POLITICAS OPTIMAS DE PRODUCCION Y PUBLICIDAD

Caballero Fernández, R.
Castrodeza Chamorro, M.C.
Gómez Núñez, T.

RESUMEN.—El propósito de este trabajo es mostrar cómo conseguir, para una empresa, determinar su política conjunta de producción y publicidad. El objetivo es maximizar el valor actual del beneficio a lo largo del período infinito de decisión, sujeto a diversas restricciones. Las variables de estado son: nivel de inventario (I(t)) y tasa de ventas (S(t)) y tasa de producción (P(t)). Utilizando la Teoría del Control Optimo obtenemos los controles optimales.
Utilizando las técnicas de estabilidad empleadas por Dockner, tenemos garantizada estabilidad condicional.

1. Introducción

Los planes de producción y la estrategia de marketing son a menudo optimizados independientemente, tomándose las decisiones de un sector como datos fijos y conocidos para el otro. Sin embargo, hemos de tener en cuenta que la política publicitaria pretende generar demanda para los productos de la empresa en cuestión, mientras que la de producción se concibe para alcanzar dicha demanda.

Por otra parte, la incorporación de la estrategia publicitaria en la planificación de la producción puede reducir costes globales e incrementar los beneficios significativamente. Esfuerzos de promoción del producto durante períodos de ventas escasas puede cambiarlos a períodos en auge, con lo que se suavizan las fluctuaciones estacionales en producción. En relación con ello parece haber un nivel mínimo requerido antes de que el esfuerzo tenga cualquier efecto y un nivel donde ocurre una saturación. La evidencia también nos indica que el efecto publicitario es acumulativo y que su influencia residual declinará con el tiempo a menos que el esfuerzo sea continuado. Recientemente, los modelos elaborados ya incorporan la interdependencia entre ambas áreas.

En el presente trabajo se pretende determinar simultáneamente las políticas óptimas de producción y publicidad mediante el empleo de las técnicas de control óptimo.

En el área de marketing, revisando los modelos más utilizados nos hemos encontrado con que existen básicamente dos grandes lineas:

a) Una debida a Nerlove-Arrow que trata la determinación simultánea de las políticas de precio y publicidad. Se basa en el hecho de que los gastos en publicidad de una empresa afectan a sus ventas presentes y futuras y, por tanto, puede considerarse como una inversión que constituye una especie de capital publicitario denominado usualmente «good-will».

b) Otra debida a Vidale-Wolfe que será la que utilizaremos para recoger la respuesta de las ventas al esfuerzo publicitario. Suponen que la valoración de las ventas de un producto depende de:

1. La respuesta a la publicidad que afecta a la proporción de clientes potenciales.
2. Pérdida debida al olvido que actúa sobre los clientes con que ya cuenta la empresa.

En el área de producción, el principal ejemplo de un modelo de planificación de producción e inventario considerado desde un punto de vista general (más amplio que el HMMS y sus extensiones) es, en tiempo discreto, la versión de Kleindorfer y cols. (1975), en la que proponen y desarrollan un modelo general (KKTK) que admite a la mayoría de los demás como casos particulares del mismo. La versión en tiempo continuo fue llevada a cabo por Bensoussan-Hurst-Naslünd (1974).

Sin embargo, en el modelo integrado que nos ocupa, al pretender generalizar los resultados del profesor Abad (1982) y estudiar la estabilidad del mismo mediante los criterios expresados por Dockner, abordaremos el área de producción mediante funciones de coste genéricas. Su evolución temporal es recogida por la ecuación del movimiento común a todos los modelos de producción e inventario.

2. Especificación del modelo

Consideremos una empresa que produce un bien homogéneo con el objeto de satisfacer la demanda del mercado, la cual se estimula por otra parte, a través de la política publicitaria.

Nuestro objetivo será determinar en cada instante del tiempo una tasa de producción y de gastos en publicidad de tal forma que el valor actual del beneficio acumulado sea máximo.

