EL PROBLEMA DE LA INCONSISTENCIA DEL CRITERIO DE LA TASA INTERNA DE RENDIMIENTO Y UNA PROPUESTA DE SOLUCION

Valentín Azofra Palenzuela
Alberto de Miguel Hidalgo

RESUMEN.— Las siguientes líneas tratan de encontrar una solución al problema que se plantea cuando el criterio de la Tasa Interna de Rendimiento se muestra inconsistente. Tras una breve introducción en la que se intenta clarificar algunos de los tópicos inmersos en las habituales caracterizaciones de los criterios clásicos de inversión (VAN y TIR), el trabajo se centra en otra espinosa cuestión: la determinación del signo de los saldos de un proyecto de inversión.

En un intento de contribuir a la resolución de este problema, proponemos un método para el cálculo de los saldos de una inversión mixta y la transformación de ésta en otra pura equivalente. Por último, el método se aplica a la resolución de un supuesto numérico en el que se resumen los puntos que acabamos de describir.

1. Introducción

La mayor parte de los estudiosos del tema coinciden en señalar que uno de los principales inconvenientes o desventajas del criterio clásico de selección de inversiones de la Tasa Interna de Rendimiento (TIR) frente al criterio del Valor Actual neto (VAN) es su dificultad de cálculo en cierto tipo de proyectos. En realidad, el principal inconveniente no es ya encontrar la solución que haga cero el Valor Actual Neto —que es el punto de relación entre ambos criterios— sino dar a dicha solución o soluciones una adecuada interpretación de forma que los dos métodos conduzcan al mismo resultado a la hora de evaluar la rentabilidad de diferentes proyectos de inversión y proceder a su aceptación o rechazo.

A pesar de que el método del TIR se define con un claro sentido de autonomía e independencia respecto a otras variables externas, cuando llega el momento de aplicarlo a las decisiones de presupuesto de capital, el criterio a seguir es llevar a cabo un proyecto sólo si su tasa interna de rendimiento es mayor o igual que su coste de capital. Y es que, por si solo, el criterio del TIR no proporciona información alguna acerca de si un determinado proyecto de inversión contribuye o no a aumentar el valor de la empresa en términos absolutos. Obtener esta información requiere comparar la tasa interna de rendimiento del proyecto con la tasa de actualización o coste de los recursos necesarios para llevar a cabo el proyecto en cuestión, pues, en su dimensión exclusivamente «interna», la utilidad de este criterio se circunscribe a aquellos casos en los que únicamente se pretende jerarquizar distintas inversiones sin atender a si su rentabilidad es superior o no a su coste. En cualquier otro caso es preciso apoyarse en el enfoque de los saldos propuesto por diversos autores (Mao [9], Teichroew, Robicheck y Montalbano [15] y [16]) que reconocen la existencia de una relación entre la empresa y el proyecto (al que se le puede considerar como una miniempresa, Myers [13]) en la que, a veces, se invierten los papeles pasando la empresa de ser la financiadora del proyecto a ser financiada por éste, y que da lugar, como veremos, a la curiosa explicación de la relación funcional entre la tasa interna de rendimiento, r, y la tasa de actualización, k.

En este trabajo nos proponemos estudiar la relación existente entre el coste del capital invertido en un proyecto de inversión y la rentabilidad relativa de éste cuando el criterio de la tasa interna de rendimiento se muestra inconsistente a la hora de encontrar una solución única y real, a fin de encontrar un método que nos permita determinar el signo de los saldos de los diferentes proyectos de inversión que, eventualmente, se nos puedan presentar, y resolver con un cierto carácter de generalidad el problema de la inconsistencia del criterio de la tasa interna de rendimiento. Un supuesto numérico ilustra, en la última parte del trabajo, el método de resolución propuesto. La solución de este tipo de supuestos puede obtenerse mediante la aplicación de un programa informático de elaboración propia que calcula la tasa interna de rendimiento de cualquier proyecto de inversión (simple o no simple) con la única limitación de que su dimensión financiera no exceda de quince flujos de tesorería.

2. El significado económico de la tasa interna de rendimiento

Para gran número de autores (Durban Oliva [6], Mao [9], Martín Dávila [10] y [11] Merret y Sykes [12], Suarez Suarez [14], Teichroew, Robichek y Montalbano [15] y [16], entre otros) la tasa interna de rendimiento de un proyecto de inversión expresa la rentabilidad del capital que, colocado en el proyecto, no ha sido amortizado aun al comienzo de cada uno de los años que dura dicha inversión. Desde esta perspectiva, el proyecto va proporcionando una serie de flujos (anuales para simplificar) que implícitamente tienen una doble componente: la rentabilidad de los capitales invertidos y su amortización. Aceptar esta explicación equivale a admitir la existencia de un saldo entre la empresa y el proyecto durante la vida de éste [1].

Al comparar los dos criterios clásicos de selección de inversiones, el VAN y el TIR, se constata que existe una relación entre ellos a través de la tasa de actualización o coste de capital, de cuyo análisis, y en primer lugar, es posible inferir que ambos criterios nos deben conducir a la misma valoración de un conjunto de proyectos de inversión en cuanto a elegir o rechazar cada uno de ellos, puesto que cuando el VAN $\gtrless O$ entonces $r \gtrless k$, y viceversa; y en segundo lugar, que, independientemente de la forma de financiar los proyectos de inversión, la suma actualizada, a la tasa K, de las rentas anuales equivalentes a la rentabilidad relativa neta [2] de los capitales no amortizados a principios de cada año ha de coincidir con el valor actual neto de cada proyecto considerado (Durban Oliva [6] págs. 50 a 63).

Estas conocidas consideraciones nos van a ser útiles para centrar el problema que nos ocupa y que no es otro que la valoración de proyectos de inversión con uno o varios flujos de tesorería negativos —exceptuando el desembolso inicial— o proyectos no simples que, eventualmente, pudiéramos identificar como proyectos mixtos: inversiones cuya valoración, y en su caso jerarquización, plantea un problema de inconsistencia cuando se utiliza el criterio de la tasa interna de rendimiento. Nuestro objetivo es intentar eliminar la inconsistencia del criterio frente a este tipo de proyectos de manera que tanto el criterio del VAN como el del TIR conduzcan a los mismos resultados. En relación a este último aspecto es conveniente efectuar una apreciación sobre los resultados a que conduce la aplicación de uno y otro criterio. Se dice que tanto el VAN como el TIR llevan implícita la hipótesis de reinversión de los flujos de tesorería (Mao [9]), y sin embargo esto sólo es cierto en tanto en cuanto quiera generalizarse una curiosa coincidencia. En efecto, una reinversión de los flujos de tesorería a la misma tasa de actualización que la utilizada en cada criterio conduce, en uno y otro caso, al mismo resultado que si dicha reinversión no se efectuara (no olvidemos que la valoración se efectúa en el momento en el que tiene lugar el desembolso inicial o momento cero). Un pequeño ejemplo puede aclarar esta situación:

Sea un proyecto de inversión con cuatro flujos de tesorería: A, Q_1, Q_2, y Q_3. Según los dos criterios mencionados,

$$VAN = A + \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \frac{Q_3}{(1+k)^3}$$

$$VAN = O = A + \frac{Q_1}{(1+r)} + \frac{Q_2}{(1+r)^2} + \frac{Q_3}{(1+r)^3}$$

1 En la práctica es muy difícil determinar con exactitud la duración de un proyecto de inversión puesto que normalmente el desembolso inicial se materializa en varios activos y éstos, a su vez, tienen vidas económicas diferentes; circunstancias que, sin comentar otras adicionales, son suficientes para poner de manifiesto dicha dificultad.

2 Entendemos por rentabilidad absoluta neta el valor actual neto y por rentabilidad relativa bruta [r] la tasa interna de rendimiento; la rentabilidad relativa neta [r_n] viene medida por la diferencia entre r y k, es decir, $r = r_n + k$.

la hipótesis de reinversión implica, ahora explícita, la colocación de los recursos a la misma tasa que la de actualización, en cuyo caso el valor actual neto así definido (VAN_r) vendrá dado por:

$$VAN_r = A + \frac{Q_1 + \left[-Q_1 + \frac{Q_1 \cdot K}{(1+k)} + \frac{Q_1 \cdot K}{(1+k)^2} + \frac{Q_1}{(1+k)^2} \right]}{(1+k)} + \frac{Q_2 + \left[-Q_2 + \frac{Q_2 \cdot k}{(1+k)} + \frac{Q_2 \cdot k}{(1+k)} \right]}{(1+k)^2} + \frac{Q_3}{(1+k)^3}$$

ecuación que coincide con la del VAN «sin reinversión». Las expresiones entre corchetes son la reinversión de los flujos de tesorería intermedios cuyo valor actual referido al momento en que estos se han de producir es nulo, siempre que la tasa de reinversión coincida con la de actualización.

Para el TIR nos encontraríamos con una expresión idéntica con la salvedad de que k sería reemplazado por r.

Como se observa, sólo en el caso de que la tasa de reinversión coincida con r si se valora a través del TIR o con k cuando se utiliza el VAN, se puede afirmar que los criterios clásicos consideran la reinversión de los flujos de tesorería. Esta es la razón por la que, a menudo, se tilda al VAN de criterio pesimista y al TIR de criterio optimista; pero, es más, la diferencia fundamental entre el VAN y el TIR cuando se quiere jerarquizar dos proyectos de inversión surge precisamente de la diferencia entre r y k como tasas de reinversión. Tanto es así que si la posible reinversión de los flujos intermedios de las dos inversiones se efectuara a la misma tasa [3], ambos criterios conducirían a la misma jerarquización, y caso de que fuera conocida, automáticamente quedaría eliminada la posible inconsistencia de la tasa interna de rendimiento.

