ANALISIS PARAMETRICO EN PROGRAMACION LINEAL MULTIOBJETIVO

Mª Dolores Soto Torres
R. Fernández Lechón

RESUMEN.—En este trabajo, estudiamos un problema de programación lineal multiobjetivo con un criterio paramétrico. Estos problemas son de gran interés ya que con frecuencia los coeficientes de la función objetivo son estimaciones de valores o bien, están sometidos a variaciones. Desarrollamos un método que nos permite determinar soluciones eficientes y débilmente eficientes de este problema de acuerdo con el campo de variación del parámetro.

1. Introducción

Un programa lineal multiobjetivo (PLMO) consiste en determinar alternativas desde un poliedro convexo F considerando simultáneamente criterios lineales conflictivos. Estos objetivos lineales pueden agruparse en un vector columna C.x, donde C es una matriz pxn, siendo p el número de objetivos.

El problema puede plantearse como

(P1) $\max C.x$ sujeto a: $A.x = b, \quad x \geq O$

donde A es una matriz mxn, $b \in R^m$ y denotamos por F el poliedro convexo de soluciones posibles.

Por tanto, para cualquier solución posible, el valor de la función objetivo, en ella, será un vector columna donde un criterio de comparación no tiene por qué resultar válido (estamos ante un orden parcial), de ahí, que en PLMO no se busque una solución óptima, sino aquellas soluciones posibles tales que no existan otras mejores que ellas. Estas soluciones corresponden a los conceptos de soluciones eficientes y soluciones débilmente eficientes. Así, diremos que una solución posible x^O es eficiente si no existe otra solución posible x tal que $Cx \geq Cx^O$, por lo menos con una desigualdad estricta, esto es, $Cx \neq Cx^O$ y una solución posible x^O diremos que es débilmente eficiente si no existe otra solución posible x tal que $\underline{Cx} > Cx^O$. Designemos por EF (C) el conjunto de soluciones eficientes y por $\overline{\text{EF}}$ (C) el conjunto de soluciones débilmente eficientes.

El análisis de distintos modelos, en diferentes campos, ha llevado al planeamiento de problemas lineales multiobjetivos particulares entre los que pueden citarse los trabajos de Ashton y Atkins (1981), Spronk (1981) que analizan problemas microeconómicos; Zionts y Deshpande (1981) estudian problemas socioeconómicos; Bitran y Lawrence (1980) en problemas de localización; Herner y Snapper (1978) en sistemas de información. De acuerdo con las características de los modelos a estudio, se han propuesto distintos algoritmos para generar los conjuntos de soluciones eficientes y débilmente eficientes, podemos citar, entre otros, los algoritmos propuestos por Yu y Zeleny (1975), Ecker y Kouada (1978), Franklin (1980).

Ahora bien, planteado un problema de PLMO surge el problema de la exactitud de los datos en él contenidos, ya que si alguno de ellos es estimado «a priori» y posteriormente corregido, será necesario la realización de nuevo de todos los cálculos, para determinar el nuevo conjunto de soluciones eficientes y débilmente eficientes; este es el mismo problema que surge en PL y se estudia en el Análisis de la Sensibilidad y en Programación Paramétrica.

Nosotros, en este trabajo, vamos a centrarnos en determinar las modificaciones que puede sufrir la matriz de la función objetivo, (dentro de un criterio paramétrico), de tal forma que todas las soluciones eficientes o débilmente eficientes lo sigan siendo del nuevo problema parametrizado.

Este problema puede plantearse bajo dos puntos de vista distintos. Uno consistiría en determinar la posible variación del parámetro con la única restricción de que la condición anterior se verifique, este análisis le denominaremos parametrización irrestricta y el otro, sería suponer que se tiene algún tipo de información sobre la nueva matriz de la función objetivo, de tal forma que el parámetro se restringe a un campo de valores determinado de antemano (parametrización restringida).

El planteamiento de estas dos cuestiones podemos realizarlo de la forma siguiente:

Dado el problema lineal multiobjetivo (P1) y supuesto conocido el conjunto EF (C) y $\overline{\text{EF}}$ (C), consideramos un nuevo PLMO

$$\text{(P2)} \qquad \max\,(C + \overline{C}\,D)\,x \qquad \text{sujeto a:} \qquad Ax = b, \qquad x \geq O$$

donde $\overline{C}$ es una matriz pxn de coeficientes constantes y D es una matriz diagonal uniparamétrica con elementos diagonales no todos nulos. En la primera cuestión, como en la segunda, tratamos de determinar las modificaciones que pueden sufrir los elementos diagonales de D de tal forma que los conjuntos de puntos eficientes (débilmente eficientes) del programa (P1) lo sean también de (P2).

