Psi(t)), \quad 0 < c \leq \infty \quad (5)$$

que describe la variación chartista de la tendencia del precio y donde c es la velocidad de ajuste chartista. Esta ecuación pretende describir la base del análisis técnico, donde la estimación de la tendencia se ajusta al alza si el cambio de precio es más alto que el esperado, y viceversa. Alternativamente, la cantidad τ ($= 1/c$) indicará el tiempo de retardo en formación de expectativas.

Introduciendo una desviación del precio de equilibrio: $p = P - \bar{P}$ y asumiendo que $W(t)$ y $g(t)$ son constantes, las ecuaciones (1)-(5) implican que las dinámicas del precio del activo se rigen por el sistema de segundo orden de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -ap + k(\Psi) \\ \tau \dot{\Psi} &= -ap - \Psi + k(\Psi) \end{aligned} \quad (6)$$

donde $k(\Psi) = h(\Psi - g) - h(-g)$. En este caso el punto de equilibrio es $\bar{P} = \bar{\Psi} = 0$.

Se observa que la función $k(\Psi)$ tiene las mismas características que $h(\Psi - g)$, salvo que ahora el punto de inflexión está en el origen. Por otra parte, como $k'(\Psi) = h'(\Psi - g) > 0$, en el punto de equilibrio ocurre que $k'(0) = h'(-g) = b > 0$, donde el parámetro b refleja la pendiente en el equilibrio de la demanda chartista o especulativa.

Las conclusiones del estudio de Chiarella son las siguientes: El equilibrio se hace localmente inestable cuando los chartistas basan su estimación de la tendencia en los cambios de precio más recientes. Las dinámicas no están completamente determinadas por los valores relativos de impacto en el mercado a y b de la demanda fundamental y especulativa respectivamente, pero sí por los valores conjuntos. Aumentando el impacto de los chartistas en el mercado, el sistema oscila y se hace inestable, como se espera. La estabilidad e inestabilidad del equilibrio y la naturaleza de las fluctuaciones que se producen en el caso inestable, dependerán de la interacción entre la intensidad de la demanda fundamental, la intensidad de la demanda especulativa y la velocidad con la que los chartistas revisan sus estimaciones de la tendencia del precio.

Este modelo presenta un comportamiento asintótico de punto fijo estable o ciclo límite estable, según las magnitudes de los parámetros fundamentalistas y chartistas. La transición de uno a otro comportamiento dinámico se realiza por medio de una bifurcación de Hopf, que se produce al reducir el tiempo de retardo en la formación de expectativas. Cuando el tiempo de retardo tiende a cero, el ciclo límite estable se convierte en un ciclo límite de tipo rápido-lento, cuya dinámica se explica en función del comportamiento del precio del activo y de la expectativa chartista.

El análisis del modelo de Chiarella sobre la dinámica del comportamiento especulativo y la consiguiente interacción en los mercados de diversos tipos de agentes (chartistas y fundamentalistas), permite una comprensión más realista del comportamiento de los activos fuera del equilibrio, pero estos modelos tienen el problema de presentar un comportamiento dinámico demasiado simple, que no se ajusta a la lógica de las expectativas racionales de los agentes que, de

conocer de antemano una dinámica determinista, la destruirían mediante actuaciones que intentan anticiparse a dicha dinámica con el fin de maximizar sus beneficios. Las expectativas racionales sugerirían por tanto versiones estocásticas de los modelos de mercado.

A continuación desarrollamos un modelo especulativo discreto que emula de forma más verosímil el comportamiento de un mercado real. Nuestro modelo dará lugar a una dinámica muy compleja e impredecible que podría ser confundida con el azar y que se conoce genéricamente como caos determinista.

3. UN MODELO BIDIMENSIONAL DISCRETO DE FUNDAMENTALISTAS Y CHARTISTAS

Los progresos efectuados en la comprensión de las dinámicas no lineales han suscitado un gran interés en los economistas financieros. El motivo se comprende fácilmente: la teoría del caos determinista y el análisis de los atractores extraños han puesto de manifiesto la sorprendente semejanza que existe entre las trayectorias caóticas y las evoluciones estocásticas.

En nuestro caso, la interacción de fundamentalistas y chartistas puede presentar una dinámica caótica para determinado rango de los parámetros. La característica clave del movimiento caótico es que un sistema determinista puede generar una serie temporal que parezca completamente aleatoria y que la historia temporal que comienza en puntos iniciales muy próximos tengan un aspecto completamente diferente.

Como la expresión matemática del modelo especulativo analizado por Chiarella (1992) es un sistema diferencial bidimensional en tiempo continuo, para estudiar la posibilidad de un comportamiento caótico es necesario considerar la versión del modelo en tiempo discreto, ya que, según el teorema de Poincaré-Bendixon, la posibilidad de que se genere un movimiento caótico en un modelo en tiempo continuo requiere que el sistema sea de al menos tres ecuaciones diferenciales.

En este sentido vamos a discretizar el sistema determinista obtenido por Chiarella, haciendo $\dot{p} = p_{t+1} - p_t$, $\dot{\Psi} = \Psi_{t+1} - \Psi_t$ en el sistema (6), se obtiene

$$p_{t+1} = (1 - a)p_t + k(\Psi_t) \quad (7)$$

$$\Psi_{t+1} = -a/\tau p_t + (1 - 1/\tau)\Psi_t + k(\Psi_t)/\tau$$

que representa un sistema no lineal de dos ecuaciones en diferencias unidimensionales, cuyo único punto de equilibrio es el origen, y donde la función no lineal $k(\Psi)$ tiene las siguientes propiedades:

- (i) $k(0) = 0$
- (ii) $k'(\Psi) > 0$
- (iii) $k''(\Psi) < 0$ para $\Psi > 0$ y $k''(\Psi) > 0$ para $\Psi < 0$
- (iv) $\lim_{\Psi \rightarrow \pm\infty} k'(\Psi) = 0$
- (v) $k(+\infty) = k_{sup}$ y $k(-\infty) = k_{inf}$

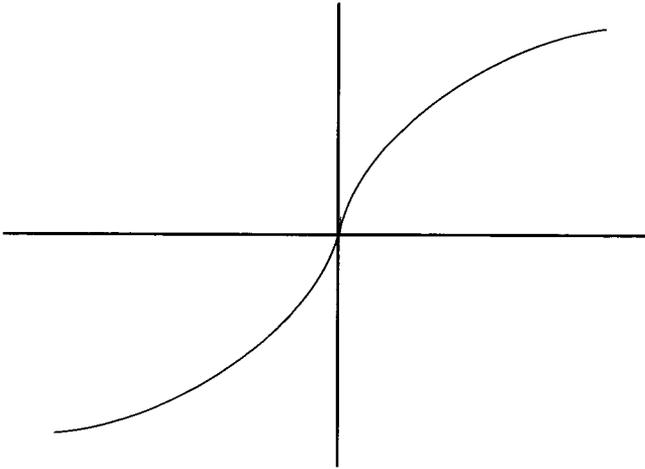


FIG. 1. Gráfica de la función $k(\Psi)$.