En consecuencia, nuestro funcional objetivo es:

$$\underset{(P.U)}{\text{Max}} \int_0^{\infty} e^{-rt} \{S - [h(I(t)) + C(P(t)) + K(P\text{-}P_o)^2 + U(t))]\} \, dt \qquad (1)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$\dot{I}(t) = P(t) - S(t)/z. \qquad I(O) = I_0 \qquad (2)$
$\dot{S}(t) = aU(t)(1\text{-}S/M) - \sigma S \qquad S(O) = S_0 \qquad (3)$
$O \le U(t) \le \overline{U} \qquad (4)$
$O \le S(t) \le M \qquad (5)$
$P(t) \ge O \qquad (6)$
$I(t) \ge O \qquad (7)$

Donde denotamos:

$I(t)$: nivel de inventario en el instante t.
$P(t)$: tasa de producción en el instante t.
$S(t)$: tasa de ventas en el instante t.
$U(t)$: gastos de publicidad en el instante t.
σ: tasa de disminución constante de las ventas.
a: tasa constante de respuesta a la publicidad.
M: nivel de saturación del mercado para el producto.
$\overline{U}$: nivel máximo de los gastos publicitarios que la empresa puede mantener.
r: factor de actualización, $r \ge O$.
k: coste unitario de desviación del nivel de producción respecto al deseado.
P_0: nivel de producción deseado.
z: precio constante de venta.
$h(I(t)$: función que recoge el coste de inventario en el instante t. Diferenciable para todo t. Creciente y convexa.
$C(P(t))$: coste de producción en el instante t. Dos veces diferenciable y convexa.

La ecuación (2) es la identidad producción-inventario. Nos indica que la variación del nivel de inventario es igual a la diferencia entre la producción y lo que se vende.

La ecuación (3) debida a Vidale-Wolfe (1957), nos muestra que la variación de la tasa de ventas, $\dot{S}$, es proporcional a la intensidad del esfuerzo publicitario, U, a la fracción de clientes potenciales (1-S/M), menos el número de clientes que se pierden debido al olvido, σS.

Por tanto, nuestro modelo, en tiempo continuo, posee dos variables de estado: las tasas de inventario, I(t), y de demanda, S(t), y dos variables de control: la producción, P(t), y los gastos en publicidad, U(t).

Su resolución la abordaremos mediante el Principio del Máximo de Pontryagin para modelos en tiempo continuo donde las variables de estado poseen restricciones «puras», es decir, no aparece en ellas ninguna de las variables de control. Sethi y Thompson (1981). Pitchford y Turnovsky (1977).

3. Condiciones necesarias para el óptimo

Como consecuencia del Principio del Máximo se obtienen dos grandes bloques de condiciones. Uno de ellos, las ecuaciones principales, que forman un sistema de ecuaciones diferenciales que incluye las que muestran el movimiento del sistema y las que rigen el comportamiento de las variables de coestado asociadas a aquellas.

El otro bloque viene marcado por la maximización de la función Hamiltoniana dentro del conjunto de trayectorias de control y de estado, el cual se encuentra definido a partir de las restricciones del problema.

En nuestro caso en concreto tendremos que el problema de optimización será maximizar respecto de las variables de control, P, U, la función:

$$H(I, S, w_1, w_2, P, U,) = S - h(I) - C(P) - k(P\text{-}P_0)^2 - U(t) + w1(t)\,[P(t) - S(t)/z] + w_2(t)\,[aU(1\text{-}S/M) - sS] \qquad (8)$$

Sujeta a:

$$O \leq U(t) \leq \overline{U}$$
$$O \leq S(t) \leq M$$
$$P(t) \geq O$$

$$au(1\text{-}S/M) - \sigma S \geq O \qquad \text{siempre que} \quad S(t) = O$$
$$-au(1\text{-}S/M) + \sigma S \geq O \qquad \text{siempre que} \quad S(t) = M$$
$$-(P(t) - S(t)/z) \leq O \qquad \text{siempre que} \quad I(t) = O$$

Estas tres últimas restricciones que no aparecen explícitamente en el modelo son debidas a las restricciones sobre las variables de estado, asegurándonos que las trayectorias serán admisibles.

