CALCULO DEL T.A.E PARA PRESTAMOS AMORTIZABLES CON CUOTAS PERIODICAS CONSTANTES Y EN PROGRESION GEOMETRICA.

Alfredo García Güemes

RESUMEN.— En este artículo, se presenta un algoritmo que calcula el T.A.E. para préstamos amortizables con cuotas periódicas constantes y en progresión geométrica. Asimismo, se evalúa el error permisible de forma que se satisfaga la normativa legal vigente. Finalmente se hacen algunas consideraciones sobre la influencia de las comisiones en el tipo de interés efectivo de la operación.

1. Introducción

La norma séptima de la Circular nº 15/1988 de 5 de diciembre del Banco de España, lleva por título «Coste y producto efectivo de las operaciones». Comienza indicando los casos en que es obligatorio expresar: «el coste o producto efectivo equivalente al de una operación con intereses anuales pospagables», concretando más adelante «En el cálculo del coste efectivo se tendrán en cuenta las comisiones y demás gastos cuyo devengo sea a favor de la entidad...».

Las operaciones en que las Entidades de Crédito, deben de reflejar el T.A.E, aparecen en la Circular nº 8/1990 de 7 de septiembre y que no se transcribirán aquí, por motivo de espacio.

Los problemas que plantea a las entidades de crédito, tener que calcular el T.A.E. para tan gran número de operaciones no es trivial. Deben de disponer de algoritmos lo suficientemente rápidos para calcular el T.A.E. con un error inferior a 10^{-4}.

En este artículo consideramos la concesión de préstamos a clientes por parte de una entidad, utilizando la siguiente notación: N nominal; i tanto nominal anual; k número de pagos anuales; n años de duración del préstamo; C_1, C_2,..., C_{kn}, pagos periódicos; R comisión en pesetas.

Para calcular el T.A.E., tendremos que calcular i_k, en la siguiente expresión:

$$N - R = \sum_{j=1}^{kn} C_j \left(1+i_k\right)^{k} - 1$$

y posteriormente.

$$T.A.E. \approx \left(1+i_k\right)^{k} - 1$$

Como puede observarse, el cálculo de i_k exige calcular la raíz de un polinomio de grado kn[1].

Utilizando el método de Newton, haciendo $z = (1+i_k)^{-1}$ queda

$$P(z) = -(N - R) + \sum_{j=1}^{kn} C_j z^j$$

Comenzando con el valor $z=z_0$:

$$z_1 = z_0 - \frac{P(z_0)}{P'(z_0)}$$

....

$$z_{r+1} = z_r - \frac{P(z_r)}{P'(z_r)}$$

hasta alcanzar la aproximación deseada en que se hace:

$$T.A.E. \approx z_s^{-k} - 1$$

La convergencia de este algoritmo es cuadrática y naturalmente se llegará a la solución con menor número de iteraciones, cuanto más próximo sea z_0 a la verdadera raíz.

2. Cuotas periódicas constantes

Consideremos que el préstamo a que se hacía referencia anteriormente, debe de ser devuelto mediante cuotas periódicas constantes.

El pago a realizar cada k-ésimo de año será:

$$C_j = a = N \frac{i/k}{1 - (1+i/k)^{-kn}}$$

siendo ahora el polinomio a resolver, haciendo $D = N - R$:

$$P(z) = -D + \sum_{j=1}^{kn} az^j$$

Teniendo en cuenta que el sumatorio es la suma de los términos de una progresión geométrica y multiplicando el resultado por $1 - z$:

$$P_1(z) = -D + z(a+D) - az^{kn+1}$$

Utilizando el método de Newton para calcular la raíz real de $P_1(z)$, tomando como primer valor $z_0 = (1 + i/k)^{-1}$:

a) calcular el cociente: $$d_0 = \frac{P_1(z_0)}{P_1'(z_0)}$$

b) hacemos $z_1 = z_0 - d_0$

c) si d_0, es lo suficientemente pequeño, entonces:

$$T.A.E. \approx \left(\frac{1}{z_1}\right)^k - 1$$

[1] Se demuestra fácilmente que este polinomio tiene una única raíz positiva.

Si no lo es, pasar al punto a) calculando d_1.

En las pruebas realizadas, nunca se han necesitado más de dos iteraciones; por tanto el número máximo de operaciones a realizar serán:

Algoritmo: 12 sumas, 8 productos, 4 potencias y dos cocientes.