Dadas las características que presenta la función $k(\Psi)$, nosotros la hemos supuesto equivalente a la función tangente hiperbólica que presenta una combinación de funciones exponenciales. Aunque esto no es esencial para el desarrollo analítico del modelo, sí resulta imprescindible para la realización de las simulaciones numéricas que hemos efectuado.

$$k(\Psi) = \frac{b(e^{2\Psi} - 1)}{e^{2\Psi} + 1}$$

siendo b la cota superior de la función. En los siguientes apartados de esta sección realizaremos un estudio analítico del modelo (7).

3.1. ANÁLISIS LINEAL LOCAL. BIFURCACIONES

Para realizar el análisis lineal local calculamos el Jacobiano en el punto equilibrio

$$J_E = \begin{bmatrix} 1 - a & b \\ -\frac{a}{\tau} & 1 - \frac{(1 - b)}{\tau} \end{bmatrix}$$

siendo

$$T = \text{tr } J_E = (1 - a) + (1 - 1/\tau) + b/\tau$$

$$D = \det J_E = (1 - a)(1 - 1/\tau) + b/\tau$$

Los autovalores de esta matriz vendrán dados por la solución de la ecuación característica: $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, esto es:

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

El criterio de estabilidad en el plano (T, D) está dibujado en la Figura 2. La divergencia ocurre sobre la recta $T - D = 1$; mientras que una bifurcación flip (fenómeno de período doble), en la recta $T + D = -1$, y una bifurcación de Neimark se encuentra sobre la recta $D = 1$. El límite de estabilidad es el triángulo LMN , los puntos que están dentro de este triángulo representan la estabilidad asintótica del sistema.

La región donde el sistema oscila y se hace inestable se encuentra en aquella región donde los autovalores son complejos y se encuentren fuera de la línea de Neimark ($D > 1$). La bifurcación de Neimark se produce si $D = 1$, esto es cuando los parámetros verifiquen la relación $\tau = 1 + \frac{b-1}{a}$.

Si $\tau > 1 + (b-1)/a$, el sistema permanece estable, mientras que si $\tau < 1 + (b-1)/a$, el sistema oscila y se vuelve inestable. Se observa que la dinámica del modelo discreto no depende únicamente de los valores de impacto en el mercado que pueden alcanzar las demandas fundamentalistas y chartistas, pero sí depende de los valores conjuntos. A medida que el tiempo de retardo en la formación de expectativas chartista disminuye, el sistema pierde estabilidad.

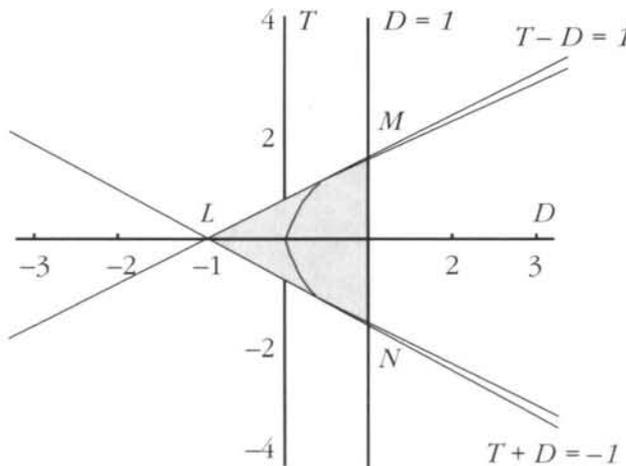


FIG. 2. Estabilidad asintótica del sistema.

El comportamiento del sistema tiene una respuesta periódica si los autovalores son raíces de la unidad. Este sería el caso en que $T = -1$ y $D = 1$; los

autovalores complejos son $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ y cruzan el círculo unidad en un ángulo $\theta = \pm 120^\circ$; por tanto $\lambda^3 = 1$ y el sistema tiene un período 3. La Figura 3 representa este caso, el sistema se dice que tiene una *resonancia fuerte* (Thompson y Stewart, 1993). Se observa que el sistema pasa de ser estable a inestable con un comportamiento triangular. Análogamente, si $T = 0$ y $D = 1$, los autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i$ cortan al círculo unidad en un ángulo $\theta = \pm 90^\circ$, por lo que $\lambda^4 = 1$ y el movimiento del sistema tiene período 4 (Figura 4).

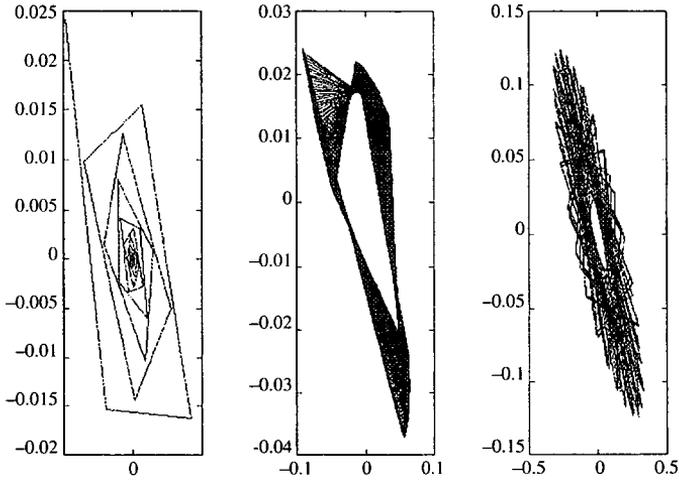


FIG. 3. Si los autovalores son la tercera raíz de la unidad, el sistema tiene período tres, lo que indica una resonancia fuerte. $a = 0.6$; $b = 0.52$; $\tau = 0.3$; 0.2 ; 0.178 respectivamente.

