LA INVERSA DE PENROSE

Mª Dolores Soto Torres

RESUMEN.— En el trabajo, tratamos de poner de manifiesto las aportaciones que las inversas generalizadas y en particular una de ellas, la inversa de Moore-Penrose, realizan en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Las inversas generalizadas permiten determinar si un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo admite al menos una solución y en este caso, nos proporcionarán la expresión general de dicha solución. En el caso de que el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, no admita solución, las inversas generalizadas permitirán caracterizar soluciones aproximadas.

1. Introducción

Las inversas generalizadas presentan una alternativa a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, proporcionando al mismo tiempo un excelente procedimiento para la resolución de ecuaciones matriciales. Han sido utilizadas con éxito en la resolución de programas matemáticos, en particular, en programación convexa y lineal, resultando asimismo indispensables en el tratamiento y resolución de problemas econométricos.

Si nos proponemos encontrar la solución, en caso de que exista, del sistema de ecuaciones lineales $A.x = y$, donde A es una matriz con elementos reales de m filas y n columnas, y es el vector columna de coeficientes reales y x el vector columna de las incógnitas, sabemos que si $m = n$ y A es una matriz regular, nuestro sistema de ecuaciones lineales, es un sistema de Cramer y el valor del vector x se obtiene aplicando este procedimiento.

Si $m \neq n$, para determinar si el sistema de ecuaciones lineales tiene o no solución, podemos acudir al Teorema de Rouche-Frobenius, teorema que no nos determina la expresión de dicha solución en caso de existir.

Las inversas generalizadas y en particular una de ellas, la inversa de Penrose, nos permite analizar si el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo admite solución y en este caso su expresión; en caso de no existir solución nos proporcionan una solución aproximada en un sentido concreto.

2. Existencia y unicidad de la inversa de Penrose

Penrose (1955) extendió el trabajo de Moore, demostrando que para cualquier matriz A de coeficientes reales con m filas y n columnas, existía una única matriz P de n filas y m columnas que verificaba las cuatro condiciones siguientes:

$$A = A.P.A. \qquad (1)$$

$$P = P.A.P. \qquad (2)$$

$$A.P. = {}^{t}(A.P) \qquad (3)$$

$$P.A. = {}^{t}(P.A) \qquad (4)$$

a esta matriz P se la denomina, aunque no universalmente, inversa de Penrose o más concretamente inversa de Moore-Penrose.

Demostramos a continuación que si A es una matriz cualquiera de coeficientes reales, siempre existe una matriz que satisface las condiciones (1), (2), (3) y (4).

Lema. Si A es una matriz de rango máximo, la matriz $B = {}^{t}A.A$ es una matriz simétrica regular de orden n.

Demostración. Si A es una matriz de rango máximo éste coincidirá con el mínimo de sus filas o columnas, esto es, rg(A) = mín (m, n). La matriz B es simétrica, en efecto

$${}^{t}B = {}^{t}({}^{t}A.A) = {}^{t}A.A = B$$

Si consideramos la relación $B = {}^{t}A.A$ y la multiplicamos a ambos lados por un vector no nulo x, obtenemos

$${}^{t}x.B.x. = {}^{t}x.{}^{t}A.A.x = {}^{t}(A.x).A.x$$

la expresión de la derecha es suma de cuadrados y es nula si y sólo si A.x = 0. Como rg(A) = mín (m, n), A.x = 0 se verifica solamente si x = 0, por tanto, la forma cuadrática ${}^{t}x.B.x$ es definida y podemos concluir que la matriz B es regular de orden n.

Proposición. Si A es una matriz cuadrada de rango máximo, la matriz inversa de A, A^{-1}, es la inversa de Penrose de la matriz A.

Demostración. Evidentemente la matriz A^{-1} verifica las cuatro condiciones

$$A = A.A^{-1}.A$$

$$A^{-1} = A^{-1}.A.A^{-1}$$

$$A.A^{-1} = I$$

$$A^{-1}.A = I$$

Proposición. Si A es una matriz con $rg(A) = m < n$, la inversa a la derecha de la matriz A, ${}^tA.(A.{}^tA)^{-1}$ es la inversa de Penrose de la matriz A.