Prueba y cálculo del T.A.E.: 2 sumas, 2 cocientes y 2 potencias.

Cálculo de a: 2 sumas, 2 cocientes, 1 producto y 1 potencia.

Utilizando el método general, para dos iteraciones el número de operaciones a realizar serían:

Las mismas, para la prueba, valor de T.A.E. y valor de a.

Algoritmo: $(4kn+4)$ sumas, $(6kn-4)$ productos, $(4kn-2)$ potencias y 2 cocientes.

Como puede observarse, el ahorro de operaciones es considerable. Téngase presente que valores de kn superiores a 20 son los más frecuentes.

Evaluación del error

Para conocer el número de iteraciones que es preciso realizar para obtener el valor del T.A.E. con la aproximación exigida (10^{-4}), procederemos como sigue.

Sabemos que TAE$(z) = z^{-k} - 1$ y que TAE(z^*)-TAE$(z_s) < 10^{-4}$, siendo z^* el valor de z que proporciona el verdadero valor del T.A.E.

Sea $d_s = z^* - z_s$.

Para calcular el valor máximo de d_s, desarrollamos en serie la función TAE(z_s) en el punto z^*, obteniéndose:

$$TAE(z_s) - TAE(z^*) \approx -TAE'(z^*)d_s = k\, z_s^{-k-1} d_s$$

y por tanto:

$$d_s| < \frac{10^{-4}}{kz^{*-(k+1)}}$$

Consideremos la función:

$$g(z_s) = z_s - \frac{P(z_s)}{P'(z_s)}$$

que satisface las siguientes relaciones:

$$g(z^*) = z^*; \qquad g'(z^*) = 0; \qquad g(z^*) - g(z_{s-1}) = d_s;$$

Por tanto desarrollando en serie $g(z_{s-1})$ en z^*, se tiene:

$$d_s \approx \frac{1}{2} g''(z^*) d_{s-1}^2 \quad \text{donde} \quad g''(z^*) = \frac{P''(z^*)}{P'(z^*)}$$

Como quiera que se va a considerar el valor de z_s, como aproximación del valor z^*, tendremos que calcular el máximo valor permisible de d_{s-1}, que vendrá dado por la expresión:

$$d_{s-1} = \sqrt{\frac{2d_s}{g''(z^*)}}$$

Por tanto, para obtener los valores de d_{s-1}, es preciso conocer previamente los valores de d_s y de z^*.

En las pruebas realizadas, se ha observado que la cuantía de la comisión, estando esta entre el 0,001 y 0,01 del nominal, no afecta al valor de d_{s-1}. A continuación, presentamos los valores que se obtienen para z^*, d_s y d_{s-1}, para distintos valores de tipo de interés, frecuencia de amortización y duración del préstamo.

Interés 10%; $n = 1$;

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 12$
z^*	0,9	0,945965	0,971642	0,990166
d_s	0,000082	0,000041	0,000021	0,000007
d_{s-1}	0,0028	0,0015	0,0008	0,0003

Interés 20%; $n = 1$;

z^*	0,824998	0,902917	0,948458	0,982035
d_s	0,000068	0,000036	0,000019	0,000006
d_{s-1}	0,0034	0,0019	0,0010	0,0003

Interés 10%; $n = 5$;

z^*	0,905841	0,950503	0,974595	0,991379
d_s	0,000082	0,000042	0,000022	0,000007
d_{s-1}	0,0029	0,0016	0,0008	0,0003

Interés 20%; $n = 5$;

z^*	0,830163	0,907156	0,951304	0,983220
d_s	0,000069	0,000037	0,000019	0,000007
d_{s-1}	0,0039	0,0022	0,0011	0,0004

Interés 10%; $n = 20$;

z^*	0,907871	0,951713	0,975260	0,991615
d_s	0,000082	0,000043	0,000022	0,000007
d_{s-1}	0,0039	0,0021	0,0011	0,0004

Interés 20%; $n = 20$;

z^*	0,831797	0,908183	0,951884	0,983430
d_s	0,000069	0,000037	0,000019	0,000007
d_{s-1}	0,0076	0,0044	0,0023	0,0008

Como puede observarse el valor máximo permitido para d_{s-1}, aumenta con la duración del préstamo y con el tipo de interés, pero fundamentalmente, con la periodicidad de los pagos.