En (8), w_1 y w_2 son las variables adjuntas asociadas a las restricciones (2) y (3) indicándonos, respectivamente, la contribución marginal, en unidades monetarias corrientes, al beneficio óptimo de la empresa debido a una pequeña variación en los niveles de inventario y ventas en el instante t.

Para la resolución de este problema tendremos que definir la función Lagrangiana:

$$L(I, S, w_1, w_2, P, U, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = H - \alpha_1 P + \alpha_2 [U(t) - \overline{U}] - \alpha_3 U(t) + (\beta_2 - \beta_1)\,[aU(1\text{-}S/M) - \sigma S] - \beta_3 [P(t) - S(t)/z]. \qquad (9)$$

donde los α_i (i= 1, 2, 3) y los β_j (j= 1, 2, 3) son los multiplicadores de Lagrange asociados a cada una de las restricciones.

De otra parte tenemos el bloque de las ecuaciones principales:

$$\dot{w}_1 = rw_1 + h'_I \qquad (10)$$
$$\dot{w}_2 = rw_2 - 1 + w_1/z + w_2(aU/M + \sigma) + (\beta_2 - \beta_1)(aU/M + \sigma) - \beta_3/z \qquad (11)$$

junto con (2) y (3)

En consecuencia, nuestro problema se reduce a encontrar las trayectorias de estado y control que satisfagan las siguientes condiciones necesarias:

A partir de la maximización de la hamiltoniana:

$$O = -C'_P - 2k(P-P_O) + w_1 - \alpha_1 - \beta_3 \tag{12}$$
$$O = -1 + w_2 a(1\text{-}S/M) + \alpha_2 - \alpha_3 + (\beta_2 - \beta_1)\, a(1\text{-}S/M) \tag{13}$$

Las condiciones de holgura complementaria:

$$\alpha_1 P = O \tag{14}$$
$$\alpha_2 (U(t) - \overline{U}) = O \tag{15}$$
$$\alpha_3 U(t) = O \tag{16}$$

Debido a las restricciones que existen sobre las variables de estado, tenemos:

$$\beta_1 \geq 0 \qquad \beta_1 (aU(1\text{-}S/M) - \sigma S) = O \quad \text{y} \quad \beta_1 S = O \tag{17}$$
$$\beta_2 \geq 0 \qquad \beta_2 (aU(1/SM) - \sigma S) = O \quad \text{y} \quad \beta_2 (S\text{-}M) = O \tag{18}$$
$$\beta_3 \geq 0 \qquad \beta_3 (P(t) - S(t)/z) = O \quad \text{y} \quad \beta_3 I = O \tag{19}$$

y las ecuaciones (2), (3), (10) y (11).

4. Caracterización de las trayectorias óptimas

Analizando el hamiltoniano se observa que es lineal respecto de la variable U, gastos publicitarios. Ello implica que el problema bajo consideración es parcialmente singular.

A partir de lo cual y de la restricción (4) llegamos a:

$$U(t) = \begin{cases} \overline{U} & \text{si} \quad H_u > O \\ U^* & \text{si} \quad H_u = O \\ O & \text{si} \quad H_u < O \end{cases} \tag{20}$$

donde U^* denota la tasa singular de publicidad, que determinaremos posteriormente.

Por tanto, el camino optimal será una combinación de subarcos singulares (a lo largo de los cuales H_u se anula) y subarcos no singulares (a lo largo de los cuales H_u es estrictamente positiva o negativa).

Para caracterizar las trayectorias óptimas dividiremos nuestro estudio en dos partes, primero analizaremos el interior y luego la frontera de cada uno de los conjuntos de oportunidades.