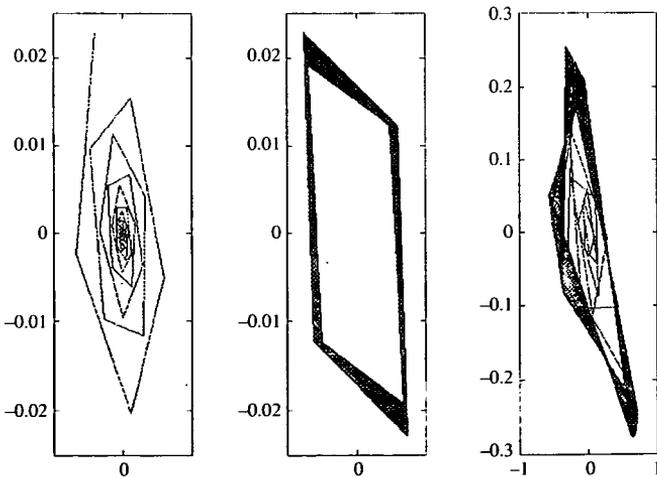


FIG. 4. Si los autovalores son la cuarta raíz de la unidad, el sistema tiene período cuatro o resonancia fuerte. $a = 0.6$; $b = 0.58$; $\tau = 0.4$; 0.3 ; 0.2 respectivamente.

Sintetizando lo que ocurre sobre la línea de Neimark (Figura 5), observamos que se obtiene una divergencia silla-nodo cuando $\theta = 0$ con $\lambda = 1$, y una bifurcación flip cuando $\theta = \pi$ con $\lambda = -1$. Ambos son en esencia fenómenos unidimensionales y pueden ser estudiados restringiendo la atención a la variedad central unidimensional. A continuación se encuentran dos casos especiales denominados *resonancias fuertes* asociados al fenómeno no lineal, cuando $\theta = 2\pi/3$ ó $\pi/2$ y donde los autovalores son la tercera y cuarta raíz de la unidad respectivamente.

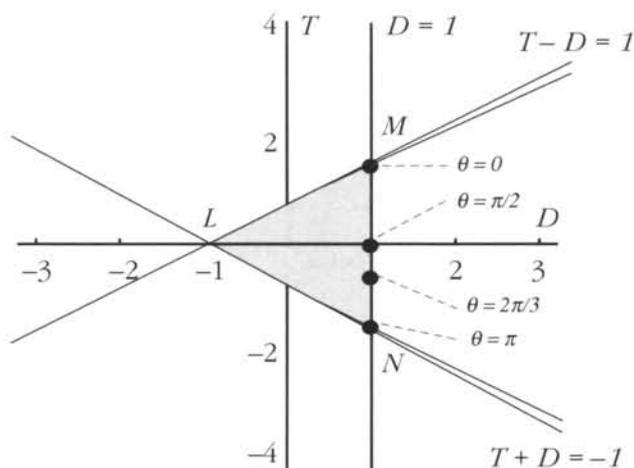


FIG. 5. Bifurcaciones sobre la Línea de Neimark $D = 1$

En el caso de que los autovalores no sean la tercera ni la cuarta raíz de la unidad, es posible proceder a un análisis general de la bifurcación de Hopf.

3.2. BIFURCACIÓN DE HOPF

La mayoría de los planteamientos matemáticos sobre órbitas cerradas en sistemas dinámicos se refieren a sistemas a tiempo continuo. Una excepción de esta regla es el teorema de bifurcación de Hopf en tiempo discreto en \mathbb{R}^2 , aunque desafortunadamente no existe una generalización del teorema al caso n-dimensional.

Recientemente, el teorema de bifurcación de Hopf ha sido aplicado en modelos económicos. Este es el caso del estudio en la versión discreta del modelo de Goodwin, argumentando precios flexibles; realizado por los autores Cugno y Montrucchio (1984). En un modelo de generaciones solapadas trabajado por Reichlin (1986), se encuentran condiciones de estabilidad. Lorenz H. W. (1993) también comprueba la existencia de una bifurcación de Hopf en el modelo discreto de Kaldor.

El siguiente resultado, debido a Ruelle y Takens (1971), es una versión de Iooss (1979), y más recientemente de Guckenheimer y Holmes (1983).

TEOREMA 1. (Bifurcación de Hopf en el caso discreto)

Sea el sistema de ecuaciones en diferencias $x_{t+1} = F(x_t, \mu)$, donde $x_t \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ con una familia de puntos fijos $x^*(\mu)$, en donde los autovalores son complejos conjugados. Si existe un μ_0 tal que

$$(i) \quad \text{mod } \lambda(\mu_0) = 1 \quad \text{con} \quad \lambda^n(\mu_0) \neq \pm 1, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

$$(ii) \quad \frac{d(\text{mod } \lambda(\mu_0))}{d\mu} < 0$$

entonces existe una bifurcación en una curva cerrada en el valor $\mu = \mu_0$.

Hay una gran analogía de este teorema con el teorema de bifurcación de Hopf para flujo. El requerimiento que los autovalores cruzan el eje imaginario es sustituido por la condición de que los autovalores complejos conjugados cruzan el círculo unidad; esto es, $\text{mod. } \lambda = 1$ en el punto de bifurcación $\mu = \mu_0$. Por otra parte, también se precisa que las raíces no sean reales cuando sean iteradas sobre el círculo unidad. Finalmente, los autovalores deben cruzar el círculo unidad con velocidad no nula cuando μ pasa a través de μ_0 (desde $\mu > \mu_0$ a $\mu < \mu_0$).