El cociente d_s/d_{s-1}, nos indica la velocidad de convergencia del algoritmo. Este cociente toma valores entre 35 y 114. La velocidad de convergencia, aumenta al aumentar k, pero fundamentalmente al aumentar el tipo de interés y la duración del préstamo.

Establecer los criterios a seguir, para dar por finalizadas las iteraciones, ya es cuestión del programador. Por motivos de sencillez consideraremos como valor máximo de d_{s-1}, 0,0003, aún cuando somos conscientes de que en la mayoría de los casos es excesivo.

Aportaciones extraordinarias

El problema se complica cuando se efectúan aportaciones extraordinarias de cuantías P_1, P_2,..., P_r, pesetas en los momentos t_1, t_2,..., t_r. Cada vez que se efectúa una de estas operaciones, es preciso recalcular el T.A.E. con los datos disponibles. Sea T.A.E.$_0$ su valor en el momento inicial, T.A.E.$_1$, tras la primera aportación extraordinaria,... Consideraremos, que el prestatario decide continuar con el mismo tipo de amortización; es decir, se calcula la deuda en ese momento y se amortiza mediante las nuevas cuotas periódicas iguales.

Designemos por a_1, el término amortizativo constante hasta t_1; por a_2 el término entre t_1+1 y t_2,...

$$a_1 = \frac{N}{a_{\overline{kn}|\frac{i}{k}}} \; ; \; a_2 = a_1 - \frac{P_1}{a_{\overline{kn-t_1}|\frac{i}{k}}} \; ; \; a_3 = a_2 - \frac{P_2}{a_{\overline{kn-t_2}|\frac{i}{k}}} \; ; \; \ldots$$

El valor de T.A.E.$_1$ se obtiene al igual que antes, resolviendo:

$$-D + \sum_{j=1}^{t_1} a_1 z^j + P_1 z^{t_1} + \sum_{j=t_1+1}^{kn} a_2 z^j = 0$$

Utilizando el método de Newton, haciendo previamente las transformaciones ya conocidas, el valor de d_0 será:

$$d_0 = \frac{-D + z_0\left(a_1+D\right) + P_1\, z_0^{t_1} + z_0^{t_1+1}\left(a_2-P_1-a_1\right) - a_2\, z_0^{kn+1}}{\left(a_1+D\right) + t_1 p_1\, z_0^{t_1-1} + \left(t_1+1\right) z_0^{t_1}\left(a_2-P_1-a_1\right) - \left(kn+1\right) a_2\; z_0^{kn}}$$

Como quiera que el valor de T.A.E.$_1$, será algo mayor que el de T.A.E.$_0$, tomaremos como valor inicial z para calcular T.A.E.$_1$ el valor final z_s obtenido en el cálculo de T.A.E.$_0$

Excepto para casos bastante infrecuentes, como un pago muy importante al poco tiempo de haber sido formalizado el préstamo, sólo ha sido precisa una iteración para calcular el T.A.E. con una exactitud incluso superior a la exigida.

El número de operaciones a realizar para el cálculo de T.A.E.$_1$, será:

Algoritmo: 11 sumas, 10 productos, 6 potencias y 1 cociente.

Prueba y cálculo de T.A.E.$_1$: 1 suma, 1 cociente y 1 potencia.

Cálculo de a_2: 3 sumas, 2 cocientes, 1 producto y 1 potencia.

Consideremos el caso general, en que se realizan r pagos extraordinarios, de cuantía P_j, en los momentos t_j. (j=1,...s).

Realizando las operaciones ya conocidas se obtiene:

$$d_0 = \frac{\sum_{j=0}^{r}\left[z_0^{t_j} P_j\left(1-z_0\right) + a_{j+1} z_0\left(1 - z_0^{t_{j+1}-t_j}\right)\right]}{\sum_{j=0}^{r}\left[P_j\, z_0^{t_j-1}\left(t_j-z_0-t_j z_0\right) + a_{j+1}\left[1 - \left(1+t_{j+1}-t_j\right) z_0^{t_{j+1}-t_j}\right]\right]}$$

Donde: $P_0 = -D$; $t_{r+1} = kn$; $t_0 = 0$.

Naturalmente, al ir aumentando el número de aportaciones extraordinarias, la eficacia del algoritmo va disminuyendo, si bien es siempre más rápido que el método general.