El análisis del problema con parámetro irrestricto ha sido considerado por Gal (1981) suponiendo que todos los parámetros diagonales son idénticos. Para la resolución plantea una conjunto de programas lineales y determina la variación del parámetro mediante condiciones primales y duales de tales programas, con el objetivo de que el conjunto de soluciones eficientes no se modifique. El problema del parámetro restringido ha sido considerado por Bitran (1980) analizando las soluciones eficientes comunes a un conjunto de matrices cuyos elementos están acotados y por Benson (1985) estudiando un problema de parametrización escalar, ampliando también el estudio a soluciones débilmente eficientes.

El trabajo se ha dividido en cinco apartados. En el segundo analizamos las características generales de los puntos eficientes y débilmente eficientes de un PLMO. En el tercer apartado analizamos la parametrización irrestricta, en el cuarto estudiamos la parametrización restringida, y finalizamos el trabajo con unas conclusiones.

2. Caracterización de los conjuntos de puntos eficientes y débilmente eficientes

La determinación de los puntos eficientes y débilemente eficientes, se limita a la búsqueda de óptimos de programas lineales uniobjetivos, en base al siguiente teorema «Una solución posible x^O es eficiente (débilmente eficiente) de (P1) si y sólo si x es la solución óptima del programa lineal uniobjetivo:

$$\max w^t .Cx \qquad \text{sujeta a:} \qquad Ax = b, \qquad x \geq O \qquad (1)$$

para algún $w > O$ $(w \geq O)$".

Como consecuencia de este teorema, tenemos los siguientes resultados:

a) Sólo podrán ser soluciones eficientes (débilmente eficientes) las caras y en particular las aristas y puntos extremos del poliedro convexo.

b) Los conjuntos EF (C) y $\overline{\text{EF}}$ (C) no tienen por qué ser convexos, ya que los puntos del poliedro convexo que no formen parte de sus caras no pueden ser soluciones eficientes ni débilmente eficientes.

c) Los conjuntos EF (C) y $\overline{\text{EF}}$ (C) serán vacios si F lo es, si bien tenemos que hacer notar que si F fuese una región convexa no acotada los puntos eficientes y débilmente eficientes pueden no ser finitos.

d) A toda solución eficiente (débilmente eficiente) x^O podemos asociar un conjunto

$$\Omega x^O = \{w > O\ (w \geq O) \mid x^O \text{ óptimo del PL uniobjetivo (1)}\}$$

Este conjunto es cerrado y convexo (ver Franklin 1980)

e) El conjunto de soluciones eficientes es un subconjunto del conjunto de soluciones débilmente eficientes.

Además, los conjuntos EF (C) y $\overline{EF}$ (C) verifican determinadas propiedades; en particular, son conjuntos cerrados y conectados (ver Benson 1985), por tanto, de acuerdo con esta propiedad los conjuntos EF (C) y $\overline{EF}$ (C) no son unión de dos conjuntos abiertos o cerrados no vacios disjuntos.

Es precisamente esta propiedad, junto con el teorema fundamental, la que ha permitido el desarrollo de numerosos procedimientos que determinan el conjunto de puntos eficientes o débilmente eficientes, ver Ecker y Kouada (1978), Gal (1981), Franklin (1980) entre otros, en general estos procedimientos parten de un primer punto eficiente, lo que puede conseguirse dando un valor fijo a w para resolver el PL (1) y luego pasar a puntos extremos adyacentes aplicando un test específico de eficiencia o débilmente eficiencia.

3. Variación paramétrica irrestricta

Como ya hemos expuesto en la introducción, en este apartado tratamos de determinar la variación del parámetro de la matriz D de tal forma que los conjuntos de soluciones eficientes y débilmente eficientes del programa (P1) lo sean también del (P2).

Comenzaremos primero suponiendo que los elementos diagonales de la matriz D son de la forma (d, O, ..., O), veremos posteriormente que estos resultados pueden generalizarse cuando la matriz diagonal se uniparametriza de cualquier otro modo.