En nuestro caso, el valor del módulo puede ser determinado considerando la ecuación característica: $\lambda^2 - \text{tr } J_E \lambda + \det J_E = 0$, siendo sus soluciones:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } J_E \pm \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 - 4 \det J_E}}{2}$$

En el caso que las soluciones sean complejas conjugadas, podemos escribir $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, siendo $\alpha = \text{tr } J_E / 2$ y $\beta = \sqrt{(4 \det J_E - (\text{tr } J_E)^2) / 4}$. El módulo se define.

$$\text{mod}(\lambda) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 / 4 + (4 \det J_E - (\text{tr } J_E)^2) / 4} = \sqrt{\det J_E}$$

siendo $\det J_E = (1 - a)(1 - 1/\tau) + b/\tau$. Los autovalores serán complejos conjugados si

$$\det J_E > \frac{(\text{tr } J_E)^2}{4}$$

En el rango de parámetros donde dicha desigualdad es verdadera, se obtiene una bifurcación de Hopf para el sistema dinámico en tiempo discreto, en el valor $\tau = \tau_0$ si $\det J_E = 1$ cuando $\tau = \tau_0$, esto es, si se verifica

$$(1-a)\left(1 - \frac{1}{\tau_0}\right) + \frac{b}{\tau_0} = 1 \Rightarrow \tau_0 = 1 + \frac{b-1}{a}$$

Además en $\tau = \tau_0$ se demuestra

$$\frac{d(\text{mod } \lambda(\tau))}{d\tau} = -\frac{a^2}{2\tau_0} < 0$$

Por tanto el módulo cruza el círculo unidad con velocidad no nula cuando el parámetro τ cambia (de $\tau > \tau_0$ a $\tau < \tau_0$) y el punto fijo pasa de ser estable a inestable. Estableciendo el requisito que las interacciones λ^n , $n = 1, 2, 3, 4$, sobre el círculo unidad sigan siendo complejas conjugadas, todas las condiciones del teorema de bifurcación de Hopf para el caso discreto se cumplen cuando $\tau = \tau_0$.

Podemos observar en la Figura 6 una bifurcación de Hopf. La bifurcación se produce en el valor $\tau = 0.45$, que corresponde al segundo gráfico de la fila superior. En los tres gráficos de la fila inferior de la Figura 6 el valor de τ disminuye. Se observa que el sistema pasa de un ciclo límite a un sistema de período cuatro, y por último se concentra en un atractor. Esta situación transitoria que se produce en el sistema la veremos con más detalle posteriormente.

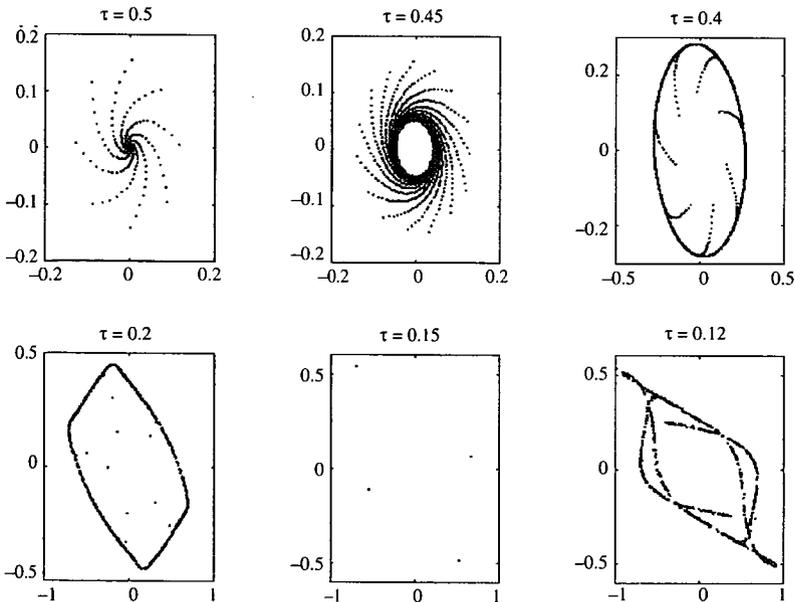


FIG. 6. En las tres figuras superiores el sistema pasa por una bifurcación de Hopf a medida que el tiempo de retardo disminuye. En las tres figuras inferiores el tiempo de retardo sigue disminuyendo, el sistema pasa de una órbita atractor cerrada a establecerse en un período cuatro para finalmente concentrarse en un atractor. $a = 0.3$; $b = 0.853$; $n = 1000$ iteraciones.

4. DETECCION DEL CAOS A TRAVES DE UN PUNTO REPELEDOR

La mayor parte de los estudios que se caracterizan por tener un comportamiento complejo y que han podido modelizarse en economía se refieren, en el caso discreto a distemas dinámicos unidimensionales. En el caso de sistemas discretos bidimensionales el sistema de Henon, que se utiliza frecuentemente como ejemplo clásico para la dinámica caótica en \mathbb{R}^2 , tiene la característica de ser invertible bajo una determinada condición. Sin embargo, el comportamiento complejo puede ser observado también en sistemas no invertibles.

Marotto (1978) estudia un sistema bidimensional no invertible, que con determinadas condiciones resulta cualitativamente igual a la ecuación logística. Sus resultados calculados mediante simulaciones numéricas para determinados valores en los parámetros, dan lugar a diversos objetos geométricos. Estos objetos resultan ser atractores en el sentido en que puntos iniciales localizados lejos de los mismos se aproximan a ellos rápidamente. La forma inusual de estos atractores, los cuales no son ni puntos fijos ni órbitas cerradas, es la razón por la que han sido llamados *atractores extraños*.

Un intento de generalizar el resultado del teorema de Li y Yorke (1975) para sistemas discretos n-dimensionales es el trabajo realizado por Diamond (1976), el cual no ha tenido suficiente aplicación en el campo económico. Nosotros nos basaremos en el concepto de *snap-back repeller* (repeledor de salto hacia atrás) introducido por Marotto (1978) para la detección del caos en el modelo especulativo.

DEFINICIÓN 1. (*Punto fijo expansivo*)

Se considera un sistema dinámico en tiempo discreto $x_{t+1} = f(x_t)$ con un punto fijo inestable $x^* = f(x^*)$, siendo $B_r(x^*)$ una bola cerrada con radio r en \mathbb{R}^n centrada en x^* . Se dice que el punto x^* perteneciente a \mathbb{R}^n es un *punto fijo expansivo* de $f(x)$ en términos de Marotto (1978), si x^* es un punto fijo y todos los autovalores del jacobiano de $f(x)$ son en valor absoluto mayores que uno para todo x perteneciente a la bola $B_r(x^*)$.