Dos aclaraciones

a) Cuando los pagos intermedios se efectúan entre dos vencimientos, la expresión anterior que calcula el valor de d_0, se transforma en:

$$d_0 = \frac{\sum_{j=0}^{r} z_0^{t_j^*} P_j \left(1-z_0\right) + \sum_{j=0}^{r} a_{j+1}\left(z_0^{t_{j+1}} - z_0^{t_{j+1}+1}\right)}{\sum_{j=0}^{r} P_j\, z_0^{t_j^*-1}\left(t_j^* - z_0 - t_j^* z_0\right) + \sum_{j=0}^{r} a_{j+1}\left[\left(t_j+1\right) z_0^{t_j} - \left(t_{j+1}+1\right) z_0^{t_{j+1}}\right]}$$

Donde los valores de t^*, son los momentos en que se efectúan los pagos intermedios. Si alguno no coincide con un vencimiento, será un número fraccionario. Si coincide, será igual al t_j correspondiente.

b) Un atraso en el pago de un vencimiento, podemos considerarlo como una aportación extraordinaria negativa. Ahora bien, tendremos que añadir a dicha cantidad, a efectos del resto de los cálculos, los intereses por demora que cargan las entidades de crédito, cuando se produce esta circunstancia.

Un ejemplo

Sea un préstamo amortizable con cuotas periódicas constantes, con términos trimestrales; tipo de interés anual 16%; comisión 0,6% sobre el nominal; duración 6 años; nominal 1.000.000 pesetas.

En estas condiciones:

$a_1 = 65.586{,}83$ ptas.
T.A.E.$_0 \approx 17{,}2509\%$

Consideremos que en el momento de efectuar el octavo pago, se hace una aportación extraordinaria de 200.00 ptas.

$a_2 = 48.422{,}83$ ptas.
T.A.E.$_1 \approx 17{,}2822\%$

Finalmente, en el momento de efectuar el vigésimo pago, se hace una nueva aportación de 100.000 ptas.

$a_3 = 20.873{,}76$ ptas.
T.A.E.$_2 \approx 17{,}2856\%$

El valor de T.A.E.$_0$ se ha calculado tras dos iteraciones. El resto en una iteración.

Una observación que surge de este ejemplo es el hecho de que no sería preciso calcular el valor de T.A.E.$_2$, ya que para la exactitud requerida, coincide con el valor de T.A.E.$_1$ Sin embargo, es preciso hacer una iteración ya que a priori no sabemos si se va a producir esta circunstancia.

3. Cuotas periódicas variables en progresión geométrica

Las entidades de crédito, aún cuando sean menos conocidos por el público, también ofrece este tipo de producto. En general va destinado a aquellos clientes que desean que su «esfuerzo» a la hora de pagar las cuotas, sea similar a lo largo de la duración del préstamo. Por tanto, la razón de la progresión geométrica será mayor que uno, aproximadamente, lo que piense el prestatario que en el futuro van a verse incrementados sus ingresos en términos monetarios.

En cualquier caso, el algoritmo que se presenta, es utilizable también para razones inferiores a uno.

En este caso, la cuantía de los términos será:

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{kn-1}.$$

siendo r la razón y a:[2]

$$a = N \frac{1 + \frac{i}{k} - r}{1 - r^{kn}\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-kn}}$$

siendo el polinomio a resolver:

$$P(z) = -D + \sum_{j=1}^{kn} a\, r^{j-1} z^j$$

multiplicando por r y haciendo $rz=x$:

$$P(z) = -rD + \sum_{j=1}^{kn} a\, x^j$$

desarrollando el sumatorio y multiplicando por $(1-x)$, queda:

$$P(x) = -rD + x\,(a+rD) - ax^{kn+1}$$

Utilizando el método de Newton, para calcular la raíz real positiva de $P_1(x)$ y tomando como primer valor $x_0 = r(1+i/k)^{-1}$:

a) calcular el cociente:

$$d_0 = \frac{P_1(x_0)}{P_1'(x_0)}$$

b) hacemos $x_1 = x_0 - d_0$

c) si d_0, es suficientemente pequeño, entonces

$$T.A.E. \approx \left(\frac{r}{x}\right)^k - 1$$

si no pasar al punto a) calculando d_1.