Dado el programa (P1) y supuesto conocido el conjunto EF (C), consideremos un punto cualquiera de ellos x^O que sea un punto extremo no degenerado del conjunto de soluciones posibles F, entonces x^O será una solución posible básica:

$$x^O = (x^O{}_B, x^O{}_N)$$

donde $x^O{}_B$ corresponde a las componentes básicas, con lo que $x^O{}_B > O$ y $x^O{}_N$ corresponde a las componentes no básicas, luego son nulas. Además existirá $w > O$ tal que:

$$w^t \left[C_B B^{-1} A_N - C_N\right] \geq O \qquad (2)$$

siendo C_B y C_N las submatrices de la matriz C formadas respectivamente por las columnas de C correpondientes a las componentes básicas y no básicas, B es la matriz básica y A_N es la submatriz de A formada por las columnas correspondientes a las componentes no básicas.

En el caso que nos ocupa la matriz C + $\overline{C}$D coincidirá con la matriz C salvo la primera columna, que será:

$$(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{11}\, d, \bar{c}_{21} + \bar{c}_{21}\, d, ..., \bar{c}p_1 + \bar{c}p_1\, d)^t$$

Distingamos ahora, dos casos dependiendo de que la primera componente de x^O sea básica o no.

a) Si la primera componente es no básica, al sustituir C por $C' = C + \bar{C}\, D$ en (2) tenemos que la matriz $(C_B\, B^{-1}\, A_N - C'_N)$ coincide con $(C_B\, B^{-1}\, A_N - C_N)$ salvo en la primera columna que será:

$$[C_B\, B^{-1}\, A^1_N - C^1_N - \bar{C}^1_N\, d] \qquad (3)$$

consideremos w, si multiplicamos (3) por w^t a la izquierda, podemos expresar la operación por la expresión:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i (a_{i1} + b_{i1}\, d)$$

si para todo índice i, $(a_{i1} + b_{i1}\, d)$ son negativos, entonces no podremos encontrar w_i positivos tal que se verifique:

$$w^t\, [C_B\, B^{-1}\, A^1_N - C^1_N - \bar{C}^1_N\, d] \geq O \qquad (4)$$

este es precisamente el campo donde d no puede variar.

Por tanto, para el complementario de este campo será siempre posible encontrar $w > O$ tal que (4) se verifique.

b) Si la primera componente es básica, todos los elementos de la matriz $(C_B\, B^{-1}\, A_N - C_N)$ se ven modificados, pasando a valer:

$$[C_B\, B^{-1}\, A_N - C_N - \bar{C}_N\, d] \qquad (5)$$

El razonamiento ahora, coincide con el anterior, consideramos w y multiplicamos (5) por w^t a la izquierda, obtendremos:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i\, (a_{ij} + b_{ij}\, d)$$

con j variando en las no básicas. Si $(a_{ij} + b_{ij}\, d)$ para todo $i = 1, 2, ..., p$ es negativo, no existirá $w > O$ verificando la desigualdad a conseguir, éste será, por tanto, el campo de no variación de d.

Luego, el campo de variación de d queda totalmente determinado si el conjunto de puntos eficientes de (P1) es un único punto extremo no degenerado.

En general el programa (P1) puede admitir varios puntos extremos eficienes y por tanto también serán eficientes las aristas que delimitan estos puntos extremos en el poliedro convexo de soluciones posibles. Supongamos que tenemos dos puntos extremos eficientes no degenerados x^O y x^1, el razonamiento es análogo si existieran más de dos. Por el procedimiento anterior podremos encontrar la variación de d para que x^O y x^1 sigan siendo eficientes en (P2), luego, obviamente, la intersección de ambos campos será el campo de variación de d para que ambos sean eficientes en (P2).

Ahora bien, como la arista que une ambas soluciones eficientes también lo es (en virtud de la propiedad de conexión) y son por tanto adyacentes, ha de existir un w > O tal que

$$w^t \, [C_B \, B^{-1} \, A^i_N - C^i_N] = O$$

para algún índice i no básico tanto si consideramos la base asociada a x^O o bien a x^1.

Entonces, para que permanezca eficiente en (P2) esta arista, deberá verificarse que exista w > O, w' > O tal que

$$w^t \, [C_B \, B^{-1} \, A^j_N - C^j_N - \overline{C}\,^j_N \; d] = O$$

con j no básico para la base asociada a x^O y

$$w'^t \, [C_B \, B^{-1} \, A^i_N - C^i_N - \overline{C}\,^i_N \; d] = O$$

con i no básico para la base asociada a x^1 ; estos vectores w y w' no existirán si todos los elementos de estas matrices son negativos, luego del campo de variación anterior deberemos eliminar, si fuera necesario, aquellos valores de d que permitan este hecho.

Si consideramos que la matriz D tuviese otro tipo de variación uniparamétrica, los razonamientos a seguir serían idénticos, aunque los cálculos lógicamente son más laboriosos.