3. Determinación del signo de los saldos en las inversiones mixtas

De los comentarios anteriores se deduce que la primera cuestión a dilucidar en caso de elegir el criterio de la tasa interna de rendimiento como medida de la rentabilidad de la inversión es aceptar o no la definición de proyectos puros y mixtos a la hora de enfrentarse al estudio de proyectos que por sus característi-

[3] De igual forma se podrían considerar diferentes tasas de reinversión en cada período. Sin embargo, al modificar de esta forma las expresiones de las ecuaciones del VAN y del TIR, quizás no se les pueda denominar ya por éste nombre; ello sin perjuicio de que las nuevas fórmulas determinen de forma correcta la rentabilidad de los proyectos de inversión.

cas producen una ecuación cuyas raíces no son las características de los proyectos simples [4].

Por nuestra parte vamos a seguir el mencionado enfoque [5] de los saldos que supone como ya hemos indicado la existencia de un saldo entre el proyecto y la empresa de tal forma que al final de la vida de aquél, dicho saldo quedará completamente anulado. Además, en cualquier momento anterior, excepto el inicial en que necesariamente tiene que ser negativo, el saldo podrá ser positivo, negativo o nulo. Cuando todos los saldos sean negativos o nulos el proyecto será puro, mientras que cuando exista al menos un saldo positivo el proyecto será mixto dando lugar a lo que se conoce como «inconsistencia» del criterio de la tasa interna de rendimiento que se caracteriza porque los flujos de este tipo de proyectos proporcionan una ecuación cuya solución o soluciones reales (puede existir una sola o varias) no encajan dentro del esquema establecido en la nota 4.

Admitido este enfoque podemos pasar al análisis de las causas que originan la inconsistencia del criterio en la valoración de los proyectos de inversión mixtos. Para Teichroew, Robichek y Montalbano [15] y [16] los proyectos mixtos se distinguen de los puros en que los primeros suponen una financiación para la empresa durante algún tiempo, al aportar en un momento determinado algo más de lo que cabría esperar de ellos y producir uno o más saldos positivos antes de finalizar la vida de los mismos [6]. Cuando esto sucede, la empresa tiene que devolver al proyecto el exceso de aportación remunerándole de igual forma que a las entidades financieras proveedoras de los fondos que la empresa destina a las inversiones, esto es, a una tasa k (Suarez [14], págs. 93 y 94). De esta forma se irían conformando los distintos saldos de un proyecto de inversión capitalizándolos a la tasa r si el anterior es negativo o nulo, o al coste de capital k si fuera positivo.

$$
\begin{aligned}
S_0(r,k) &= A < O \\
S_1(r,k) &= S_0(r,k)\,(1 + r) + Q_1 \gtreqless 0 \\
S_2(r,k) &= S_1(r,k)\,(1 + x) + Q_2 \gtreqless 0 \\
&\cdots\cdot \\
S_t(r,k) &= S_{t-1}(r,k)\,(1 + x) + Q_t \gtreqless 0 \\
&\cdots \\
S_{n-1}(r,k) &= S_{n-2}(r,k)\,(1 + x) + Q_{n-1} \gtreqless 0 \\
S_n(r,k) &= S_{n-1}(r,k)\,(1 + x) + Q_n \gtreqless 0
\end{aligned}
$$

siendo:

$S_1(r,k)$, el saldo del período i (i = 1...n), que podrá ser función de r y k, dependiendo del comportamiento de los saldos anteriores.

4 Los proyectos simples dan lugar a una ecuación que, dependiendo de si el número de flujos es par o impar, tiene dos raíces reales, una [$<$ -1] y otra [$>$ -1] en el primer caso, y una sola raiz real [$>$ -1] en el segundo caso; en ambos casos existe además un número par de soluciones imaginarias sin sentido económico dependiendo del orden de la mencionada ecuación.

5 Otros enfoques se pueden encontrar en los trabajos de Clovis de Faro [4], Robert Dorfman [5], Hampton [7], Herbs [8], Martín Dávila [10], y [11], entre otros...

6 Una ilustración gráfica de esta situación se puede encontrar en Durban Oliva [6] pág. 189.

A, el desembolso anual del proyecto de inversión.

Q_i, el flujo de tesorería en el año i.

r, la tasa interna de rendimiento para la cual $S_n(r,k) = 0$.

k, la tasa de actualización o coste de capital de la empresa.

x, una variable que toma el valor de r cuando el saldo anterior al que está situada es negativo o nulo y k cuando es positivo.

Aparentemente el sistema de ecuaciones arriba presentado tiene una solución muy sencilla: basta determinar el signo de cada uno de los saldos para ir configurando cada uno de ellos en función de r y k, de acuerdo con el signo del anterior hasta llegar al último que necesariamente habrá de ser cero y mostrar la relación existente entre r y k. La solución de esta última ecuación nos proporcionaría una r que habría de verificar el signo supuesto para cada uno de los saldos antes del cálculo del TIR.

Sin embargo, es sabido que existe un problema de circularidad en el sentido de que, en gran número de casos[7], no podemos determinar el signo de los saldos sin antes conocer el valor de r. La tasa de retorno crítica, definida como la menor de las tasas que, obtenidas de la igualación a cero de los saldos intermedios, les hace a todos ellos menores o iguales a cero, nos ayuda a avanzar en el estudio del problema permitiéndonos la identificación del proyecto en cuanto a si es puro o mixto, es decir, nos informa sobre si existe o no relación funcional entre r y k.

La utilización del mismo criterio que el seguido con la tasa de retorno crítica para saber si un proyecto es puro o mixto va a ser la vía por la cual vamos a intentar determinar, haciendo uso de lo que denominamos tasas de retorno «pseudo-críticas», los saldos de un proyecto de inversión.

Denominamos tasas de retorno «pseudo-críticas» a aquellas tasas de cada uno de los saldos intermedios de un proyecto de inversión que anulan a su correspondiente saldo.

$$
\begin{aligned}
S_1(r_1) &= A(1 + r_1) + Q_1 = 0 \Rightarrow r_{1cj} \\
S_2(r_2) &= A(1 + r_2)^2 + Q_1 (1 + r_2) + Q_2 = 0 \Rightarrow r_{2cj} \\
&\dots \\
S_t(r_t) &= A(1 + r_t)^t + Q_1 (1 + r_{t-1})^{t-1} + \dots + Q_t = 0 \Rightarrow r_{tcj} \\
&\dots \\
S_{n-1}(r_{n-1}) &= A(1 + r_{n-1})^{n-1} + Q_1(1 + r_{n-1})^{n-2} + \dots + Q_{n-1} = 0 \Rightarrow r_{n-1cj}
\end{aligned}
$$

siendo,

r_{icj}, la tasa «pseudo-crítica» j-ésima (j = 1...i) del saldo i (i = 1...n-1)

r_{ic*}, la mayor de las tasas «pseudo-críticas» del saldo i.

[7] En ciertos proyectos mixtos de inversión, como veremos más adelante, la especificación de todos o algunos de los signos de los saldos se infiere directamente de la mera observación de las características del proyecto.

Se puede afirmar que, de la misma forma que cuando Sn(r_c) 0 el proyecto es mixto, también lo será cuando cualquier r_{ic*} para cualquier i hace negativo, asimismo, al último saldo. Es por ello que, en principio, podemos decir que si la tasa «pseudo-crítica» de un saldo «i» determinado hace negativo al último, el saldo i será positivo para r. Sin embargo esto no significa que una vez determinada la relación funcional en dicho proyecto el saldo i tome necesariamente valor positivo.

Si un saldo intermedio de un proyecto de inversión es positivo, es porque en algún período posterior al de este saldo existe, al menos, un flujo negativo (proyecto no simple); y si no existiera más que un solo flujo negativo y el proyecto fuera mixto como consecuencia de él, el saldo del período anterior al de dicho flujo será positivo sin perjuicio de que exista algún otro saldo también positivo, sucediéndose todos ellos en este caso, con el signo indicado, a continuación del primero descrito y en orden descendente hacia el período inicial, y sin que pueda existir ningún saldo negativo entre dos positivos. Es decir, en caso de que la existencia de un solo flujo negativo de lugar a un proyecto mixto, todos los saldos positivos se sucederán en orden descendente desde el período anterior al del flujo negativo hasta el momento en que exista otro saldo negativo o nulo a partir del cual todos serán negativos o nulos.

Se puede decir, por lo tanto, que la condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de un proyecto de inversión mixto es que exista al menos un flujo negativo que, además, suponga un cambio de signo en la ecuación del TIR [8]. Ahora bien, dicho flujo no configura por sí solo la estructura de todos los saldos del proyecto pues ésta viene determinada por tres factores diferentes que, por orden de importancia, son los siguientes:

1°. La cuantía del flujo negativo y su relación con los precedentes y posteriores, positivos y negativos.

2°. La situación temporal del flujo (o flujos) negativo.

3°. El valor de k.