[2] Si $r = 1 + i/k$, el valor de a, para evitar que aparezca un error en el programa, al parecer una indeterminación, se calculará:

$$a = \frac{N\left(1 + \frac{i}{k}\right)}{kn}$$

Evaluación del error

De forma similar a como se hizo anteriormente:

$$TAE(x) = \left(\frac{r}{x}\right)^k - 1 \qquad \left| TAE(x^*) - TAE(x_s) \right| < 10^{-4}$$

Desarrollando en serie TAE(x_s) en el punto x^* y siendo $d_s = x^* - x_s$, se tiene:

$$TAE(x_s) - TAE(x^*) = -k\, r^k\, x^{*-(k+1)}\, d_s$$

Considerando la función:

$$g(x_s) = x_s - \frac{P_1(x_s)}{P_1'(x_s)}$$

desarrollando en serie $g(x_{s-1})$ en x^*:

$$d_s \approx \frac{1}{2}\, g''(x^*)\, d_{s-1}^2 \qquad \text{siendo} \qquad g''(x^*) = \frac{P_1''(x^*)}{P_1'(x^*)}$$

resultando en definitiva:

$$d_{s-1} \approx \sqrt{\frac{2d_s}{g''(x^*)}}$$

Para poder evaluar el valor de d_{s-1}, tendremos que conocer previamente los valores de x^* y de d_s. Sólo los hemos calculado para un valor extremo de k donde el valor de d_{s-1} resultó mínimo en el caso anterior.

$$i = 0{,}15; \quad k = 12; \quad n = 1.$$

	$r = 1{,}05$	$r = 0{,}95$
x^*	1,035532	0,936629
d_s	0,000007	0,000006
d_{s-1}	0,000479	0,000735

Dado que los valores considerados para r, son valores muy extremos, podemos decir, que para todos los casos, la última iteración a realizar será cuando se cumpla: $d_{s-1} < 4*10^{-4}$.

Pagos extraordinarios

Consideremos, de la misma forma que se hizo en el caso de cuotas constantes, que se efectúa por parte del prestatario un pago de P_1, en el momento t_1, y que continúa con el mismo método de amortización, es decir, con cuotas variables en progresión geométrica con la misma razón y duración del préstamo.

La cuantía de la cuota en el período t_1+1, será:

$$a_1 = a\, r^{t_1} - P_1 \frac{1 + \frac{i}{k} - r}{1 - r^{kn-t_1}\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-kn+t_1}}$$

El valor del T.A.E., tras la aportación extraordinaria, se obtiene resolviendo el polinomio:

$$P(z) = az \sum_{j=0}^{t_1-1} r^j z^j + P_1 z^{t_1} + a_1 z^{t_1+1} \sum_{j=0}^{kn-t_1-1} r^j z^j$$

desarrollando los sumatorios, multiplicando por r y por (1-x) tal como se hizo anteriormente, queda:

$$P(x) = -rD + x\left(a+rD\right) + P_1^* x^{t_1} + x^{t_1+1}\left(a_1^* - P_1 - a\right) - a_1^* x^{kn+1}$$

donde:

$$P_1^* = \frac{P_1}{r^{t_1-1}} \qquad a_1^* = \frac{a_1}{r^t}$$

Al igual que antes, se encuentra el valor aproximado del T.A.E.$_1$ utilizando el algoritmo de Newton para este último polinomio. En este caso comenzaremos con el último valor de x, que fue considerado, en el cálculo del T.A.E., en el momento de la constitución del préstamo.

Ejemplo

Sea el ejemplo del apartado anterior, considerando la razón igual a 1,02.
Resultados:

$$a_1 = 53689{,}24$$
$$\text{T.A.E}_0 \approx 17{,}2297\%$$

$$a_2 = 47927{,}67$$
$$\text{T.A.E}_1 \approx 17{,}2575\%$$

$$a_3 = 34023{,}39$$
$$\text{T.A.E}_2 \approx 17{,}2606\%$$

4. Conclusiones

Los algoritmos presentados, se muestran ciertamente rápidos, ya que en la mayoría de los casos, no será precisa sino una iteración y además no es preciso calcular todos los términos del polinomio inicial.

Por otra parte, su programación también resulta muy sencilla, incluso utilizando un lenguaje tan poco apto para el cálculo matemático como el COBOL.

Al comparar los valores del T.A.E., para los dos tipos de préstamo estudiados, se observa como es lógico, que para préstamos amortizables con cuotas variables en progresión geométrica, el T.A.E. es superior al de los préstamos con cuotas periódicas constantes si la razón es inferior a uno e inferior si la razón es superior a uno.