Demostración. Denominemos $D = {}^tA.(A.{}^tA)^{-1}$. Tenemos:

$$A.D.A = A.{}^tA.(A.{}^tA)^{-1}.A = A$$

$$D.A.D = {}^tA.(A.{}^tA)^{-1}.A.{}^tA.(A.{}^tA)^{-1} = {}^tA.(A.{}^tA)^{-1} = D$$

$${}^t(A.D) = {}^t(A.{}^tA.(A.{}^tA)^{-1}) = {}^t(A.{}^tA)^{-1}.A.{}^tA = (A.{}^tA)^{-1}.A.{}^tA = I$$

siendo por tanto la matriz A.D simétrica.

$${}^t(D.A) = {}^t({}^tA.(A.{}^tA)^{-1}.A) = {}^tA.(A.{}^tA)^{-1}.A = D.A$$

c.q.d.

Proposición. Si A es una matriz con $rg(A) = n < m$, la inversa a la izquierda de la matriz A, $({}^tA.A)^{-1}.{}^tA$ es la inversa de Penrose de la matriz A.

La demostración es análoga a la de la proposición anterior.

Proposición. Si A es una matriz cuyo rango es no nulo y no máximo, dicha matriz admite inversa de Penrose.

Demostración. Sea A una matriz cuyo rango no es nulo ni máximo

$$rg(A) = r < \text{mín}\ (m, n),\ r \neq 0$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las r primeras filas y las r primeras columnas de la matriz A las que son linealmente independientes. La matriz A, podemos descomponerla

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

siendo A_{11} de dimensión (r, r), A_{12} (r, n-r), A_{21} (m-r, r), y la matriz A_{22} de dimensión (m-r, n-r). En la matriz A las n-r últimas columnas son combinaciones lineales de las r primeras, tenemos

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} x \Longrightarrow \begin{array}{l} A_{12} = A_{11}.x \\ A_{22} = A_{21}.x \end{array}$$

al ser la matriz A_{11} regular

$$X = A_{11}^{-1}.A_{12}$$

y reemplazando en la segunda ecuación X por su valor tenemos

$$A_{22} = A_{21}.A_{11}^{-1}.A_{12}$$

La matriz A, podemos expresarla

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} A_{11}^{-1} (A_{11} \quad A_{11})$$

denominemos

$$B = {}^{t}(A_{11} \quad A_{21}),\ C = (A_{11} \quad A_{12})$$

la matriz A puede expresarse: $A = B.A_{11}^{-1}.C$

El rango de la matriz B coincide con el número de sus columnas, luego admitirá una inversa a la izquierda $B_i^{-1} = ({}^tB.B)^{-1}.{}^tB$. El rango de la matriz C coincide con el número de sus filas, por tanto admitirá una inversa a la derecha $C_d^{-1} = {}^tC.(C.{}^tC)^{-1}$.

La matriz $C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}$ verifica las cuatro propiedades (1), (2), (3) y (4) con respecto a la matriz A, por tanto, es la inversa de Penrose de A. En efecto

$$A.C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}.A = B.A_{11}^{-1}.C.C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}.B.A_{11}^{-1}.C = B.A_{11}^{-1}.C = A$$

$$(C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}).A.(C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}) = C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}.B.A_{11}^{-1}.C.C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1} = C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}$$

${}^t(C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}.A) = {}^t(C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}.B.A_{11}^{-1}.C) = {}^t(C_d^{-1}.C)$ que es una matriz simétrica.

${}^t(A.C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}) = {}^t(B.A_{11}^{-1}.C.C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1}) = {}^t(B.B_i^{-1})$ que también es una matriz simétrica.

En la aplicación práctica de este procedimiento, designaremos por:

— B, la matriz obtenida seleccionando las r columnas independientes de la matriz A, sin modificar las filas.

— C, se obtiene seleccionando las r filas independientes de la matriz A, sin modificar las columnas.

— A_{11}, se obtiene considerando los elementos comunes de B y C, en el orden de las filas de C y las columnas de B.