Vamos a examinar primero las condiciones necesarias en el interior, es decir:

$$O < U(t) < \overline{U}, \qquad P(t) > O, \qquad O < S(t) < M \quad \text{, e} \qquad I(t) > O.$$

Ello implica:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

por (14), (15), (16), (17), (18), y (19).

Bajo estas condiciones, las ecuaciones canónicas son:

$$\dot{w}_1 = rw_1 + h'_I \tag{10.a}$$
$$\dot{w}_2 = rw_2 - 1 + w_1/z + w_2\,(aU/M + \sigma) \tag{11.a}$$
$$O = -C'_P - 2k\,(P-P_0) + w_1 \tag{12.a}$$
$$O = -1 + w_2\, a(1\text{-}S/M) \tag{13.a}$$

A partir de (12.a) obtenemos $P^* = P(w_1)$ y de (13.a):

$$w_2^* = \frac{1}{a(1\text{-}S/M)} \tag{21}$$

Indicándonos que la contribución marginal al beneficio óptimo, consecuencia de una variación exógena de las ventas de la empresa, es inversamente proporcional al efecto que una unidad de gasto publicitario origina sobre la parte de mercado que desconoce el producto.

Derivando (13.a),sustituyendo w_2 de (21), $\dot{S}$ de (3) y teniendo en cuenta (11.a), podemos despejar w_1 :

$$w_1{}^* = z\left[1 - \frac{\sigma}{a(1\text{-}S/M)^2} - \frac{r}{a(1\text{-}S/M)}\right] \tag{22}$$

De lo que se desprende que a medida que disminuye el efecto que una unidad de gasto publicitario origina sobre el sector de mercado que desconoce el producto, la contribución marginal al beneficio óptimo de la empresa, derivado de una variación exógena en el nivel de inventario, disminuye.

Derivando dos veces (13.a) y sustituyendo (3) obtenemos la tasa singular de publicidad:

$$U^* = \frac{r\left[1\text{-}w_1/z - rw_2 - \dfrac{2\sigma w_2}{(1\text{-}S/M)}\right]}{a/M\,(1\text{-}w_1/z + \sigma\, w_2/(1\text{-}S/M))} +$$

$$+ \frac{\sigma\,(1+S/M)\left[1 - w_1/z - \dfrac{\sigma w_2}{(1+S/M)}\right]}{[a\,(1\text{-}S/M)]/M\,[1 - w_1/z + \sigma\, w_2/(1\text{-}S/M)]} -$$

$$- \frac{(rw_1 + h'_I)\, M}{az\,(1-w_1/z + w_2/(1-S/M)} \tag{23}$$

Sustituyendo los valores de w^*_1 y w^*_2

$$U^* = \frac{[\sigma + r\,(1-S/M)][\sigma S + Mr\,(1-S/M)] + \sigma^2 S}{a\,(1-S/M)\,[2\,\sigma + r\,(1-S/M)]} - \tag{24}$$

$$- \frac{M\,(1-S/M)^2\,(rz + h'_I)}{z[2\,\sigma + r\,(1-S/M)]}$$

Por consiguiente (3) se convierte en:

$$\dot{S} = \frac{Mr\,(1-S/M)\,[\sigma + r(1-S/M)]}{[2\sigma + r\,(1-S/M)} - \frac{M(1-S/M)^3\, a(rz + h'_I)}{z\,[2\sigma + r\,(1-S/M]} \tag{3.a}$$

A partir de esta expresión podemos obtener el valor de S*. Posteriormente, sustituyendo éste y P* en (2), determinaríamos I*.

Se puede comprobar que se verifica la condición de Legendre Clesbch generalizada para arcos singulares (Sethi y Thompson (1981)).

Las condiciones necesarias ya vistas son también suficientes ya que se verifican:

(i) Las condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty 1} e\text{-}rt\, w_1\,(t)\,[\bar{I}(t) - I(t)] \geq O \text{ y } \lim_{t \to \infty} e^{-rt}\, w_2\,(t)\,[\bar{S}(t) - S(t)] \geq 0$$

siendo $\bar{I}(t)$ y $\bar{S}(t)$ cualesquiera otras trayectorias factibles.