El cuadro 1, recoge nueve tablas donde queda reflejado el valor del T.A.E., para el caso de préstamos con cuotas constantes[3] considerando las diferentes variables que inciden en él, esto es tipo de interés, comisión, periodicidad y duración del préstamo.

[3]Por su similitud, no presentamos un cuadro similar para el caso de cuotas variables en progresión geométrica.

A la vista de dichas tablas, podemos establecer las siguientes conclusiones, para el tipo de préstamo que estamos considerando.

a) La diferencia entre el tipo de interés efectivo con comisión y sin comisión aumenta al aumentar la periodicidad de los pagos. (Gráfico 1.)

b) El T.A.E., para cualquier comisión mayor que cero, disminuye al aumentar la duración del préstamo. En los préstamos a corto plazo, una pequeña diferencia de comisión, hace variar sustancialmente el T.A.E. Concretamente a tres meses y para un tipo de interés del 15%, una diferencia de medio punto en la comisión, hace que el T.A.E. se incremente en cuatro puntos. Cuando el préstamo es a largo plazo, variaciones en la comisión, provocan variaciones mínimas en el T.A.E. (Gráfico 2.)

c) El aumento del tipo de interés efectivo, al aumentar la comisión, es prácticamente lineal. Tanto es así, que conocido el tipo de interés efectivo sin comisión y el aumento del T.A.E. por 0,1% de comisión, puede calcularse el T.A.E. para cualquier comisión c, con sólo multiplicar dicho aumento por c y sumarlo al tipo de interés efectivo sin comisión. El error que se comete, conociendo el aumento con un error inferior a 10^{-5}, es inferior a 10^{-4}, lo cual es suficiente para nuestros propósitos. (Gráfico 3.)

d) La diferencia entre el tipo de interés efectivo con comisión y sin comisión, aumenta al aumentar el tipo de interés nominal del préstamo. (Gráfico 4.)

En definitiva, hemos presentado por una parte un algoritmo muy rápido en el cálculo del T.A.E., y por otra, obtenido unas conclusiones que pueden ayudar a la toma de decisiones, tanto a prestamistas como a prestatarios para estos tipos de préstamos.

CUADRO 1. PAGINA 1

VALORES DEL TAE

INTERES 10%; DURACION 1 AÑO

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	11,11%	11,75%	12,03%	12,19%	12,37%	12,57%	12,79%
0,50%	10,55%	10,99%	11,18%	11,28%	11,39%	11,51%	11,65%
0,10%	10,11%	10,40%	10,50%	10,56%	10,62%	10,68%	10,74%
0,00%	10,00%	10,25%	10,34%	10,38%	10,43%	10,47%	10,52%

INTERES 15%; DURACION 1 AÑO

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	16,16%	17,14%	17,55%	17,78%	18,03%	18,30%	18,60%
0,50%	15,58%	16,35%	16,65%	16,82%	16,99%	17,18%	17,38%
0,10%	15,11%	15,72%	15,94%	16,05%	16,17%	16,29%	16,42%
0,00%	15,00%	15,56%	15,76%	15,86%	15,97%	16,07%	16,18%

INTERES 20%; DURACION 1 AÑO

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	21,21%	22,66%	23,48%	23,57%	23,92%	24,30%	24,70%
0,50%	20,60%	21,82%	22,30%	22,55%	22,82%	23,11%	23,40%
0,10%	20,12%	21,16%	21,55%	21,75%	21,96%	22,17%	22,36%
0,00%	20,00%	21,00%	21,36%	21,55%	21,84%	21,94%	22,13%

INTERES 10%; DURACION 10 AÑOS

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	10,23%	10,50%	10,59%	10,64%	10,69%	10,73%	10,78%
0,50%	10,12%	10,37%	10,46%	10,51%	10,56%	10,60%	10,65%
0,10%	10,02%	10,27%	10,36%	10,41%	10,45%	10,50%	10,54%
0,00%	10,00%	10,25%	10,34%	10,38%	10,43%	10,47%	10,52%

INTERES 15%; DURACION 10 AÑOS

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	15,26%	15,85%	16,06%	16,16%	16,27%	16,38%	16,49%
0,50%	15,13%	15,70%	15,91%	16,01%	16,12%	16,23%	16,33%
0,10%	15,03%	15,59%	15,79%	15,89%	16,00%	16,11%	16,21%
0,00%	15,00%	15,56%	15,76%	15,87%	15,97%	16,08%	16,18%