Ejemplo. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que tiene rango dos, tenemos de acuerdo con la proposición anterior:

$$B = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la inversa de Penrose de A es:

$$p = C_d^{-1}.A_{11}.B_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5/6 & -1 \\ 0 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Las proposiciones anteriores completan todas las posibilidades sobre la matriz A, salvo el caso de que $rg(A) = 0$, en cuyo caso la inversa de Penrose es la matriz nula. Por tanto, siempre podemos construir la inversa de Penrose de una matriz cualquiera.

Trataremos ahora de resolver el problema de la unicidad.

Proposición. Dada una matriz A de coeficientes reales su inversa de Penrose es única.

Demostración. Supongamos que la matriz A admite dos inversas de Penrose: P_1, P_2; evidentemente ambas matrices verificarán las condiciones (1), (2), (3) y (4). Tenemos por tanto

$$P_1 = P_1.A.P_1 = P_1.{}^t(A.P_1) = P_1.{}^tP_1.{}^tA = P_1.{}^tP_1.{}^t(A.P_2.A) =$$

$$= P_1.{}^tP_1.{}^tA.{}^tP_2.{}^tA = P_1.{}^t(A.P_1).{}^t(A.P_2) = P_1.A.P_1.A.P_2 = P_1.A.P_2$$

$$P_2 = P_2.A.P_2 = {}^t(P_2.A).P_2 = {}^tA.{}^tP_2.P_2 = {}^t(A.P_1.A).{}^tP_2.P_2 =$$

$$= {}^tA.{}^tP_1.{}^tA.{}^tP_2.P_2 = {}^t(P_1.A).{}^t(P_2.A).P_2 = P_1.A.P_2.A.P_2 = P_1.A.P_2$$

Luego $P_1 = P_2$.

3. La inversa de Penrose y los sistemas de ecuaciones lineales

Tratamos ahora de abordar el problema de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de las inversas generalizadas, para lo cual es necesario introducir el concepto de sistema consistente.

Definición. Sea A una matriz de coeficientes reales de m filas y n columnas, donde generalmente $m \neq n$. El sistema de ecuaciones lineales $A.x = y$ es consistente si existe al menos un vector x_0 que satisface el sistema de ecuaciones lineales.

Proposición. Sea A una matriz de coeficientes reales de n filas y m columnas y A^+ una matriz de m filas y n columnas que verifica: $A = A.A^+.A$. Entonces:

a) El sistema de ecuaciones lineales $A.x = y$ es consistente si y sólo si $A.A^+.y = y$

b) La solución general de un sistema lineal consistente no homogéneo $A.x = y$ es

$$x = A^+.y + (I - A^+.A)\,z \tag{5}$$

donde z es un vector arbitrario.

Demostración. Si $A.x = y$ es consistente, exitirá un vector x_0 que satisface el sistema, esto es, $A.x_0 = y$; multiplicando en esta expresión a la izquierda por $A.A^+$, tenemos

$$A.A^+.A.x_0 = A.x_0 = A.A^+.y = y$$

Recíprocamente, si $A.A^+.y = y$, el sistema lineal $A.x = y$ admite solución, basta considerar $x_0 = A^+.y$.

Probemos ahora la condición b. Puesto que el sistema es consistente, tenemos

$$A.x = A.(A^+.y + (I - A^+.A).z) = A.A^+.y = y$$

luego, x dado por (5) es la solución general de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.

El recíproco de la condición b de esta proposición también se verifica, esto es, toda solución del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo puede expresarse como (5). Ya que si x verifica el sistema de ecuaciones, tenemos

$$y - A.x = 0$$

donde multiplicando por A^+ a la izquierda

$$A^+y - A^+.A.x = 0$$

y sumando y restando el vector x, tenemos

$$x = A^+.y + (I - A^+.A).x$$

Observemos que en esta proposición se exige exclusivamente que la matriz A^+ verifique la primera condición exigida para las inversas de Penrose, por tanto la proposición se verifica también si en vez de considerar la matriz A^+ consideramos la matriz P, inversa de Penrose de la matriz A.

Proposición. La solución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo consistente $A.x = y$ es única si y sólo si $P.A = I$, donde P es la inversa de Penrose de A.

Demostración. Por la proposición anterior sabemos, que la solución general del sistema consistente, considerando la matriz P, es

$$x = P.y + (I - P.A).z$$

si $P.A = I$, tenemos $x = P.y$ que evidentemente es única.