(ii) $\quad H^0\,(I, S, w_1, w_2) = \max_{(P.U)} H\,(I, S, w_1, w_2, P, U)$

es cóncavo en las variables de estado (I, S).

A partir de estas condiciones suficientes tenemos asegurado que la trayectoria convergente al equilibrio es una solución óptima (Arrow y Kurz, (1970)).

Puesto que el modelo desarrollado puede ser descompuesto en dos submodelos, uno relativo al subsistema de producción y otro al de marketing, teniendo este último una estructura semejante al estudiado por Sethi y Thompson (1981), podemos apoyarnos en estos autores para suponer que la trayectoria óptima de publicidad, si $S_0 > S^*$ ($S_0 < S^*$), comenzará siendo no singular $\underline{U}^* = O$ ($U^* = \bar{U}$), hasta que las ventas alcancen el óptimo, a partir de ahí $U^* = \bar{U}$.

5. Análisis de la estabilidad del modelo

El estudio de la estabilidad del modelo que nos ocupa no se puede realizar mediante la técnica usual, cual es la de los planos de fase. La razón de ello es que en este caso contamos con un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales, dos correspondientes a las variables de estado, variación en las tasa de inventario y ventas, y otras dos relativas a la variación de las variables de coestado asociadas a éstas respectivamente w_1 y w_2.

Por ello este análisis sería bastante complejo si no contáramos con los resultados obtenidos por Dockner (1984).

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del modelo:

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= rw_1 + h'_I \\
\dot{w}_2 &= rw_2 - 1 + w_1/z + w_2\left(\frac{aU}{M} + \sigma\right) \\
\dot{I} &= P - S/z \\
\dot{S} &= \frac{Mr\,(1-S/M)[\,\sigma + r(1-S/M)]}{[2\,\sigma + r\,(1-S/M)]} - \frac{M\,(1-S/M)^3\,a(rz + h'_I)}{z[2\sigma + r\,(1-S/M)]}
\end{aligned} \tag{26}$$

El punto de equilibrio de (26), I^∞, S^∞, $w_1{}^\infty$, $w_2{}^\infty$, se podrá obtener igualando las expresiones anteriores a cero, previa sustitución de los resultados de maximizar la Hamiltoniana.

Esta política constituye el óptimo a largo plazo para la empresa.

A partir de (26)

$$J\,(I^\infty, S^\infty, w^\infty{}_{1.}\,w^\infty{}_2) = \begin{pmatrix} O & -1/z & P,^*w_1 & O \\ -kh''_{II} & O & O & O \\ h''_{II} & O & r & O \\ O & O & 1/z & r + (aU/M) + \sigma \end{pmatrix}$$

donde

$$k = \frac{Ma(1-S/M)^3}{z\,[2\sigma + r(1-S/M)]}$$

De acuerdo con (12.a) y las condiciones impuestas a las funciones de coste, es fácil comprobar que det J < O

Según Dockner (1984), si det J < O, uno de los valores propios de (26) tiene parte real negativa y los tres restantes tienen parte real positiva. Existe estabilidad condicional, en el sentido de que si las condiciones iniciales están sobre la variedad estable, la trayectoria óptima convergerá al estado de equilibrio.

6. Análisis de los puntos frontera

A. Supongamos que $O < U(t) < \overline{U}, P(t) > O, e\ I(t) > O$.

1. $S(t) = M$

En virtud de (14), (15), (16), (17), (18) y (19):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = O,\ \beta_1 = \beta_3 = O,\ \beta_2 \geq O \text{ y } S \geq O$$

En tal caso $L'_U = -1 \neq O$. Por tanto no existe óptimo en el interior del conjunto de oportunidades y $U^*(t) = O$

Sustituyendo en (3) tenemos que $\dot{S}(t) < O$

Todo ello nos indica que una vez alcanzado el tope del mercado, el óptimo sería no invertir en publicidad y seguidamente nuestras ventas empezarían a descender. Con ello entraríamos de nuevo en el interior del conjunto.