A través de la observación directa de estos tres factores podremos determinar, en algunos casos, si el proyecto es mixto (sin tener que recurrir a la tasa de retorno crítica), y en otros (más afortunados) hasta la estructura de signos de todos sus saldos. En el resto, (y también en los anteriormente mencionados) se podrán determinar los saldos a través del método que describimos a continuación. Pero antes de entrar en él vamos a hacer una referencia muy somera al tipo de proyectos cuyos saldos pueden resolverse directamente como acabamos de indicar.

Todos los proyectos que tengan el último flujo negativo son mixtos puesto que si $S_n(r) = S_{n-1}(r)(1+r) + Q_n = 0$, como $Q_n < 0$, entonces, necesariamente,

[8] Los flujos negativos situados inmediatamente a continuación del desembolso inicial sin alternar con otros positivos dan lugar a proyectos simples. Una cuestión adicional es la valoración de dichos proyectos; frente al criterio de formalizar la ecuación del TIR correspondiente actualizando los flujos a la tasa r, nos encontramos con otros como el de Hampton, John J. [7] págs. 18 y ss. que plantean una solución consistente en adelantar todos los flujos negativos determinando un valor simple capitalizado a la tasa k como si fuera el comienzo de la inversión.

$S_{n-1}(r) > 0$. El mismo comportamiento tienen los proyectos que cuentan con varios flujos negativos al final (sin que exista ninguno positivo entre ellos). En ambos casos, la solución puede obtenerse mediante la transformación de Merret y Sykes [12] consistente en actualizar a la tasa k el último(s) saldo(s) negativo(s) hasta que compensen su negatividad con los flujos positivos anteriores [9]. Los citados autores demostraron que el proyecto resultante de tal operación es una inversión pura equivalente al proyecto mixto original con una única tasa interna de rendimiento ya que en tanto en cuanto existan flujos positivos lo suficientemente grandes (en tamaño y número) como para absorber completamente la cuantía de los flujos negativos posteriores, nos encontraremos ante un proyecto de inversión simple.

En segundo lugar, nos podemos encontrar ante proyectos con uno o varios flujos negativos intermedios, todos ellos consecutivos (sin ninguno positivo entre ellos). En este caso, si la suma lineal (sin actualizar) de los flujos positivos posteriores no supera en valor absoluto al flujo negativo, o a la suma de flujos negativos si existiesen varios, el proyecto será mixto; si no fuera así no podríamos afirmar, por el contrario que el proyecto sea puro. En cualquier caso, y si exceptuamos los proyectos con tan solo un flujo positivo entre el desembolso inicial y el flujo(s) negativo(s) no será posible especificar directamente el signo de los saldos de un proyecto de las características arriba mencionadas.

Por tanto, salvo en los casos particulares mencionados —flujos negativos únicos al final del proyecto, o bien flujos intermedios negativos con características muy concretas— tendremos que aplicar un método que tenga en cuenta los ya anteriormente citados factores determinantes del signo de los saldos: cuantía y situación de $Q_1 < 0$ y valor de k.

4. El cálculo de la tasa interna de rendimiento sobre la base del signo de los saldos

En primer lugar determinamos si el proyecto es puro o mixto a través del método de la tasa de retorno crítica o bien sustituyendo las tasas de retorno «pseudo-críticas» en el último saldo tal y como ya hemos indicado anteriormente [10]. Si se elige este segundo método, contaremos con una doble ventaja: en primer lugar, casi con toda probabilidad, en la mayoría de los casos lograremos saber más rápidamente si el proyecto es puro o mixto, y, en segundo lugar, conocidas las tasas de retorno «pseudo-críticas» podremos compararlas con la raiz ma-

[9] Hay que matizar que la transformación de Merret y Sykes solo es válida para aquellos proyectos que únicamente tengan flujos negativos al final de la vida del proyecto.

[10] Si al sustituir todas las tasas «pseudo-críticas» en el último saldo, éste siempre es positivo o nulo el proyecto será puro, ya que la tasa de retorno que haga al último saldo nulo será necesariamente mayor o igual que las «pseudo-críticas» y por consiguientemente hará a todos los saldos intermedios negativos o nulos. En este caso, huelga decirlo, la tasa interna de rendimiento será única.

yor resultante de igualar a cero el último saldo y determinar así los saldos positivos y negativos «cabezera» intermedios que nos van a servir para calcular el signo definitivo de todos los demás saldos, en función del valor de la tasa de actualización, k. Llamamos signos «cabezera» de los saldos al conjunto de signos que se obtiene al sustituir la mayor de las soluciones que anulan al último saldo (r_{nc*}) en cada uno de los saldos intermedios del proyecto; de tal forma que se verificará que:

$$\text{si} \quad r_{nc*} > r_{ic*} \implies S_i < 0$$
$$\text{si} \quad r_{nc*} = r_{ic*} \implies S_i = 0$$
$$\text{si} \quad r_{nc*} < r_{ic*} \implies S_i > 0$$

siendo,

r_{ic*}, la mayor de las tasas pseudo-críticas que anulan al saldo i.

Cuando el proyecto resulta mixto (algún $r_{ic*} > r_{nc*}$) la estructura de signos resultante de este proceso no siempre es la definitiva. Al existir relación funcional con k, el signo definitivo de un saldo intermedio para un determinado valor de k dependerá de la relación existente entre dicho saldo y el último; la mencionada relación se determinará de forma similar al método seguido para el cálculo de la «tasa de retorno sobre el coste de Fisher» entre los flujos integrados en el saldo intermedio cuyo signo se quiere determinar y los del último saldo (todos los del proyecto). O dicho de otra forma, el signo de un determinado saldo intermedio depende de las raices del proyecto diferencial que surge al restar flujo a flujo los integrados en el saldo a determinar y el último saldo: sea el proyecto de inversión,

$A, Q_1, Q_2, \dots, \dots Q_{n-1}, Q_n$

si,

$S_n(r)$, es el último saldo del proyecto.

$S_t(r)$, es el saldo correspondiente al flujo Q_t ($t = 1 \dots n\text{-}1.$)

r_{tc*}, es la mayor de las raíces reales (si existe alguna[11]) que anula a este saldo.

r_{nc*}, es la mayor de las raices reales que anula al último saldo.

El proyecto diferencial vendrá dado por la resta flujo a flujo de cada uno de los que integran los dos saldos:

$$\begin{aligned} S_n(r) = {} & (\dots(A(1+r) + Q_1)(1+r) + Q_2)(1+r) + \dots + \\ & + Q_{t-2})(1+r) + Q_{t-1})(1+r) + Q_t)(1+r) + \dots + \\ & + Q_{n-3})(1+r) + Q_{n-2})(1+r) + Q_{n-1})(1+r) + Q_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_t(r) = {} & (\dots(A(1+r) + Q_1)(1+r) + 1_2)(1+r) + \dots + \\ & + Q_{t-1})(1+r) = + Q_{t-1})(1+r) + Q_t \end{aligned}$$

[11] Cuando no existe ninguna solución real es porque el «miniproyecto» que podría formarse con los flujos correspondientes al saldo intermedio considerado tiene un Valor Actual Neto negativo para cualquier valor de k, y, por consiguiente, si el proyecto tiene alguna raiz positiva (o algunas), la mayor de ellas hará al saldo en cuestión negativo.

Los flujos que conforman el saldo S_t son:

$A, Q_1, Q_2, \dots Q_{t-2}, Q_{t-1}, Q_t$

Los flujos que conforman el último saldo, S_n, son todos los del proyecto:

$A, Q_1, Q_2 \dots Q_{t-2}, Q_{t-1}, Q_t, \dots \quad Q_{n-3}, Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n$

El proyecto diferencial viene dado por la diferencia entre los dos grupos de flujos:

$$\begin{array}{rl} & A, Q_1, Q_2, \dots Q_{t-2}, Q_{t-1}, Q_t, Q_{t+1}, \dots Q_{n-3}, Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n \\ - & A, Q_1, Q_2 \dots Q_{t-2}, Q_{t-1}, Q_t \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Q_{t+1}, \dots Q_{n-3}, Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n \end{array}$$

El saldo «diferencial» S_{n-t} es,

$$S_{n-t}(r) = (\dots(Q_{t+1}(1 + r) + Q_{t+2})(1 + r) + Q_{t+3})(1 + r) + \dots + \\ + Q_{n-3})(1 + r) + Q_{n-2})(1 + r) + Q_{n-1})(1 + r) + Q_n = 0$$

donde $r_{n-t,c,j}$ son todas las raices del saldo $S_{n-t}(r)$ ($j = 1 \dots n-t$) y $r_{n-t,c,*}$ es la mayor de todas ellas.

tal como sabemos,

si $r_{nc*} \geqslant r_{tc*}$ el saldo t «cabezera» será negativo o nulo, mientras que

si $r_{nc*} < r_{tc*}$ el saldo t «cabezera» será positivo.

a partir de este punto el saldo será positivo o negativo dependiendo de las raices $r_{n-t,c,j}$ que vayamos encontrando en sentido decreciente hasta el valor 0, punto de origen de los ejes de coordenadas en términos gráficos (los valores negativos no tienen sentido económico) [12].