Observemos que la condición $P.A = I$ se verifica si y sólo si $rg(A) = n$ lo que equivale a la condición establecida por Frobenius para la existencia de una única solución, ya que una de las hipótesis de esta proposición es que el sistema de ecuaciones lineales sea consistente.

Consideremos ahora un (posible) sistema inconsistente, la inversa de Penrose nos permite encontrar una solución aproximada x_o del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, en el sentido de que minimiza la función

$$F(x) = {}^t(A.x - y).(A.x - y)$$

donde $r(x_o) = A.x_o - y$ sería el error que cometeríamos por considerar a x_o como solución del sistema.

Proposición. Sea $A.x = y$ un (posible) sistema inconsistente. El vector $x_o = P.y$, donde P es la inversa de Penrose de la matriz A, verifica las dos condiciones siguientes:

a) x_o minimiza la función real de n variables reales F(x).

b) x_o es el único vector que verifica

$$^t x_o x_o < {}^t x.x$$

para todo vector x que minimice la función F(x).

Demostración. La condición necesaria de primer orden para que la función

$$F(x) = {}^t(A.x - y).(A.x - y)$$

admita un óptimo, es que el gradiente se anule:

$$\nabla F(x) = 0 \Longrightarrow {}^tA.(A.x - y) = 0 \qquad (6)$$

el vector $x_o = P.y$ verifica la ecuación (6), ya que

$$^tA.(A.P.y - y) = {^tA}.(^t(A.P).y - y) = {^t(A.P.A)}.y - {^tAy} - {^tAy} = 0$$

La condición suficiente para mínimo, se verifica si la matriz hessiana es (semi) definida positiva; en nuestro caso, la matriz hessiana es $^tA.A$ que es al menos semidefinida positiva.

Por tanto el vector $x_o = P.y$ minimiza la función F(x) y el valor que dicha función alcanza en x_o es:

$$F(x_o) = {^ty}.(I - A.P).y$$

Observemos que para probar la primera parte de esta proposición hemos necesitado exclusivamente que la matriz P verifique las condiciones $^t(A.P) = A.P$; $A.P.A = A$.

El vector x_o no es el único que minimiza la función F(x). Si el vector x'_o, $x'_o \neq x_o$, también minimiza la función F(x), tendrá que verificar también las condiciones necesarias de óptimo siendo entonces solución del sistema $^tA.A.x = {^tA}.y$. La solución general de este sistema viene dada por

$$x = P'.A.y + (I - P'.{^tA}.A).z \tag{7}$$

donde P' es la inversa de Penrose de $^tA.A$. Mediante un sencillo cálculo se demuestra que

$$P' = P.{^tP}$$

por lo que la expresión (7) se transforma en

$$x = P.y + (I - P.A)\,z \tag{8}$$

El vector $x'_o = P.y + (I - P.A).z$ con $z \neq 0$, ya que $x_o \neq x'_o$.

Consideramos

$$^tx'_o.x'_o = {^t(P.y)}.(P.y) + {^t((I - P.A)\,z)}.((I - P.A).z) = {^tx_o}.x_o +$$
$$+ {^t((I - P.A).z)}.((I - P.A).z)$$

Luego

$$^tx'_o.x'_o - {^tx_o}.x_o = {^t((I - P.A).z)}.((I - P.A).z) > 0$$

c.q.d.

Proposición. Si G es una matriz tal que $x_o = G.y$ verifica

$$^tx_o.x_o < {^tx}.x$$

para todo $x \neq x_0$ que minimice la función $F(x)$. Entonces la matriz G es la inversa de Penrose de la matriz A.

Demostración. Si $x_0 = G.y$ verifica $F(x_0) = F(x)$ para todo x de R_n, x_0 verificará las condiciones necesarias de primer orden, esto es, se verifica

$$^tA.(A.x_0 - y) = 0 \Longrightarrow {}^tA.(A.G.y - y) = 0 \Longrightarrow {}^tA.(A.G - I).y = 0$$

si esta última igualdad se ha de verificar para cualquier vector y, tenemos

$$^tA.(A.G - I) = 0 \tag{8}$$

multiplicando (8) por ^tG a la izquierda, tenemos

$$^t(A.G).A.G = {}^t(A.G)$$

donde tomando traspuestas:

$$^t(A.G).A.G = A.G = {}^t(A.G)$$

luego, la matriz A.G es simétrica.