Esta definición no implica que la serie temporal se mueva siempre lejos de x^* . Si x no pertenece a $B_r(x^*)$, para un r arbitrario los autovalores podrán ser menores o iguales que uno. Un punto x_t que se encuentre fuera de $B_r(x^*)$ puede saltar dentro de ella e incluso coincidir con x^* ; en este caso, el punto fijo se denomina *repeledor de salto hacia atrás* en términos de Marotto.

La Figura 7 muestra la idea de un punto repeledor: Una trayectoria que comienza en un punto x_0 arbitrariamente cerca del punto fijo x^* , es repelida del punto fijo después de tomar algunos valores dentro de la bola $B_r(x^*)$, pero al cabo de ciertas iteraciones salta hacia atrás súbitamente para caer exactamente en el punto fijo.

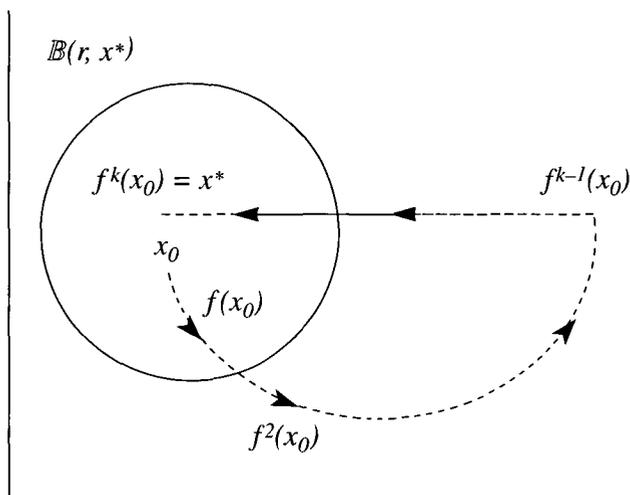


FIG. 7. Un Snap-Back Repeller.

TEOREMA 2. (Marotto, 1978)

Si f posee un repelidor de salto hacia atrás, entonces el sistema dinámico en tiempo discreto es caótico.

En nuestro modelo bidimensional en tiempo discreto, el jacobiano del sistema (7) es:

$$J = \begin{bmatrix} -a + 1 & k'(\Psi) \\ -\frac{a}{\tau} & \frac{k'(\Psi) - 1}{\tau} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + 1 & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} + 1 \end{bmatrix}$$

siendo:

$$F_{11} = -a; F_{12} = k'(\Psi); F_{21} = \frac{-a}{\tau}; F_{22} = \frac{k'(\Psi) - 1}{\tau}$$

Los autovalores de J vendrán dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{(F_{11} + 1) + (F_{22} + 1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(F_{11} - F_{22})^2 + 4 F_{12} F_{21}}{4}}$$

Para el rango de parámetros tales que $a < 1$, $k'(\Psi) > 1$ y $\tau < 1 + (b - 1)/a$, el módulo de los autovalores es mayor que uno, lo que implica que los autovalores permanecen fuera del círculo unidad y el punto fijo es un punto fijo expansivo en términos de Marotto.

Herrmann (1985) fue capaz de encontrar un repeledor de salto hacia atrás en el modelo de Kaldor en tiempo discreto, de tal forma que en la décimo segunda iteración dicho punto saltaba para caer exactamente en el punto fijo. La búsqueda dentro de un sistema complejo de un punto repeledor no es tarea sencilla y su localización casi puede ser producto de la casualidad, por esto hemos ideado un método que nos permite detectar dicho punto de una forma más directa.

El procedimiento que hemos seguido para encontrar en este rango de parámetros un punto repeledor es considerar las iteraciones inversas del punto fijo de la siguiente forma:

$$f^{-1}(\dots f^{-1}(f^{-1}(x^*))) = x_0$$

En nuestro modelo, y para el rango de parámetros en donde se verifica que el punto fijo es un punto fijo expansivo, partiendo del mismo ocurre (como veremos en la simulación realizada) que en la primera iteración el punto salta a un valor que se encuentra fuera de una bola de centro el origen y radio 1, esto es, un abola $B_1(0^*)$, a partir del cual las próximas iteraciones se irán acercando tanto como queramos al punto fijo (Figura 8).

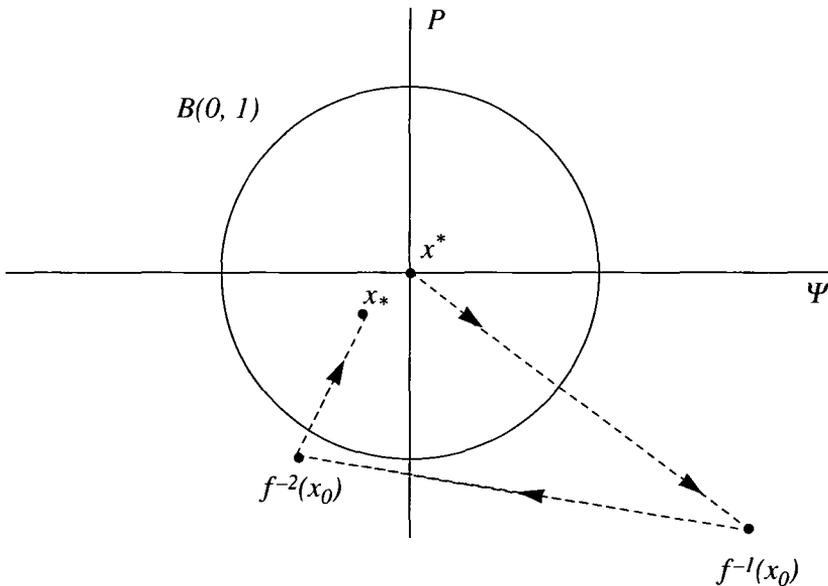


FIG. 8. Un Snap-Back Repeller mediante iteraciones inversas.

A continuación, en el Cuadro 1, se muestran los resultados de la simulación numérica para las veinte primeras iteraciones, tomando como valores de los parámetros: $a = 0.015$; $b = 1.5$; $\tau = 0.01$; $\Psi_i = 0$; $P_i = 0$; siendo Ψ_i y P_i valores iniciales de Ψ y P respectivamente.