CUADRO 1. PAGINA 2

VALORES DEL TAE

INTERES 20%; DURACION 10 AÑOS

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	20,30%	21,33%	21,70%	21,89%	22,09%	22,29%	22,49%
0,50%	20,15%	21,16%	21,53%	21,72%	21,92%	22,15%	22,31%
0,10%	20,03%	21,03%	21,40%	21,58%	21,78%	21,97%	22,17%
0,00%	20,00%	21,00%	21,36%	21,55%	21,74%	21,94%	22,13%

INTERES 10%; DURACION 20 AÑOS

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	10,15%	10,40%	10,49%	10,54%	10,58%	10,63%	10,68%
0,50%	10,07%	10,33%	10,41%	10,46%	10,50%	10,55%	10,60%
0,10%	10,01%	10,26%	10,35%	10,40%	10,44%	10,49%	10,53%
0,00%	10,00%	10,25%	10,34%	10,38%	10,43%	10,47%	10,51%

INTERES 15%; DURACION 20 AÑOS

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	15,18%	15,76%	15,96%	16,07%	16,17%	16,28%	16,39%
0,50%	15,09%	15,66%	15,86%	15,96%	16,07%	16,18%	16,28%
0,10%	15,02%	15,58%	15,78%	15,88%	15,99%	16,10%	16,20%
0,00%	15,00%	15,56%	15,76%	15,86%	15,97%	16,07%	16,18%

INTERES 20%; DURACION 20 AÑOS

COMISION	K=1	K=2	K=3	K=4	K=6	K=12	K=365
1,00%	20,22%	21,24%	21,61%	21,80%	22,00%	22,20%	22,40%
0,50%	20,11%	21,12%	21,49%	21,68%	21,87%	22,07%	22,27%
0,10%	20,02%	21,02%	21,39%	21,58%	21,77%	21,96%	22,16%
0,00%	20,00%	21,00%	21,36%	21,58%	21,74%	21,94%	22,13%