Es necesario hacer hincapié en la importancia de determinar los signos «cabezera» puesto que ellos nos servirán de base en el cálculo del signo definitivo de todos los saldos intermedios para cada valor concreto de k. Sabemos que r_{nc*} (la mayor de todas las soluciones que hacen al último saldo igual a cero) es el

[12] De igual forma nos podemos encontrar que no existe ninguna raiz positiva, o, simplemente no haya ninguna real que anule al proyecto diferencial. En caso de que esto suceda el signo del saldo intermedio que originalmente se determinó (signo «cabezera»), se mantendrá para cualquier valor de k, es decir, es independiente de k. Este es el caso de proyectos con varios saldos negativos (todos ellos seguidos) situados al final del período temporal en que se desarrolla la inversión. Cuando esto sucede, los saldos intermedios correspondientes a los flujos negativos siempre son positivos, independientemente del valor de k. Solamente los saldos anteriores correspondientes a flujos positivos se mostrarán sensibles a k pudiendo pasar de negativos (si los «cabezeras» lo eran) a positivos, dependiendo del valor de k y del valor (cuantía) de los flujos negativos posteriores; asimismo, en este caso particular que estamos considerando, los saldos positivos «cabezera» no pueden pasar a ser negativos para ningún valor de k.

máximo valor que puede tomar k para que el VAN del proyecto, si es positivo, lo siga siendo. Partiendo, por tanto, de dicho punto y de los signos «cabezera» correspondientes a él, los distintos saldos intermedios tomarán para cada valor de k (en orden descendente) un valor positivo o negativo en función de las raíces que del mencionado proyecto diferencial sucesivamente nos vayamos encontrando [13]. Gráficamente lo podemos observar en la Figura 1.

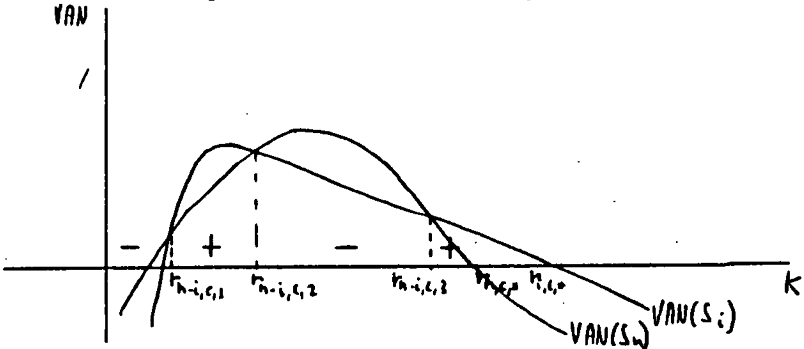

Figura 1

VAN(S_n) $\Longrightarrow$ curva del valor actual neto de los flujos integrados en el último saldo del proyecto de inversión (todos).

VAN(S_i) $\Longrightarrow$ curva del valor actual neto de los flujos integrados en el saldo i (i = 1...n-1).

r_{nc*} = mayor de las raíces que anula a $S_n(r)$.

$r_{n-i,c,j}$ (i = 1...n-1),(j = 1...n-i) = «tasa de retorno j sobre el coste» de Fisher del proyecto diferencial formado por los saldos i y n.

k = tasa de actualización.

El saldo i se comportará de la siguiente manera:

— el signo cabezera será positivo ya que $S_n(r_{ic*}) < 0$
— se mantendrá positivo para valores de k: $r_{nc*} < k \leq r_{n-i,c,3}$.
— pasará a ser negativo para valores de k: $r_{n-i,c,3} < k \leq r_{n-i,c,2}$.
— pasará a ser positivo para valores de k: $r_{n-i,c,2} < k \leq r_{n-i,c,1}$.
— pasará a ser negativo para valores de k: $r_{n-i,c,1} < k \leq 0$.

de igual forma se irá construyendo uno a uno la estructura de signos de todos los saldos intermedios de cualquier proyecto para cada valor de k.

Por supuesto, la tasa interna de rendimiento del proyecto que surja de esta operación, además de ser única, ha de verificar la estructura de saldos encontrada a través del proceso descrito. Esto se demuestra transformando el proyecto mixto resultante en un proyecto puro equivalente cuya tasa interna de rendimiento (única por ser puro) ha de coincidir con la de la relación funcional del proyecto mixto original:

sea el siguiente proyecto de inversión con sus correspondiente saldos:

[13] Por ejemplo, si un saldo i (i = 1...n-1) tiene un signo «cabezera» negativo para una r_{nc*} dada, se mantendrá negativo para valores de k comprendidos entre r_{nc*} y el siguiente valor de $r_{n-1,c,j}$ en orden descendente; pasará a ser positivo para valores de k a la izquierda del $r_{n-1,c,j}$ antes considerado y el siguiente valor de $r_{n-1,c,j}$, y así sucesivamente.

$$
\begin{array}{llll}
A & S_0(r,k) & = A < 0 & \\
Q_1 & S_1(r,k) & = S_0(r,k)\,(1+r) + Q_1 & \gtrless 0 \\
Q_2 & S_2(r,k) & = S_1(r,k)\,(1+x) + Q_2 & \gtrless 0 \\
 & \ldots & & \\
Q_t & S_t(r,k) & = S_{t-1}(r,k)\,(1+x) + Q_t & \gtrless 0 \\
 & \ldots & & \\
Q_{n-1} & S_{n-1}(r,k) & = S_{n-1}(r,k)\,(1+x) + Q_{n-1} & \gtrless 0 \\
Q_n & S_n(r,k) & = S_{n-1}(r,k)\,(1+x) + Q_n & = 0
\end{array}
$$

Supongamos que existen, además del desembolso inicial, dos flujos negativos (para simplificar), uno al final de la inversión y otro intermedio: $Q_n < 0$ y $Q_t < 0$, siendo todos los demas positivos o nulos. Suponiendo también que cada uno de dichos flujos negativos de lugar a dos saldos positivos en los períodos precedentes, los saldos quedarían como sigue:

$$
\begin{array}{llll}
S_0(r,k) & = A \quad 0 & & \\
S_1(r,k) & = S_0(r,k)\,(1+r) + Q_1 & & \leqslant 0 \\
S_2(r,k) & = S_1(r,k)\,(1+r) + Q_2 & & \leqslant 0 \\
\ldots & & & \\
S_{t-3}(r,k) & = S_{t-4}(r,k)\,(1+r) + Q_{t-3} & & \leqslant 0 \\
S_{t-2}(r,k) & = S_{t-3}(r,k)\,(1+r) + Q_{t-2} & & > 0 \\
S_{t-1}(r,k) & = S_{t-2}(r,k)\,(1+k) + Q_{t-1} & & > 0 \\
S_t/r,k) & = S_{t-1}(r,k)\,(1+k) + \underline{\mathbf{Q_t}} & & \leqslant 0 \\
\ldots & & & \\
S_{n-4}(r,k) & = S_{n-5}(r,k)\,(1+r) + Q_{n-4} & & \leqslant 0 \\
S_{n-3}(r,k) & = S_{n-4}(r,k)\,(1+r) + Q_{n-3} & & \leqslant 0 \\
S_{n-2}(r,k) & = S_{n-3}(r,k)\,(1+r) + Q_{n-2} & & > 0 \\
S_{n-1}(r,k) & = S_{n-2}(r,k)\,(1+k) + Q_{n-1} & & > 0 \\
S_n(r,k) & = S_{n-1}(r,k)\,(1+k) + \underline{\mathbf{Q_n}} & & = 0
\end{array}
$$

La tasa de rendimiento (en función de k) de este proyecto ha de verificar la estructura de saldos estimada. Podemos transformar dicho proyecto mixto en otro puro equivalente cuya tasa interna de rendimiento coincida con la de la relación funcional. Dicha transformación se efectúa de la siguiente manera: Eliminamos la parte positiva de los saldos positivos restando al flujo correspondiente a su mismo período el valor de dicho saldo y se lo sumamos, convenientemente capitalizado a la tasa K, al flujo negativo que ha dado origen a dicho saldo positivo, que es el primero al que le corresponda un saldo negativo o nulo.

Cuando exista más de un saldo positivo seguido, como en el supuesto que nos ocupa, la eliminación del primero de ellos supone una transformación en el siguiente de tal forma que tendrá un valor positivo más pequeño, es más, únicamente quedará como saldo el valor del flujo correspondiente a su período, por cuya cuantía habrá que capitalizar hasta el siguiente flujo negativo según el proceso descrito.