CUADRO 1. Resultados Numéricos del Snap-Back Repeller

Número	Ψ	P
i = 1	0	0
i = 2	1.3221	-1.3208
i = 3	-0.0359	-1.2862
i = 4	-0.0375	-1.2487
i = 5	-0.0364	-1.2123
i = 6	-0.0354	-1.1769
i = 7	-0.0343	-1.1426
i = 8	-0.0333	-1.1093
i = 9	-0.0323	-1.0769
i = 10	-0.0314	-1.0455
i = 11	-0.0305	-1.0151
i = 12	-0.0296	-0.9855
i = 13	-0.0287	-0.9567
i = 14	-0.0279	-0.9288
i = 15	-0.0271	-0.9018
i = 16	-0.0263	-0.8755
i = 17	-0.0255	-0.8500
i = 18	-0.0248	-0.8252
i = 19	-0.0240	-0.8011
i = 20	-0.0233	-0.7778

En el Cuadro 1 observamos que, partiendo del punto fijo, en la décimo segunda iteración, el punto entra dentro de la bola de radio 1 y se aproxima al centro de la misma tanto como queremos. Por lo que se deduce que el modelo en su versión discreta tiene un repeledor de salto hacia atrás para un determinado rango de los parámetros y, en consecuencia, el sistema tiene un comportamiento caótico en ese rango. Es interesante resaltar —tal y como apunta Marotto— que los puntos repeledores persisten bajo pequeñas perturbaciones de los parámetros.

Los resultados gráficos de esta simulación numérica pueden observarse en las Figuras 9 y 10. Para valores altos de τ , las series temporales convergen hacia el único punto fijo. Cuadro τ comienza a disminuir, la secuencia $\{(P_t, \Psi_t)\}_{t=1}^T$ es localizada primero sobre una órbita atractor cerrada. Para valores muy pequeños de τ , el sistema se concentra sobre un atractor extraño (Figura 9). Las trayectorias por separado de las series temporales P_t y Ψ_t (Figura 10), muestran el comportamiento típicamente caótico con una gran sensibilidad a las condiciones iniciales.

5. CAOS TRANSITORIO

La literatura económica sobre dinámica caótica suele concentrarse en estudiar el comportamiento en apariencia estocástico de los sistemas dinámicos con un único atractor. Mientras que el conocimiento de un atractor es un concepto familiar en economía cuando aparecen puntos fijos estables (localmente

o globalmente), u órbitas cerradas estables, el concepto de *atractor caótico* esto es, atractores que no son ni un punto ni una curva cerrada, resulta ser una extensión útil del concepto de estabilidad en la dinámica económica. Sin embargo, según Lorenz (1992), la concentración del estudio del movimiento sobre un único atractor ha distraído la atención de considerar: 1) que el movimiento en un sistema dinámico puede tener múltiples atractores, y 2) detectar el movimiento transitorio que ocurre antes del establecimiento de una trayectoria sobre un atractor particular.

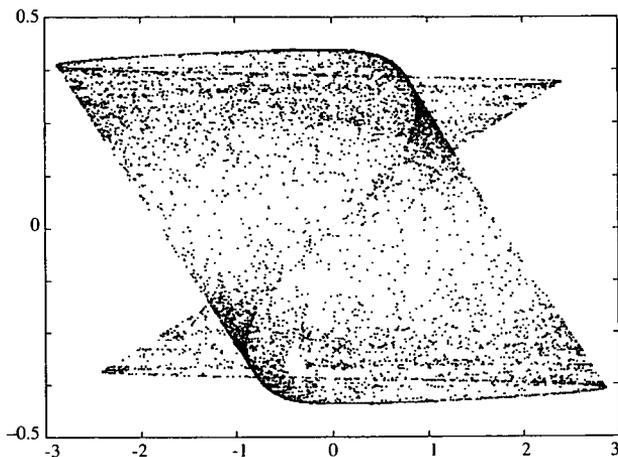


FIG. 9. Atractor caótico (10.000 iteraciones); $a = 0.015$, $b = 1.5$, $\tau = 0.217$.

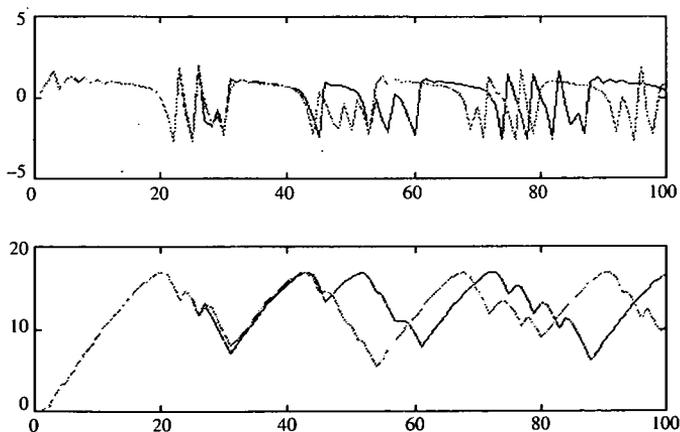


FIG. 10. Series temporales de P (gráfico superior) y Ψ (gráfico inferior) correspondientes al atractor caótico simulado en la Figura 9 haciendo variar las condiciones iniciales.

El comportamiento complejo de un sistema no sólo puede ocurrir en los atractores extraños, sino también puede ser una propiedad del movimiento en la fase transitoria antes de que aparezca el atractor. Una trayectoria transitoria puede parecer un comportamiento complejo incluso si el atractor es no caótico. Este comportamiento complejo transitorio persiste durante un tiempo considerable, justo antes de que una trayectoria converja hacia un atractor periódico.

En este apartado usamos el modelo especulativo en tiempo discreto con el fin de demostrar la existencia de un complicado movimiento transitorio que se genera con anterioridad al movimiento caótico. Conocemos, por resultados anteriores, que el modelo es capaz de generar caos para bajos valores del parámetro fundamentalista, altos valores del parámetro chartista y tiempo de respuesta chartista suficientemente bajo. La Figura 11 muestra la trayectoria temporal de las expectativas de la tendencia actual del precio Ψ para un valor ligeramente mayor de τ en igualdad de condiciones en que se ha realizado la simulación previa.