GRAFICO 1

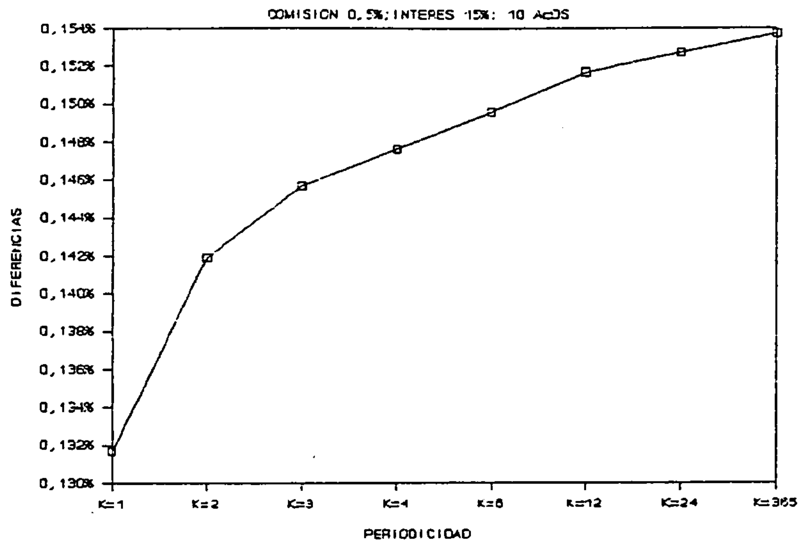


GRAFICO 2

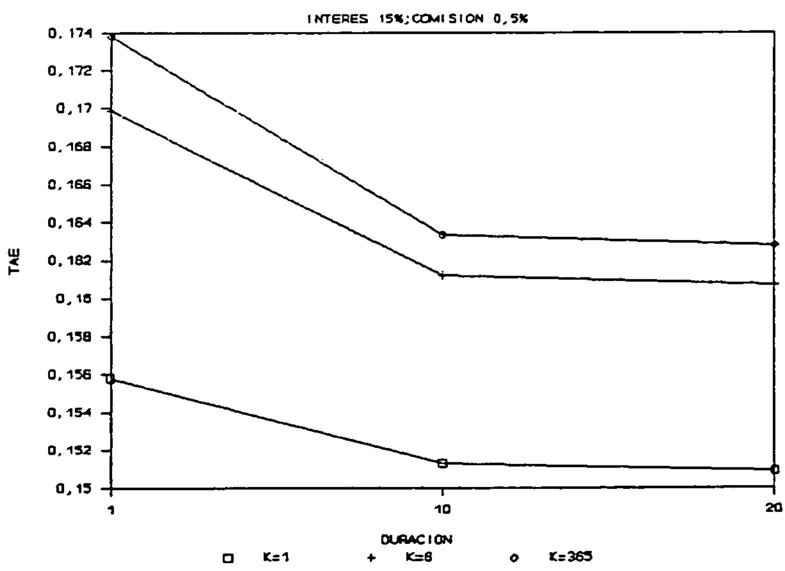


GRAFICO 3

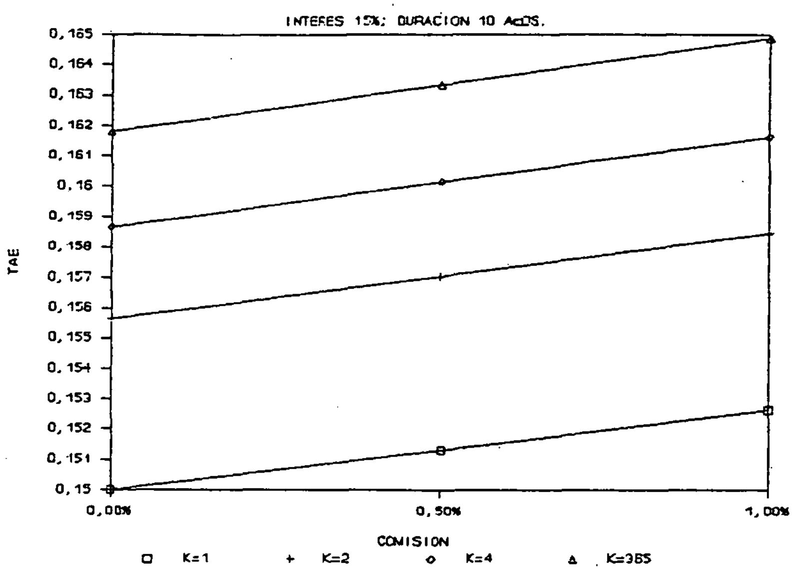
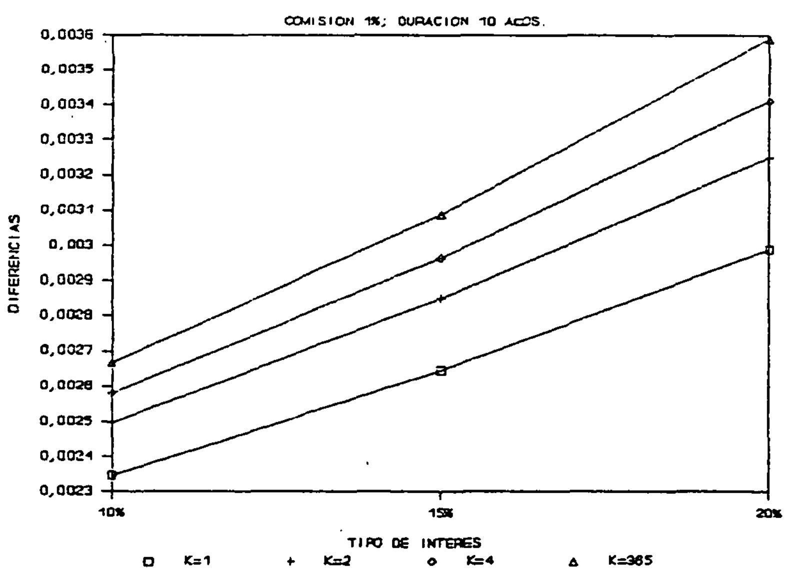


GRAFICO 4



Bibliografía

Banco de España: Circular nº 15/1988, de 5 de diciembre. Circular nº 8/1990, de 7 de septiembre.
Conte, S.D. - Carl de Boor: *Análisis numérico.* Ed. McGraw-Hill. 1985.
García Villalón J.: *Teoría matemática del interés y sus aplicaciones informatizadas.* Ed. Tebar Flores. 1987.

Medios Informáticos

Ordenador Hewlett-Packard. Vectra RS/20C.
Hoja de cálculo LOTUS 1-2-3.