De esta forma queda conformado un nuevo proyecto con una composición de flujos igual a:

$$
\begin{array}{lll}
\hat{}A & = A & \\
\hat{}Q_1 & = Q_1 & \\
\hat{}Q_2 & = Q_2 & \\
\dots & \dots & \\
\hat{}Q_{t-3} & = Q_{t-3} & \\
\hat{}Q_{t-2} & = Q_{t-2} - S_{t-2}(r,k) & = \{- S_{t-3}(r,k)\,(1+r)\} \\
\hat{}Q_{t-1} & = Q_{t-1} - Q_{t-1} = 0 & \\
\hat{}Q_t & = Q_t + S_{t-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k) & = \{S_t(r,k)\} \\
\dots & \dots & \\
\hat{}Q_{n-4} & = Q_{n-4} & \\
\hat{}Q_{n-3} & = Q_{n-3} & \\
\hat{}Q_{n-2} & = Q_{n-2} - S_{n-2}(r,k) & = \{- S_{n-3}(r,k)\,(1+r)\} \\
\hat{}Q_{n-1} & = Q_{n-1} - Q_{n-1} = 0 & \\
\hat{}Q_n & = Q_n + S_{n-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{n-1}(1+k) & = \{S_n(r,k) = 0\}
\end{array}
\quad [1]
$$

y los saldos del nuevo proyecto serán los siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
\hat{}S_0(r) & = A < 0 \\
\hat{}S_1(r) & = \hat{}S_0(r)\,(1+r) + \hat{}Q_1 \lesseqgtr 0 \\
\hat{}S_2(r) & = \hat{}S_1(r)\,(1+r) + \hat{}Q_2 \lesseqgtr 0 \\
\dots & \\
\hat{}S_{t-3}(r) & = \hat{}S_{t-4}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{t-3} \lesseqgtr 0 \\
\hat{}S_{t-2}(r) & = \hat{}S_{t-3}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{t-2} = 0 \\
\hat{}S_{t-1}(r) & = \hat{}S_{t-2}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{t-1} = 0 \\
\hat{}S_t(r) & = \hat{}S_{t-1}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_t \lesseqgtr 0 \\
\dots & \\
\hat{}S_{n-4}(r) & = \hat{}S_{n-5}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{n-4} \lesseqgtr 0 \\
\hat{}S_{n-3}(r) & = \hat{}S_{n-4}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{n-3} \lesseqgtr 0 \\
\hat{}S_{n-2}(r) & = \hat{}S_{n-3}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{n-2} = 0 \\
\hat{}S_{n-1}(r) & = \hat{}S_{n-2}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_{n-1} = 0 \\
\hat{}S_n(r) & = \hat{}S_{n-1}(r)\,(1+r) + \hat{}Q_n = 0
\end{array}
$$

ahora,

$$\hat{}S_{t-2}(r) = \hat{}S_{t-1}(r) = \hat{}S_{n-2}(r) = \hat{}S_{n-1}(r) = \hat{}S_n(r) = 0$$

ya que,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{t-2}(r) &= \hat{S}_{t-3}(r)\,(1+r) + \hat{Q}_{t-2} = \\
&= \hat{S}_{t-3}(r)\,(1+r) + Q_{t-2} - S_{t-2}(r,k) = \\
&= \hat{S}_{t-3}(r)\,(1+r) - S_{t-3}(r,k)\,(1+r) = 0 \qquad [2]
\end{aligned}$$

puesto que al no existir ningún saldo positivo anterior los dos sumandos de la expresión [2] coinciden.

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{t-1}(r) &= \hat{S}_{t-2}(r)\,(1+r) + \hat{Q}_{t-1} = \\
&= \hat{S}_{t-2}(r)\,(1+r) + Q_{t-1} - Q_{t-1} = \\
&= \hat{S}_{t-2}(r)\,(1+r) = 0 \\
\hat{S}_{t}(r) &= \hat{S}_{t-1}(r)\,(1+r) + \hat{Q}_{t-1} = \\
&= \hat{S}_{t-1}(r)\,(1+r) + Q_t + S_{t-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k) = \\
&= O + Q_t + S_{t-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k) = \\
&= Q_t + S_{t-1}(r,k)\,(1+k) = \\
&= S_t(r,k) \leqslant 0
\end{aligned}$$

como habíamos supuesto.

$$\hat{S}_{t+1}(r) = S_{t+1}(r,k) \leqslant 0, \text{ puesto que, } \hat{Q}_{t+1} = Q_{t+1}.$$

...

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{n-2}(r) &= \hat{S}_{n-3}(r)\,(1+r) + \hat{Q}_{n-2} = \\
&= \hat{S}_{n-3}(r)\,(1+r) + Q_{n-2} - S_{n-2}(r,k) = \\
&= \hat{S}_{n-3}(r)\,(1+r) - S_{n-3}(r,k)\,(1+r) = 0
\end{aligned}$$

puesto que siguiendo el razonamiento anterior desde $\hat{S}_{t+1}(r)$ hasta $\hat{S}_{n-3}(r,k)$ todos los saldos coinciden con $S_{t+1}(r)$ ... $S_{n-3}(r,k)$ ya que como hemos visto los flujos transformados coinciden con los correspondientes flujos sin transformar.

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{n-1}(r) &= \hat{S}_{n-2}(r)\,(1+r) + \hat{Q}_{n-1} = 0 \\
&= \hat{S}_{n-2}(r)\,(1+r) + Q_{n-1} - Q_{n-1} = \\
&= \hat{S}_{n-2}(r)\,(1+r) = 0 \\
\hat{S}_{n}(r) &= \hat{S}_{n-1}(r)\,(1+r) + \hat{Q}_{n} = \\
&= \hat{S}_{n-1}(r)\,(1+r) + Q_n + S_{n-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{n-1}(1+k) = \\
&= 0 + Q_n + S_{n-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{n-1}\,(1+k) = \\
&= Q_n + S_{n-1}(r,k)\,(1+k) = \\
&= S_n(r,k) = 0, \text{ por definición.}
\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado que el proyecto equivalente es un proyecto de inversión puro.

Ahora vamos a demostrar que el proyecto puro equivalente proporciona una tasa interna de rendimiento idéntica a la que surgiría de la relación funcional entre r y k del proyecto mixto original:

para el caso particular que estamos tratando, el valor de la tasa interna de rendimiento viene dada a través de la igualación a cero del Valor Actual Neto,

$$\mathrm{VAN} = 0 = \hat{}A = \frac{\hat{}Q_1}{(1+r)^1} + \frac{\hat{}Q_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{\hat{}Q_{t-3}}{(1+r)^{t-3}} + \frac{\hat{}Q_{t-2}}{(1+r)^{t-2}} +$$

$$+ \frac{\hat{}Q_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} + \frac{-\hat{}Q_t}{(1+r)^t} + \ldots + \frac{\hat{}Q_{n-4}}{(1+r)^{n-4}} + \frac{\hat{}Q_{n-3}}{(1+r)^{n-3}} +$$

$$+ \frac{\hat{}Q_{n-2}}{(1+r)^{n-2}} + \frac{\hat{}Q_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \frac{\hat{}Q_n}{(1+r)^n}$$

sustituyendo cada flujo $\hat{}Q_1$ por su valor según [1] y realizando operaciones [14] observamos que es la misma expresión que la de $S_n(r,k) = 0$ del proyecto mixto original:

$$\begin{aligned} S_n(r,k) = {} & ((\ldots((\ldots((A(1 + r) + Q_1)(1 + r) + Q_2)(1 + r) + \ldots + \\ & + Q_{t-3})(1 + r) + Q_{t-2})(1 + k) + Q_{t-1})(1 + k) + Q_t)(1 + r) + \\ & + \ldots + Q_{n-4})(1 + r) + Q_{n-3})(1 + r) + (Q_{n-2})(1 + k) + \\ & + Q_{n-1})\ 1 + k) + Q_n = 0 \end{aligned}$$

de esta forma, ya que ambas expresiones son iguales y dado que el proyecto transformado es puro como se ha demostrado, la tasa interna de rendimiento del proyecto mixto primitivo, una vez recogido el efecto de la tasa de actualización k, será única y reflejará la rentabilidad relativa bruta del mencionado proyecto para ese valor concreto de k.

5. Aplicación para un caso general

El siguiente ejemplo demuestra la aplicación del procedimiento arriba indicado.

Sea un determinado proyecto de inversión cuyos flujos de tesorería se muestran a continuación:

Q0 = -100	Q3 = 3414	Q6 = 7112	Q9 = 4962
Q1 = -3500	Q4 = -5206	Q7 = 6452	Q10 = 3852
Q2 = 1244	Q5 = -7404	Q8 = -8480	Q12 = -5616

[14] En el apéndice A se desarrolla la demostración que aquí por razones de espacio y concisión hemos creido conveniente debía permanecer aparte.

las soluciones positivas que anulan el VAN del proyecto son las siguienes:

Raices $S_n(r) = 0$:
r1 = 5,891%
r2 = 20%
r3 = 30%
r4 = 154,672%

Las «tasas de retorno sobre el coste» de Fisher de los proyectos diferenciales que se forman al restar flujo a flujo los correspondientes al saldo intermedio i de los del proyecto global (último saldo) son los siguientes: [15]

Raices (FISHER): $r_{n-i,c,j}$

S_{n-1} =	-0,04706	S_{n-7} =	-1,85421
S_{n-2} =	0,949275	S_{n-8} =	-0,25569
S_{n-3} =	-1,92050	S_{n-9} =	0,457943
S_{n-4} = -0,122:	0,230015	S_{n-10} =	——
S_{n-5} =	-0,26154	S_{n-11} =	——
S_{n-6}	-0,09289		

puede observarse que existen saldos diferenciales intermedios que únicamente tienen raices negativas e incluso que otros no tienen ninguna real (S_{n-10}): todos ellos conservarán el signo «cabezera» para cualquier valor de k $\geqslant 0$.

En la tabla 1 se dan valores a la tasa de actualización, k.