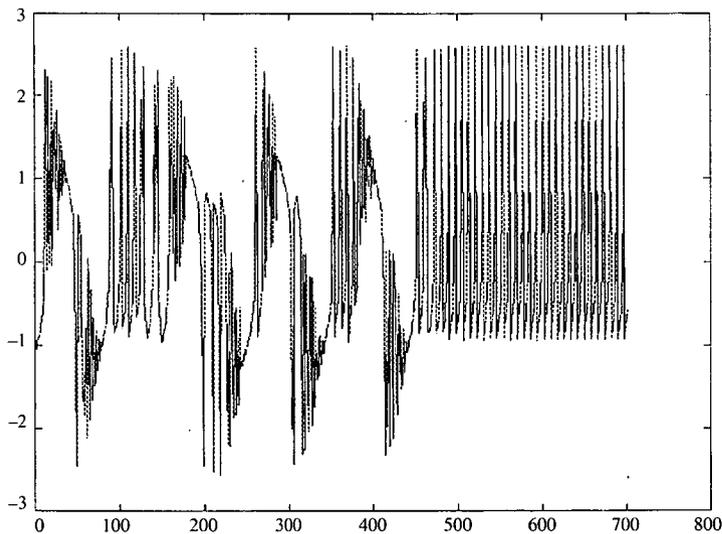


FIG. 11. Trayectoria temporal con fase transitoria.

El modelo especulativo genera un complicado movimiento transitorio que converge hacia una órbita regular. Mientras que para estas condiciones la fase transitoria persiste durante mucho tiempo (aproximadamente 2.500 períodos), en otras condiciones iniciales puede durar mucho menos (sobre 700 períodos), la trayectoria converge hacia una órbita atractor después de ser colapsada por un complejo movimiento.

La Figura 12 muestra el espacio de fase para las primeras 5.000 iteraciones. Su contorno es similar al atractor caótico de la Figura 9, pero para este

valor particular del parámetro la mayoría de los puntos en el espacio de fase representan puntos transitorios. El atractor está geoméricamente organizado en una órbita de ocho grupos donde cada uno de ellos incluye el mismo número de puntos. Los 8 grupos del atractor han sido enfatizados en la Figura 13 con círculos, que indican la localización correspondiente dentro del atractor en el espacio de fase.

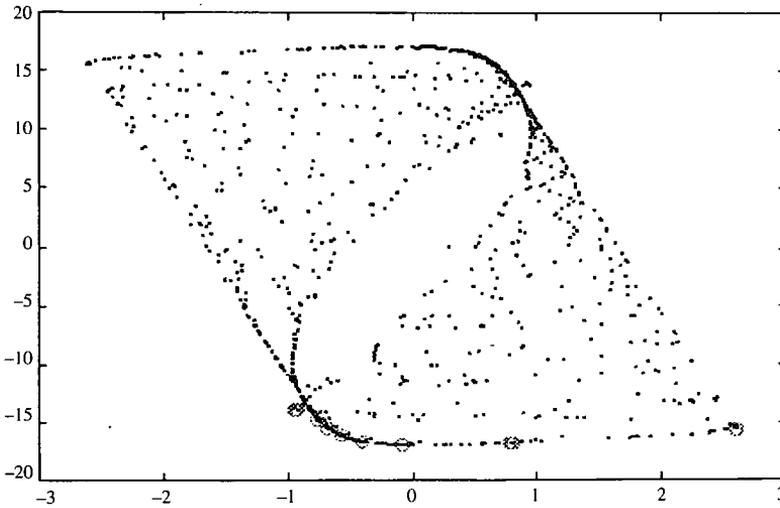


FIG. 12. Atractor caótico ($n = 5.000$ iteraciones) donde se muestra, enfatizado con círculos, dónde se concentran las ocho órbitas periódicas.

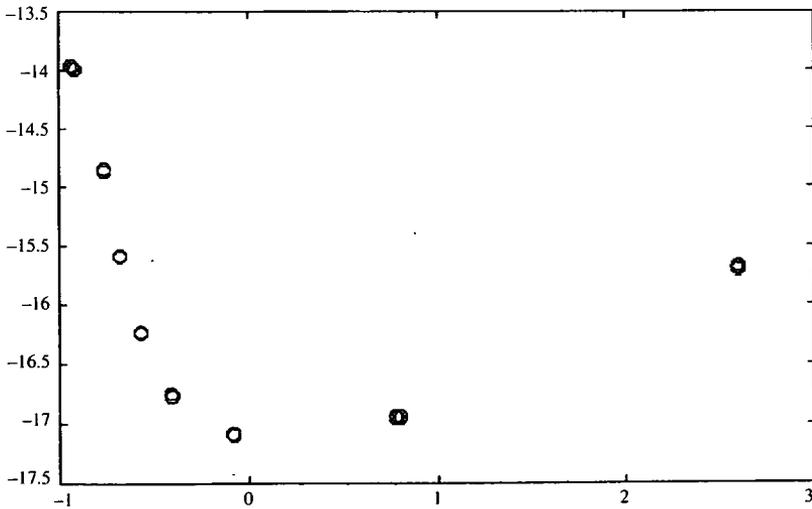


FIG. 13. Ocho órbitas periódicas, $n = 2.500-5.000$.

El estudio del máximo exponente de Lyapunov en el atractor cuando sólo se considera el movimiento transitorio resulta ser positivo, lo que indica un movimiento caótico. Sin embargo, se obtiene un máximo exponente de Lyapunov negativo cuando se consideran todas las iteraciones, incluido el movimiento transitorio. Así, la serie temporal transitoria se comporta como una serie temporal caótica para posteriormente pasar a un atractor regular.

El sistema especulativo en tiempo discreto posee pues otra característica notable para un determinado rango de los parámetros: un movimiento transitorio de naturaleza compleja que desemboca en un atractor regular. Esta característica también la verifican otros sistemas discretos bidimensionales, ya clásicos, como el Henon y el de Kaldor [ver Lorenz 1993].

6. CONCLUSIONES

El modelo bidimensional discreto de fundamentalistas y chartistas que hemos analizado, posee una dinámica mucho más rica que los modelos similares, en tiempo continuo, desarrollados por Beja y Goldman (1980) y Chiarella (1992). El comportamiento del modelo depende de la interacción entre el parámetro de impacto fundamentalista, el parámetro de impacto chartista y el tiempo de respuesta en la formación de expectativas chartistas. Para un determinado rango de los parámetros, nuestro modelo presenta distintos tipos de bifurcaciones entre la estabilidad y el caos que no se dan en el modelo continuo.