En el caso de que tengamos dos o más bases asociadas a una misma solución extrema eficiente degenerada, las consideramos como soluciones eficientes «distintas» como señala Ecker y Kouada (op. cit.) aunque obviamente desde el punto de vista geométrico estos puntos son idénticos.

Para determinar el campo de variación del parámetro en el caso de soluciones débilmente eficientes puede seguirse el razonamiento siguiente: Si $x^O \in \overline{EF}$ (C) entonces podemos determinar la variación del parámetro d, por el procedimiento anterior, para que $x^O \in$ EF (C + $\overline{C}$D) y como este conjunto es un subconjunto de $\overline{EF}$(C + $\overline{C}$D) tendremos determinado el valor del parámetro para que todas las soluciones débilmente eficientes de (P1) lo sean también de (P2). Notemos que el campo así encontrado será un subconjunto del campo que se podría obtener haciendo distintas hipótesis sobre la nulidad o no de las componentes del vector w.

4. Variación paramétrica restringida

En el apartado anterior, hemos obtenido un procedimiento general, apoyándonos en la información que tenemos sobre EF (C) y $\overline{EF}$ (C), que determina el campo de variación del parámetro de tal forma que el conjunto de soluciones eficientes y débilmente eficientes de (P1) lo siguen siendo en la parametrización.

Sin embargo, si el parámetro se restringe a que tome valores dentro de un campo, del que desconocemos su relación con el campo del apartado anterior, tendremos que, en general, existirán soluciones eficientes y débilmente eficientes que lo son de unas matrices parametrizadas y de otras no.

Ahora podemos plantearnos la cuestión de quienes son las soluciones eficientes y débilmente eficientes que son comunes a todas las matrices parametrizadas, esto es, determinar $EF = \cap EF(C + \bar{C}D)$, $\overline{EF} = \cap \overline{EF}(C + \bar{C}D)$, cuando el parámetro de la matriz diagonal D se restringe a que tome valores dentro de un campo conocido. Nosotros vamos a analizar esta cuestión considerando que el parámetro toma valores en el intervalo $[-a, b]$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ y finitos, con lo que incluimos la posibilidad de que el parámetro tome el valor nulo y de esta forma podemos determinar las soluciones eficientes y débilmente eficientes de (P1) que permanecen en (P2).

Los nuevos conjuntos EF y $\overline{EF}$, pierden determinadas características que pueden ser consideradas como generales en los PLMO y que hemos recogido en el segundo apartado. Así, los conjuntos EF y $\overline{EF}$ no tienen por qué estar conectados (ver Benson, Bitran (op. cit.)), sin embargo, si un punto de EF o $\overline{EF}$ está en el interior de una cara toda la cara está en EF o $\overline{EF}$ (Benson, Bitran).

En el trabajo de Bitran, se determina cuándo un punto extremo de F está en EF si la intersección se realiza sobre un conjunto de matrices cuyos elementos están dentro de un inventario de acotación, no el mismo para todas. En particular, este procedimiento podrá aplicarse en nuestro caso.

Benson determina los conjuntos EF y $\overline{EF}$ cuando la parametrización se realiza de la forma $C + \theta C$, con $\theta \in [0, 1]$. Luego su estudio es un caso particular del nuestro.

Generalizando el trabajo de Benson, podemos establecer los siguientes teoremas que permitirán determinar cuándo una solución eficiente (débilmente eficiente) de (P1) está en EF o en $\overline{EF}$.

TEOREMA. Sea e el vector unitario de dimensión apropiada y x^0 una solución eficiente del programa (P1), entonces x^0 pertenece a EF si y sólo si el valor de la función objetivo en el óptimo del programa:

$$\max e^t z$$

$$\text{s.a. } (C + \bar{C}D)(x - x^0) = z$$

$$z \geq 0, x \in F$$

es cero para todo $d \in [-a, b]$.

Demostración

Si x^O pertenece a EF, entonces $(x^O, z) = (x^O, O)$ es una solución posible del programa planteado; el valor de la función objetivo en ella es cero y es una solución óptima ya que en otro caso no podría pertenecer a EF.