Si consideramos (8) y tomamos transpuestas, tenemos

$$^t(A.G).A = A$$

como la matriz (A.G) es simétrica, tenemos: $A.G.A = A$

Luego, hemos probado que la matriz G verifica las condiciones (1) y (3) de la inversa de Penrose.

La condición $^tx_0.x_0 < {}^tx.x$ para todo $x \neq x_0$, que minimice $F(x)$ obligará a que la matriz G verifique las otras dos condiciones (2) y (4). En efecto, como la matriz G verifica las condiciones (1) y (3) de la inversa de Penrose, toda solución del sistema de ecuaciones lineales consistente $^tA.A.x = {}^tA.y$ podrá expresarse

$$x = G.y + (I - G.A).z$$

si $z \neq 0$, entonces $x \neq x_0 = G.y$. Tenemos

$$^tx.x = {}^t(G.y + (I - G.A).z).(G.y + (I - G.A).z) =$$

$$= {}^tx_0.x_0 + {}^ty.{}^tG.(I - G.A).z + {}^tz.{}^t(I - G.A).G.y + {}^t((I - G.A)z)(I - G.A)z$$

si $^tx.x - {}^tx_0.x_0 > 0 \Longrightarrow$

$$^ty.{}^tG.(I - G.A.).z + {}^tz.{}^t(I - G.A).G.y + {}^t((I - G.A).z).(I - G.A).z > 0$$

como esta desigualdad se ha de verificar para todo vector y y z, solamente se verificará si

$$^tG.(I - G.A) = 0 \tag{9}$$

Multiplicando (9) a la izquierda por ${}^{t}A$, tenemos

$$^{t}(G.A) = {}^{t}(G.A).G.A = G.A$$

por tanto la matriz G.A es simétrica.

Por (9): ${}^{t}G = {}^{t}G.G.A$, donde tomando traspuestas y sabiendo que la matriz G.A es simétrica, tenemos

$$G = G.A.G$$

Así pues, la matriz G es la inversa de Penrose de la matriz A.

4. Conclusiones

Dada una matriz A de m filas y n columnas, podemos asociarla diferentes matrices G que constituyen el conjunto de inversas generalizadas de la matriz A, según que tales matrices G verifiquen las condiciones (1), (1) y (3) o (1), (2), (3) y (4).

Si exclusivamente se verifica A.G.A. = A, hemos probado que a partir de G podemos determinar si el sistema de ecuaciones A.x = y admite al menos una solución, y si ésta existe, encontramos su expresión general.

Si se verifican las condiciones A.G.A. = A y ${}^{t}(A.G) = A.G$, a partir de la matriz G, hemos analizado cómo se construye un vector que minimiza la función $F(x) = {}^{t}(A.x - y).(A.x - y)$ y por tanto, si el sistema A.x = y es inconsistente, estaremos minimizando ${}^{t}r(x).r(x)$, donde r(x) es el error que cometemos al considerar que x es la solución del sistema A.x = y.

La inversa de Penrose es la inversa generalizada que engloba a las demás; hemos probado que ella nos permite caracterizar todos los problemas tratados con las demás inversas generalizadas, además, nos determina cuando es única la solución del sistema de ecuaciones lineales A.x = y y nos permite caracterizar el vector que minimiza ${}^{t}x.x$ entre todos los vectores que minimizan la función F(x).

Bibliografía

BJERHAMMAR, A.: Theory of errors and generalized matrix inverses. Elsevier Scienc Publ. (1973).

CAMPBELL, S. L.: Generalized inverses of linear transformations. Pitman (1973).

DHRYMES, P. J.: Mathematics for Econometrics. Springer-Verlag (1978).

POLLOK, D.S.G.: The Algebre of Econometrics. John-Wiley and Sons (1979).

RAO, C.R., MITRA, S.K.: Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John-Wiley (1971).

SEARLE, S.R.: Linear Models. John-Wiley (1971).