TABLA 1

k	r	VAN	Saldos que varían de signo
A = r_{nc*}	154,67%	0	S. «cabezera»
B = 90%	105,39%	49,8943	S2
C = 40%	40,89%	13,6751	S9
D = 22%	21,96%	-1,638	S4
E = 15%	10,16%	12,4001	——
F = 0%	-0,84%	-120	——

Como se observa, los valores de k han sido dados intencionadamente para observar el efecto que se espera de ellos: así, en el primer caso, A, para $k = r_{nc*}$ los saldos que se forman son los «cabezera», que son los signos base a partir de los cuales se formarán los restantes en función de los distintos valores de k. En el caso B, el valor del 90% está situado inmediatamente a la izquierda de $r_{n-2,c,j}$ (en S_{n-2}) de tal forma que el saldo correspondiente S2 que era negativo,

[15] En el apéndice B se muestran cuatro gráficos en los que están representadas las curvas del VAN del proyecto y el valor actual de los flujos correspondientes a los saldos de éste proyecto de inversión.

pasa a ser positivo como se muestra en las tablas 2 y 3. De la misma forma se han dado los valores 40% y 22% a k que producen cambios de signo en S9 y S4. Además, se han dado otros dos valores a k: 15% y 0% con la intención de mostrar otra peculiaridad que hasta ahora no hemos comentado. Si observamos los valores que toman las raíces del último saldo r_{nc}, vemos que la curva del VAN va alternativamente siendo positiva y negativa a medida que traspasa el eje de las x como se muestra en el gráfico 1. Ello quiere decir que para valores de k comprendidos entre el 0% y el 5,891% el VAN será negativo, entre el 5,891% y el 22% será positivo y así sucesivamente[16], como se muestra en la tabla 1.

Como ya hemos comentado al principio, si ambos criterios —VAN y TIR— son equivalentes han de llegar a las mismas conclusiones, tal y como se demuestra en este caso: en la tabla 1 se observa cómo existe perfecta correspondencia entre el VAN y el TIR de tal forma que si el VAN $\geqslant 0$, entonces, $r \geqslant k$ (casos A, B, C y E) y si el VAN $\leqslant 0$, entonces, $r \leqslant k$ (casos D y F).

TABLA 2

VALORES DE K		A	B	C	D	E	F
Q0 = -100	S0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0
Q1 = -350	S1	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0
Q2 = 1244	S2	≤ 0	> 0*	> 0	> 0	> 0	> 0
Q3 = 3414	S3	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
Q4 = -5206	S4	> 0	> 0	> 0	≤ 0*	≤ 0	≤ 0
Q5 = -7404	S5	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0
Q6 = 7112	S6	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0
Q7 = 6452	S7	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
Q8 = -8480	S8	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0
Q9 = 4962	S9	≤ 0	≤ 0	> 0*	> 0	> 0	> 0
Q10 = 3852	S10	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
Q11 = -5616	S11	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0

-Signo de los saldos para cada valor de k.
El símbolo * indica el flujo que cambia para cada valor de k.

[16] No es muy recomendable seguir este método secuencial —que aquí utilizamos únicamente con intención de complementar las explicaciones— puesto que, a veces, pueden existir dos soluciones que convergen en un mismo punto, lo cual ocasiona que la curva del VAN no traspase el eje de abscisas y, por consiguiente, no existirá cambio de signo en ese punto, induciendo, no obstante, a conclusiones totalmente opuestas a las que se obtendrían de otra manera.

TABLA 3

	A	B	C	D	E	F
S0 =	-100	-100	-100	-100	-100	-100
S1 =	-604,66	-555,38	-490,88	-471,95	-460,16	-449,16
S2 =	-295,88	103,32	552,39	668,41	798,58	798,58
S3 =	2660,46	3610,30	4187,35	4229,46	4224,79	4212,58
S4 =	1569,33	1653,58	656,29	-46,04	-558,73	-993,41
S5 =	-3407,40	-4262,18	-6485,18	-7460,15	-8019,50	-8389,11
S6 =	-1565,55	-1641,89	-2024,86	-1986,16	-1722,36	-1207,02
S7 =	2465,04	3079,78	3599,20	4029,73	4554,62	5255,05
S8 =	-2202,33	-2628,40	-3441,11	-3563,72	-3469,91	-3224,94
S9 =	-646,63	-436,35	113,87	615,80	1139,50	1764
S10 =	2205,23	2955,78	4011,42	4603,27	5105,45	5616
S11 =	0	0	0	0	0	0

-Valor de los de los saldos para cada valor de k.

Para completar la resolución del ejemplo vamos a efectuar la transformación del proyecto de inversión para los valores de k del 90% y del 22% (de igual forma se podría llevar a cabo la transformación para las demás tasas del ejemplo).

A) Proyecto puro equivalente al proyecto mixto original, para una tasa de actualización del 90%.

Para este valor de k disponemos ya de los siguientes datos:

k	r	VAN
90%	105,39%	49,8943

y además, los saldos tienen el siguiente signo:

Flujos iniciales	Signo de los saldos	Valor de los saldos	Nuevos flujos $\hat{Q}_1$
Q0 = -100	S0 $\leq$ 0	-100	$\hat{Q}0$ = -100
Q1 = -350	S1 $\leq$ 0	-555,38	$\hat{Q}1$ = -350
Q2 = 1244	S2 > 0	103,32	$\hat{Q}2$ = 1140,679
Q3 = 3414	S3 > 0	3610,30	$\hat{Q}3$ = 0
Q4 = -5206	S4 > 0	1653,58	$\hat{Q}4$ = 0
Q5 = -7404	S5 $\leq$ 0	-4262,18	$\hat{Q}5$ = -4262,18
Q6 = 7112	S6 $\leq$ 0	-1641,89	$\hat{Q}6$ = 7112
Q7 = 6452	S7 > 0	3079,78	$\hat{Q}7$ = 3372,213
Q8 = -8480	S8 $\leq$ 0	-2628,40	$\hat{Q}8$ = -2628,40
Q9 = 4962	S9 $\leq$ 0	-436,35	$\hat{Q}9$ = 4962
Q10 = 3852	S10 > 0	2955,78	$\hat{Q}10$ = 896,2105
Q11 = -5616	S11 > 0	0	$\hat{Q}11$ = 0

B) Proyecto puro equivalente al proyecto mixto original, para una tasa de actualización del 22%.

Para este valor de k disponemos ya de los siguientes datos:

k	r	VAN
22%	21,96%	-1,638

y además, los saldos tienen el siguiente signo:

Flujos iniciales	Signo de los saldos	Valor de los saldos	Nuevos flujos $\hat{Q}_1$
Q0 = -100	S0 $\leqslant$ 0	-100	^Q0 = -100
Q1 = -350	S1 $\leqslant$ 0	-471,95	^Q1 = -350
Q2 = 1244	S2 $\geqslant$ 0	668,41	^Q2 = 575,58
Q3 = 3414	S3 > 0	4229,46	^Q3 = 0
Q4 = -5206	S4 $\leqslant$ 0	-46,04	^Q4 = -46,04
Q5 = -7404	S5 $\leqslant$ 0	-7460,15	^Q5 = -7404
Q6 = 7112	S6 $\leqslant$ 0	-1986,16	^Q6 = 7112
Q7 = 6452	S7 $\geqslant$ 0	4029,73	^Q7 = 2422,2
Q8 = -8480	S8 $\leqslant$ 0	-3563,72	^Q8 = -3563
Q9 = 4962	S9 $\geqslant$ 0	615,80	^Q9 = 4345,3
Q10 = 3852	S10 > 0	4603,27	^Q10 = 0
Q11 = -5616	S11 = 0	0	^Q11 = 0

Por último, si formamos un cuadro de amortización [17] del proyecto, tabla 4, (para los mencionados valores de k, caso A y caso B) comprobamos como la suma actualizada a la tasa k de las rentas equivalentes a la rentabilidad relativa neta de los capitales que permanecen invertidos a principio de cada año coincide con el VAN del proyecto de inversión mixto original:

A) Valor de las rentas netas actualizadas del proyecto puro equivalente versus rentabilidad absoluta del proyecto mixto, para una tasa de actualización del 90%:

TABLA 4

		AÑOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(1)	CI	100,00	555,39	0,00	0,00	0,00	4262,18	1641,90	0,00	2628,40	436,36	0,00
(2)	Qi	-350,00	1140,68	0,00	0,00	-4262,18	7112,00	3372,21	-2628,40	4962,00	896,21	0,00
(3)	k·CI	90,00	90,00	0,00	0,00	0,00	3835,97	1477,71	0,00	2365,56	392,72	0,00
(4)	r·CI	105,39	585,29	0,00	0,00	0,00	4491,71	1730,32	0,00	2769,95	459,85	0,00
(5)	r_n·CI	15,39	85,45	0,00	0,00	0,00	655,75	252,61	0,00	404,39	67,13	0,00
(6)	CA = Qi-r·CI	-455,39	555,39	0,00	0,00	-4262,18	2620,29	1641,90	-2628,40	2192,05	436,36	0,00
(7)	A-CAi	555,39	0,00	0,00	0,00	4262,18	1641,90	0,00	2628,40	436,36	0,00	0,00

17 Dicho cuadro es cimilar al que aparece en el libro de DURBAN OLIVA [6] pág. 60.

donde,

CI = Capital pendiente de amortizar a principios de cada año.

Qi = Flujo de tesorería en el período i.

k·CI = Remuneración del capital pendiente de amortizar a principios de cada año.

r·CI = R = Rentas correspondientes a la rentabilidad relativa bruta (TIR) del capital que permanece invertido a principios de cada año.

r_n·CI = R_n = Rentas correspondientes a la rentabilidad relativa neta del capital invertido a principios de cada año.

CA = Qi-r·CI = capital amortizado en el período i.

A-CAi = CI_{i+1} = capital pendiente de amortizar para el período i + 1.