2. Supongamos que $S(t) = O$

Por (14), (15), (16), (17), (18) y (19):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1 = O, \beta_2 = \beta_3 = O, \beta_1 \geq O \text{ y } S \geq O$$

Sustituyendo en (3), $\dot{S} > O$ si $\overline{U} > O$ y $\dot{S} = O$ si $U = O$; es decir, si invertimos en publicidad, nuestras ventas comenzarán a crecer, abandonando, por tanto la frontera y si no lo hacemos nuestras ventas seguirán siendo nulas.

B. Consideremos $O < U(t) < \overline{U}, 1 < S(t) < M, P(t) > O$ e $I(t) = O$ durante algún período de tiempo.

En esta situación $P(t) = S(t)/z$ y las condiciones necesarias para determinar las trayectorias óptimas son (3.a), (25), (23), (21) y las condiciones de salto.

C. Por último, supongamos $O < U(t) < \overline{U}, P(t) = O, O < S(t) < M$ e $I(t) \geq \overline{O}$.

Por (14), (15), (16), (17), (18) y (19):

$$\alpha_1 \geq O, \alpha_2 = \alpha_3 = O, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = O$$

Sustituyendo en (2), $\dot{I} = -S/z$ y las condiciones necesarias para determinar las trayectorias óptimas son (3.a), (25), (23) y (21).

Conclusiones

Hemos abordado el problema de encontrar una política óptima de producción y publicidad de manera simultánea, mediante la aplicación de las técnicas de control óptimo a un modelo global que recoge ambos subsistemas empresariales.

Se trata de un modelo con dos variables de estado y dos de control. Por consiguiente, el sistema que rige su evolución temporal está formado por cuatro ecuaciones. Esta es la razón por la que el estudio de su estabilidad no se pueda realizar de forma tradicional, cual es la de los planos de fase, sino que lo realizamos aplicando los resultados obtenidos por Dockner (1984).

A partir de ellos tenemos garantizada la estabilidad condicional, en el sentido de que si los valores iniciales de las variables de estado están sobre la variedad que converge al equilibrio, nuestro modelo es estable.

Asimismo, hemos realizado un estudio para los puntos fronteras del conjunto de oportunidades del modelo considerado.

Bibliografía

ABAD, P.L. «An Optimal Control Approach To Marketing Production Planning». Optimal Control Applications and Methods, vol. 3, pp. 1-14, 1982.

ARROW, K.J. and KURZ, M. Public Investment. The Rate of Return and Optimal Fiscal Policy. The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1970.

BELL, D.J. «Singular Problems in Optimal Control a Survey». International Journal Control, vol. 21, pp. 319-331, 1975.

BENSOUSSAN, A., HURST, E.G. and NASLUND, B. Management Applic. of Modern Control Theory. Ed. North-Holland. New York, 1974.

DOCKNER, E. «Local Stability Analysis Control Problems with Two State Variables». Editado por Feichtinger, G. en Optimal Control Theory and Economic Analysis 2. Ed. North-Holland, New York, 1984.

KLEINDORFER, KRIEBEL, THOMPSON and KLEINDORFER. «Discrete Optimal Control of Production Plans». Management Science. vol. 22, pp. 261-273, 1975.

PITCHFORD, J.D. and TURNOVSKY, S.T. Applications of Control Theory to Economic Analysis. Ed. North-Holland, New York, 1977.

PONTRYAGIN, L.S. y otros. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Ed. John Wiley and Sons. New York, 1962.

SETHI, S.P. and THOMPSON, G.L. Optimal Control Theory. Ed. Martinus Nijhoff. Boston 1981.

VIDALE, M.L. and WOLFE, H.B. «An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising». Operations Research. vol. 5, pp. 370-381, 1957.