Recíprocamente, fijado un d^* cualquiera del intervalo $[-a, b]$, puesto que el valor óptimo de la función objetivo es cero, tendremos que $(C + \bar{C}D^*)(x - x^O) = O$ lo que implica que $x^O \in EF(C + \bar{C}D^*)$ ya que en caso contrario existiría un $y \in F$ tal que $(C + \bar{C}D^*)\, y \geq (C + \bar{C}D^*)\, x^O$ luego tomando $z = (C + \bar{C}D^*)(y - x)$, tendríamos que el par (y, z) sería una solucióm posible del programa con un valor de la función objetivo mayor que cero, lo cual es absurdo. Puesto que $x^O \in EF(C + \bar{C}D^*)$ para cualquier valor $d^* \varepsilon [-a, b]$ entonces $x^O \varepsilon$ EF.

El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para las soluciones débilmente eficientes.

TEOREMA. Sea e el vector unitario de dimensión apropiada y sea x^O una solución débilmente eficiente de (P1), entonces x^O pertenece a $\overline{EF}$ si y sólo si el valor de la función objetivo en el óptimo del programa

$$\max e^t z$$

$$\text{s.a. } (C + \bar{C}D)(x - x^O) - z \geq O$$
$$x \varepsilon F, z \geq O$$

es cero, para todo $d \in [-a, b]$.

La demostración de este teorema es análoga a la del anterior.

Considerando los programas duales, de estos problemas pueden enunciarse teoremas alternativos de eficiencia o débilmente eficiencia.

El problema,sería ahora resolver estos programas no lineales y en general no convexos, aunque para cada valor de d fijo del intervalo, estaríamos ante un programa lineal. Una técnica, muy extendida, que puede utilizarse para resolver estos programas no lineales es la técnica de relajación.

5. Conclusiones

En este trabajo, hemos considerado un programa lineal multiobjetivo (P1), a partir del cual y con un criterio específico de parametrización, hemos formado un nuevo programa lineal multiobjetivo (P2). El trabajo se ha centrado en determinar el campo de variación del parámetro de tal forma que toda solución eficiente o débilmente eficiente de (P1) lo sea también de (P2), suponiendo que no hay restricciones sobre el campo de variación del parámetro y en el caso de que este campo esté restringido a un intervalo, hemos determinado, el conjunto de soluciones eficientes y débilmente eficientes (P1) que permanecen en todo programa (P2).

Otras investigaciones pueden realizarse dentro de este campo, en particular notemos, que en la primera cuestión podría determinarse el campo de variación del parámetro para que los programas (P1) y (P2) tengan el mismo conjunto de solucines eficientes y débilmente eficientes; en la segunda cuestión, podría investigarse las condiciones que se han de verificar para que los conjuntos EF y $\overline{EF}$ sean vacíos o no, y en cualquiera de ellos, podría considerarse el estudio para programas enteros.

Bibliografía

ASHTON, D.J. and ATKINS, D.R., «Multicriteria Programming for Financial Planning: Some Second Thoughts». Multiple Criteria Analysis. (P. Nijkamp and J. Spronk, Eds.). Grower. England (1981) pp. 11-23.

BENSON, H.P., «Multiple Objective Linear Programming with Parametric Criteria Coefficients». Management Science, vol. 31, nº 4, April (1985), pp. 461-474.

BITRAN, G.R., «Linear Multiple Objective Problems with Interval Coefficients». Management Science, vol. 26, nº 7, July (1980), pp. 694-706.

BITRAN,G.R. and LAWRENCE, K.D., «Locating Service Facilities: A Multicriteria Approach». Omega, 8 (1980), pp. 201-206.

ECKER, J.G. and KOUADA, I.A., «Finding All Efficient Extreme Points for Multiple Objective Linear Programs». Mathematical Programming, vol. 14, nº 2, March (1978), pp. 249-261.

FRANKLIN, J., «Methods of Mathematical Economics». Springer-Verlag. New York (1980).

GAL, T., «Postefficient Sensitivity Analysis in Linear Vector-maximum Problems». Multiple Criteria Analysis (P. Nijkamp and J. Spronk, Eds.). Grower. England (1981), pp. 259-271.

HERNER, S. and SNAPPER, K.J., «Application of Multiple Criteria Utility Model to Evaluation of Information Systems». Journal American Society Information Science, 29 (1978), pp. 289-296.

SPRONK, J., «Capital Budgeting and Financial Planning with Multiple Goals». Multiple Criteria Analysis (P. Nijkamp and J. Spronk, Eds.). Grower. England (1981), pp. 25-36.

ZIONTS, S. and DESHPANDE, D., «Energy Planning Using a Multiple Criteria Decision Method». Multiple Criteria Analysis (P. Nijkamp and J. Spronk, Eds.). Grower. England (1981) pp. 153-162.

YU, P.L. and ZELENY, M., «The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method». Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 49 (1975), pp. 430-468.