El valor actualizado de las rentas correspondientes a la rentabilidad relativa neta para el proyecto puro formado a través de una k del 90% es,

$$VAN(R_n) = + \frac{15{,}39}{(1+k)^1} + \frac{85{,}45}{(1+k)^2} + \frac{655{,}75}{(1+k)^6} + \frac{252{,}61}{(1+k)^7} + \frac{404{,}39}{(1+k)^9} + \frac{67{,}13}{(1+k)^{10}} = 49{,}89430$$

que coincide con el valor del VAN del proyecto mixto original.

B) Valor de las rentas netas actualizadas del proyecto puro equivalente versus rentabilidad absoluta del proyecto mixto, para una tasa de actualización del 22%:

TABLA 5

	AÑOS										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CI	100,00	471,96	0,00	0,00	46,05	7460,16	1986,17	0,00	3563,72	0,00	0,00
Qi	-350,00	575,58	0,00	-46,05	-7404,00	7112,00	2422,26	-3563,72	4346,20	0,00	0,00
k·CI	22,00	103,83	0,00	0,00	10,13	1641,23	436,96	0,00	784,02	0,00	0,00
r·CI	21,96	103,63	0,00	0,00	10,11	1638,01	436,10	0,00	782,48	0,00	0,00
r_n·CI	-0,04	-0,20	0,00	0,00	-0,02	-3,23	0,86	0,00	-1,54	0,00	0,00
CA	-371,96	471,96	0,00	-46,05	-7414,11	5473,99	1986,17	-3563,72	3563,72	0,00	0,00
A-CAi	471,96	0,00	0,00	46,05	7460,16	1986,17	0,00	3563,72	0,00	0,00	0,00

El valor actualizado de las rentas correspondientes a la rentabilidad relativa neta para el proyecto puro formado a través de una k del 22% es,

$$\mathrm{VAN}(R_n) = + \frac{-0{,}04}{(1{,}22)^1} + \frac{-0{,}20}{(1{,}22)^2} + \frac{-0{,}02}{(1{,}22)^5} + \frac{-3{,}23}{(1{,}22)^6} +$$

$$+ \frac{-0{,}86}{(1{,}22)^7} + \frac{-1{,}54}{(1{,}22)^9} = -\ 1{,}63045$$

que como vemos coincide con el VAN del proyecto mixto original.

Todos los valores que aparecen en este ejemplo han sido obtenidos con la ayuda de un programa informático, dicho programa ha sido diseñado para resolver todo tipo de proyectos de inversión, simples o no simples. Una vez introducidos los datos, el programa los analiza determinando, en primer lugar, si el proyecto es simple o no simple, resolviendo el TIR de forma tradicional si fuera simple o puro; y en segundo lugar, si el proyecto fuera mixto, ofreciendo la posibilidad de resolver el problema según la transformación de MERRET y SYKES (cuando el proyecto presenta las características necesarias para llevar a cabo dicha transformación) y mostrando en este caso el proyecto transformado, o bien su resolución mediante la determinación del signo de los saldos a través de un proceso iterativo que va comprobando el signo de los mismos para cada valor dado a la tasa de actualización. El programa tiene sus limitaciones que podemos resumir en las siguientes: la más importante de todas ellas es la de que es válido únicamente para proyectos de inversión de hasta quince flujos de tesorería. Ello es debido a un problema de dimensión ya que al estar diseñado el programa para su utilización en los denominados ordenadores personales compatibles, la memoria de éstos no es suficiente como para intentar generalizarlo a n flujos. Por otra parte, una segunda limitación es la que surge del propio cálculo del TIR para cualquier proyecto sin problemas de inconsistencia, y que se refiere al hecho de que para determinar la raiz de una ecuación de grado n hay que «acotarla» previendo su valor. Esto se resuelve en el programa estableciendo una tabla de cálculo del TIR para diferentes valores posibles de tal forma que entre alguno de ellos se encuentre la(s) solución(es) que buscamos; posteriormente un proceso de selección se encarga de «rescatar» los valores únicos. No obstante, y aquí está el problema que comentábamos, puede suceder que en algún caso, en función de ciertas características muy peculiares de algún proyecto pudiera ser que alguna de esas soluciones no se encuentre; sin embargo será bastante raro encontrarse con el tipo de proyectos al que hacemos alusión.

6. Conclusiones

La valoración de proyectos de inversión a la luz del criterio de la tasa interna de rendimiento requiere una discusión previa acerca de la naturaleza y significado del mismo. Ante situaciones en las que el criterio se muestra inconsistente, la distinción entre inversiones puras e inversiones mixtas sobre la base del conocimiento de sus saldos, permite un enfoque de la cuestión que reduce el problema a la especificación del signo de los saldos del proyecto de inversión.

El método que proponemos para calcular el signo de los saldos, basado en la comparación del saldo cuyo signo queremos determinar con el último saldo del proyecto a través de un procedimiento similar al de la «tasa de retornosobre el coste» de Fisher, consiste en restar flujo a flujo los correspondientes a cada uno de los saldos mencionados e igualar a cero el valor actual del proyecto diferencial resultante de esta operación, para, de esta forma, obtener los puntos de corte que indican los cambios de signo que sufrirá el saldo en función del valor de k, cuando el proyecto sea mixto.

La bondad de este método puede testarse de tres formas diferentes al menos:

1°. La Tasa Interna de Rendimiento obtenida ha de verificar la estructura de signos de los saldos que la han originado.

2°. La tasa interna de rendimiento obtenida de la relación funcional del proyecto de inversión mixto ha de coincidir con la del proyecto de inversión transformado en uno puro equivalente.

3°. El Valor Actual Neto de un proyecto de inversión mixto ha de coincidir con el valor actualizado de las rentas netas del proyecto de inversión puro equivalente.

El procedimiento ha sido aplicado a un supuesto práctico donde se muestra, para este caso particular, la utilidad del método propuesto contrastando los resultados obtenidos por medio de los tests anteriormente indicados.

Apéndice A

En este apartado se demuestra que un proyecto puro equivalente proporciona una tasa interna de rendimiento idéntica a la que surgiría de la relación funcional entre r y k del proyecto mixto original.

Sea el siguiente proyecto puro transformado:

$$
\begin{aligned}
\hat{}A &= A \\
\hat{}Q_1 &= Q_1 \\
\hat{}Q_2 &= Q_2 \\
\ldots &\quad \ldots \\
\hat{}Q_{t-3} &= Q_{t-3} \\
\hat{}Q_{t-2} &= Q_{t-2} - S_{t-2}(r,k) && = \{- S_{t-3}(r,k)\ (1+r)\} \\
\hat{}Q_{t-1} &= Q_{t-1} - Q_{t-1} = 0 \\
\hat{}Q_t &= Q_t + S_{t-2}(r,k)\ (1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k) && = \{S_t(r,k)\} \\
\ldots &\quad \ldots \\
\hat{}Q_{n-4} &= Q_{n-4} \\
\hat{}Q_{n-3} &= Q_{n-3} \\
\hat{}Q_{n-2} &= Q_{n-2} - S_{n-2}(r,k) = && = \{- S_{n-3}(r,k)\ (1+r)\} \\
\hat{}Q_{n-1} &= Q_{n-1} - Q_{n-1} = 0 \\
\hat{}Q_n &= Q_n + S_{n-2}(r,k)\ (1+k)^2 + Q_{n-1}(1+K) && = \{S_n(r,k) = 0\}
\end{aligned}
$$

cuya tasa interna de rendimiento se calcula igualando a cero el Valor Actual Neto:

$$VAN = 0 = \hat{}A + \frac{\hat{}Q_1}{(1+r)^1} + \frac{\hat{}Q_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{\hat{}Q_{t-3}}{(1+r)^{t-3}} + \frac{\hat{}Q_{t-2}}{(1+r)^{t-2}} +$$

$$+ \frac{\hat{}Q_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} + \frac{\hat{}Q_t}{(1+r)^t} + \ldots + \frac{\hat{}Q_{n-4}}{(1+r)^{n-4}} + \frac{\hat{}Q_{n-3}}{(1+r)^{n-3}} +$$

$$+ \frac{\hat{}Q_{n-2}}{(1+r)^{n-2}} + \frac{\hat{}Q_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \frac{\hat{}Q_n}{(1+r)^n}$$

Sustituyendo cada flujo de tesorería transformado por su valor, tenemos:

$$VAN = 0 = A + \frac{Q_1}{(1+r)^1} + \frac{Q_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{Q_{t-3}}{(1+r)^{t-3}} + \frac{Q_{t-2} - S_{t-2}(r,k)}{(1+r)^{t-2}} +$$

$$+ \frac{Q_{t-1} - Q_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} + \frac{Q_t + S_{t-2}(r,k)\ (1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k)}{(1+r)^t} + \ldots$$

$$+ \frac{Q_{n-4}}{(1+r)^{n-4}} + \frac{Q_{n-3}}{(1+r)^{n-3}} + \frac{Q_{n-2} - S_{n-2}(r,k)}{(1+r)^{n-2}} + \frac{Q_{n-1} - Q_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{Q_n + S_{n-2}(r,k)\ (1+k)^2 + Q_{n-1}\ (1+k)}{(1+r)^n}$$

$$VAN = 0 =$$

$$A[1] = \frac{A(1+r)^{t-3} + Q_1(1+r)^{t-4} + \ldots + Q_{t-3}(1+r)^{t-2} + Q_{t-2} - S_{t-2}(r,k)}{(1+r)^{t-2}} +$$

$$A[2] \qquad + \frac{Q_t + S_{t-2}(r,k)\ (1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k)}{(1+r)^t} + \ldots$$

$$A[3] \qquad + \frac{Q_{n-4}(1+r)^2 + Q_{n-3}(1+r) + Q_{n-2} - S_{n-2}(r,k)}{(1+r)^{n-2}} +$$

$$A[4] \qquad + \frac{Q_n + S_{n-2}(r,k)\ (1+k)^2 + Q_{n-1}\ (1+k)}{(1+r)^n}$$

En el numerador de A[1] la expresión,

$$A(1+r)^{t-3} + Q_1(1+r)^{t-4} + \ldots + Q_{t-3}(1+r)^{t-2} + Q_{t-2} = S_{t-2}(r,k)$$

por lo que se anula con el último sumando.