El modelo discreto presenta un comportamiento asintótico de punto fijo estable que degenera, por medio de una bifurcación de Hopf, en un ciclo límite cuando la velocidad de ajuste de la expectativa chartista aumenta. Las bifurcaciones de Neimark y de Hopf, como transición hacia la zona caótica, ocurren cuando el tiempo de respuesta chartista disminuye. El concepto de punto repeledor introducido por Marotto (1978), permite demostrar, con la implementación de un nuevo algoritmo, la existencia de caos para un determinado rango de los parámetros.

El sistema se concentra sobre un atractor caótico cuando en el mercado domina la demanda chartista y cuando su estimación de la tendencia del precio se basa en los cambios de precio más recientes.

Este modelo es capaz de generar también un complejo movimiento transitorio, que puede confundirse con un movimiento caótico, pero que ocurre antes de que las trayectorias se estabilicen sobre el atractor. El interés que supone esta característica es la posibilidad de encontrar una fase irregular durante el espacio de tiempo en que el sistema considerado sea verdaderamente válido.

El modelo especulativo señala pues, que si en un mercado predomina el componente chartista respecto al fundamentalista, los precios se mueven en dinámicas fuera de los valores de equilibrio del mercado dando lugar a la existencia de burbujas de tipo especulativo. Los efectos de tales burbu-

jas son una forma plausible de explicar la alta volatilidad registrada durante los últimos veinte años en los mercados financieros.

Es interesante resaltar que los modelos que presentan caos determinista no se muestran en abierta contradicción con la teoría de los mercados eficientes si la dimensión del modelo es suficientemente elevada. Basta tener en cuenta que el comportamiento caótico consiste en una dinámica determinista que es predecible sólo a muy corto plazo (Lorenz, 1993).

Los patrones de comportamiento que presentan las dinámicas caóticas no son cíclicos sino evolutivos y el hecho de que su obediencia se produzca a muy corto plazo parece ser una buena aproximación a lo que muchos teóricos, como Bowden (1990), consideran sobre la efectividad de las reglas chartistas: existe una multitud de reglas del tipo de expectativas extrapolativas que pueden ser empleadas con éxito de forma muy localizada en el tiempo. En la medida en que determinada regla tiene éxito y se generaliza su uso por parte de los agentes, los patrones de comportamiento (origen de dicha regla) evolucionan hasta convertirse en nuevos patrones que sólo serán predecibles por nuevas reglas.

Nuestro modelo u otros similares, podrían servir de puente entre dos posiciones antagónicas sobre el comportamiento de las cotizaciones de los mercados financieros: la postura defendida en la literatura teórica que postula el movimiento aleatorio de las cotizaciones y, por otro lado, la ampliación extendida por los profesionales del mercado que basan sus predicciones en el comportamiento histórico de las series de precios.

Los resultados obtenidos en el análisis del modelo especulativo revelan que el caso es consecuencia de la propia especulación. La dinámica caótica en las cotizaciones y la consiguiente posibilidad de realizar predicciones, a corto plazo, está producida por la actuación de los propios agentes chartistas al intentar anticiparse al mercado. Por todo ello, el caos determinista puede constituir una herramienta matemática muy útil para describir el comportamiento de un mercado financiero. El caos parece ser la forma más plausible de determinismo en los modelos que explican la dinámica del comportamiento especulativo, con el fin de evitar la paradoja de la predecibilidad (toda profecía sobre el valor de las cotizaciones se anula a sí misma).

BIBLIOGRAFIA

- Beja, G. y Goldman, M. B. (1980): «On the Dynamic Behaviour of Prices in Disequilibrium», *Journal of Finance*, XXXV (2), pp. 235-248.
- Bowden, R. J. (1990): «Predictive Disequilibria and the Short Run Dynamics of Asset Prices», *Australian Journal of Management*, vol. 15(1), pp. 65-87.
- Chiarella, C. (1992): «The Dynamics of Speculative Behaviour», *Annals of Operations Research*, vol. 37, pp. 101-124.
- Cugno, F. y Montrucchio, L. (1984): «Some New Techniques for Modelling Non-Linear Economic Fluctuations: A Brief Survey», in Goodwin, R. M., Krüger, M. and Vercelli, A. (eds.): *Non Linear Models of Fluctuating Growth*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

- Diamond, P. (1976): «Chaotic Behaviour of Systems of Difference Equations», *International Journal of Systems Science*, vol. 7, pp. 953-956.
- Frankel, J. A. y Froot, K. A. (1986): «Understanding the US Dollar in the Eighties: The Expectations of Chartists and Fundamentalists», *Economic Record*, Special Issue on Exchange Rates and the Economy, pp. 24-38.
- Goldman, M. B. y Beja, A. (1979): «Market Prices vs. Equilibrium Prices: Returns' Variance, Serial Correlation, and the Role of the Specialist», *Journal of Finance*, XXXIV(3), pp. 595-607.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.
- Herrmann, R. (1985): «Stability and Chaos in a Kaldor-Type Model», DP22, Department of Economics, University of Göttingen.
- Iooss, G. (1979): *Bifurcations of Maps and Applications*, Amsterdam: North Holland.
- Li, T. Y. y Yorke, J. A. (1975): «Period three implies chaos», *American Mathematical Monthly*, vol. 82, pp. 895-992.
- Lorenz, H. W. (1992): «Multiple Attractors, Complex Basin Boundaries, and Transient Motion in Deterministic Economic Systems», *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, Ed. Feichtinger. Elsevier Science Publishers B.V.
- Lorenz, H. W. (1993): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, 2ª ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Marotto, F. R. (1978): «Snap-Back Repellers Imply Chaos in \mathbb{R}^n », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 72, pp. 199-223.
- Peters, E. E. (1994): *Fractal Market Analysis, Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley.
- Reichlin, P. (1986): «Equilibrium Cycles and Stabilization Policies in an Overlapping Generations Model with Production», *Journal of Economic Theory*, vol. 40, pp. 89-102.
- Ruelle, D. y Takens, F. (1971): «On the Nature of Turbulence», *Communications in Mathematical Physics*, vol. 20, pp. 167-192.
- Thompson, J. M. T. y Stewart, H. B. (1993): *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Chichester-New York: John Wiley. 1ª ed. (1986).
- Zeeman, E. C. (1974): «On the Unstable Behaviour of Stock Exchanges», *Journal of Mathematical Economics*, vol. 1, pp. 39-49.