El numerador de A[2] es precisamente, como ya sabemos,

$$Q_t + S_{t-2}(r,k)\,(1+k)^2 + Q_{t-1}(1+k) = S_t(r,k)$$

Dado que en el numerador de A[2] se reduce a $S_t(r,k)$, si realizamos operaciones sacando mínimo común múltiplo a los denominadores de las expresiones A[2] a A[3] (incluyendo las que aparecen como puntos suspensivos) nos quedará la siguiente relación:

$$+ \frac{S_{n-2}(r,k) - S_{n-2}(r,k)}{(1+r)^{n-2}}$$

lo cual evidentemente es igual a cero.
Por último nos queda la expresión A[4] que es igual a:

$$+ \frac{S_n(r,k)}{(1+r)^n}$$

Por consiguiente, ya que las expresiones A[1], A[2] y A[3] se anulan entre sí, únicamente permanece la A[4] que al igualarla a cero resulta la expresión del último saldo del proyecto mixto original:

$$\begin{aligned} S_n(r,k) = {} & ((\ldots((\ldots((A(1 + r) + Q_1)(1 + r) + Q_2)(1 + r) + \ldots + \\ & + Q_{t-3})(1 + r) + Q_{t-2})(1 + k) + Q_{t-1})(1 + k) + Q_t)(1 + r) + \\ & + \ldots + Q_{n-4})(1 + r) + Q_{n-3})(1 + r) + Q_{n-2})(1 + k) + \\ & + Q_{n-1})(1 + k) + Q_n = 0 \end{aligned}$$

Como ya se había demostrado que el proyecto transformado es puro, su tasa interna de rendimiento será única y por lo tanto va a coincidir con la que se derive de la relación funcional entre r y k de la expresión del último saldo.

Apéndice B:

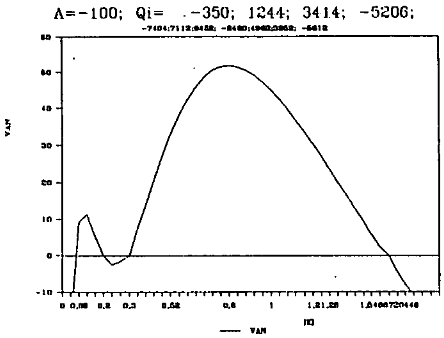

Gráfico 1

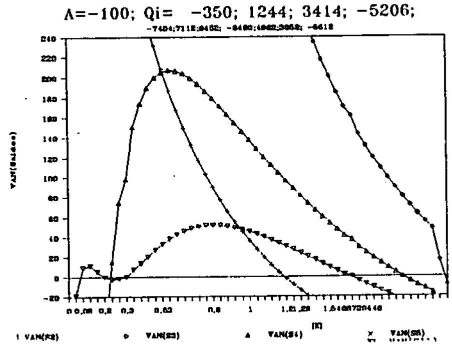

Gráfico 3

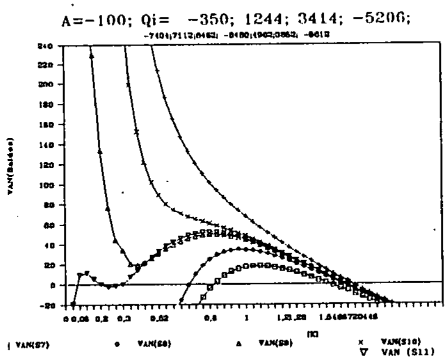

Gráfico 2

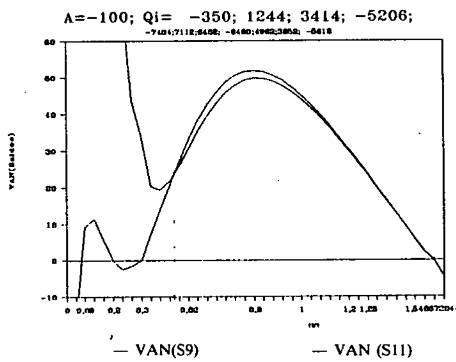

Gráfico 4

El Gráfico 1 muestra la curva del VAN del proyecto de inversión.

Los Gráficos 3 y 4 representan, ambos, los VAN de los flujos de tesorería correspondientes a cada saldo del proyecto que corte en algún punto al lado positivo del eje de abscisas; por motivos de claridad en el Gráfico 3 aparece la primera mitad de los saldos intermedios más el último saldo y en el Gráfico 4 aparece la segunda mitad más, también, el último saldo (pudiera decirse que los dos son el mismo gráfico). Cabe destacar en el Gráfico 3 el corte entre las curvas VAN(S_4) y VAN(S_{11}) en el punto 0,23 referido al eje de abscisas; lo cual supone un cambio de signo en el saldo S_4 de positivo a negativo a partir de dicho punto y en dirección al centro de los ejes de coordenadas (circunstancia que sucede con muy poca frecuencia).

El Gráfico 2 presenta, de forma aislada, el caso particular de relación entre el VAN de los flujos del saldo S_9 y los del último, S_{11}. Estos mismos saldos están representados en el gráfico 4 conjuntamente con otros, pero el paralelismo en una parte de su desarrollo impide ver con claridad el punto de corte entre ambos. En el Gráfico 2 se observa, pues, como a pesar del mencionado paralelismo, el saldo S_9 mantiene un signo positivo para valores de k $\leqslant$0,46 pasando a ser positivo para valores de k $>$0,46.

Todos los gráficos representan al mismo proyecto, aunque la escala del eje de ordenadas en los dos superiores es diferente de la de los dos inferiores.

Bibliografía

1. CRISTOBAL ZUBIZARRETA, J.Mª: «El criterio de la pseudotasa de retorno en las inversiones no puras». *Esic Market,* N.º 36, 3° cuatrimestre, 1981.
2. CRISTOBAL ZUBIZARRETA, J.Mª: «El problema de la unicidad de la tasa de retorno de una inversión: una explicación». *Gestión Científica,* N.º 1, 1983, págs. 43-58.
3. CRISTOBAL ZUBIZARRETA, J.Mª: «La tasa interna de retorno y la valoración de inversiones». *Gestión Científica,* N.º 2, 1986, págs. 221-232.
4. DE FARO, CLOVIS: «A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return: further comments». *Journal of Financial and Quantitative Analysis Septembre 1978,* págs. 577-584.
5. DORFMAN, ROBERT: «The meaning of internal rates of return». *The journal of Finance,* Vol. 3, N.º 5, Diciembre, 1981, págs. 1011-1021.
6. DURBAN OLIVA, SALVADOR: *La selección de inversiones en estructura.* Publicaciones de la Universidad de Sevilla. Sevilla, 1983.
7. HAMPTON, JOHN J.: *Modern financial theory. Reston Publishing Company, Inc.* (Prentice-Hall Company). Virginia 1982.
8. HERBS, ANTHONY: «The unique, real internal rate of return: caveat emptor». *Journal of Financial and Quantitative Analysis.* Junio, 1978, págs. 363-370.
9. MAO, JAMES, C.T.: *Análisis financiero.* El Ateneo. Buenos Aires, 1975.
10. MARTIN DAVILA, MIGUEL: «El tipo de rendimiento interno generalizado y su aplicación en la programación de inversiones». En *Temas actuales de gestión de empresas.* C.U.R. Sevilla, 1986, págs. 313-332.
11. MARTIN DAVILA, MIGUEL: «Problemática del cálculo de la rentabilidad en operaciones de inversión/financiación: una nueva aproximación». *Esic Market,* n.º 45. Tercer trimestre 1984. Julio-Septiembre.
12. MERRET, A.J. y SYKES, ALLEN.: *The finance and analysis of capital proyects.* Longman Group Ltd. 2ª ed. Londres, 1973.
13. MYERS, STEWART, C.: «Finance theory and financial strategy». *Interfaces.* Vol. 14, n.º 1, enero-febrero, 1984, págs. 126-137.
14. SUAREZ SUAREZ, ANDRES, S.: *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa.* Pirámide. Madrid, 1986.
15. TEICHROEW, D., ROBICHEK, A.A. y MONTALBANO, M.: «Mathematical analysis of rates of return under certainty». *Management Science,* N.º 11, Enero, 1965. Págs. 395-403.
16. TEICHROEW, D., ROBICHEK, A.A. y MONTALBANO, M.: «An analysis of criteria for investment and financing decisions under certainty». *Management Science,* N.º 12, Noviembre 1965. Págs. 151-179.
17. WESTON, J. FRED y COPELAND, THOMAS, E.: *Managerial finance.* CBS International Editions. Japon, 1986.
18. WILKES, F.M.: *Capital budgeting techniques.* John Wiley & Sons. Gran Bretaña, 1977. (2.ª reimpresión, 1982). Págs. 6-8.