ALGUNAS FORMALIZACIONES EN TORNO A LA PROBLEMATICA DEL CALCULO DE LA RENTABILIDAD EN LOS PROYECTOS MIXTOS DE INVERSION

Santiago Rodríguez Vicente
Bernardo García-Bernalt Alonso
Federico Cesteros Muñoz

RESUMEN.— El propósito de este trabajo es, fundamentalmente, realizar algunas formalizaciones en torno a la rentabilidad en los proyectos mixtos de inversión. Para ello, previa revisión del criterio TIR, centraremos nuestro estudio en el método propuesto por Teichroew, Robicheck y Montalbano, evidenciando las dificultades que presenta la no determinación a priori del signo de los saldos. Ante esto, se realiza un análisis de la relación funcional entre coste de capital y tanto de reinversión, a dos niveles analíticos distintos y a la vez complementarios: el global, que permitiría obtener tanto la definición como la estructura de la relación, y el local, que permitirá ofrecer una nueva interpretación de los tipos de rendimiento interno, como valores críticos de aceptación o rechazo del proyecto.

1. Introducción

Entre los criterios de selección de inversiones en condiciones de certeza, parece que los que gozan de un mayor predicamento son aquellos en los que se pretende valorar lo que, en términos muy generales, podríamos llamar rentabilidad de las mismas. Esto se debe, por una parte, al carácter de medida «proporcional» que tienen estos tipos de tasas y, por otra, al hecho de que las referencias externas para la aceptación o rechazo suelen tener, asimismo, la misma estructura porcentual. Ahora bien, el criterio comúnmente aceptado, el TIR, presenta una conocida problemática si se trata de evaluar la rentabilidad de los proyectos mixtos de inversión, careciendo las raíces que se obtienen de claro significado económico, aparte, como se sabe, de la posibilidad de inexistencia y multiplicidad de las mismas. En la primera parte de este trabajo, trataremos de analizar muy someramente las causas de esta inconsistencia, previa determinación y fijación de ciertos conceptos como el de inversión mixta, etc. A continuación pasaremos al estudio de la solución propuesta por Teichroew, Robichek y

Montalbano[1] (22), basada en la estrecha relación existente entre coste de capital y rentabilidad, y se contemplará la problemática de «circularidad» que presenta esta solución por la no determinación a priori del signo de los saldos.

Se analizará, exhaustivamente, esta problemática en el caso de ciertos tipos de inversiones. Por último, en la sección 4, estudiaremos nuevamente la relación funcional entre rentabilidad y coste de capital, desde un punto de vista analítico global, lo que indicará algunas vías de solución, así como la conveniencia del análisis local. Este se realiza a continuación, en los puntos «críticos» de valoración, permitiéndonos ofrecer una interpretación de la ecuación $VAN = 0$, cuyas raíces adquieren una nueva significación a la luz de las aportaciones del método de los saldos.

2. Cuestiones previas

Antes de introducirnos en el tema propiamente objeto de nuestro estudio, creemos necesario establecer algunas consideraciones previas mínimas, imprescindibles para poder fundamentar el análisis posterior. Pasaremos, sin embargo, por alto, todos aquellos planteamientos y definiciones que consideramos debidamente conocidos.

—Cada proyecto de inversión estará definido por una secuencia de flujos netos finitos y conocidos con certeza, produciéndose estos flujos únicamente al final de cada período. Su esquema será, por tanto

$$\begin{array}{cccccc} Q_0 & & Q_1 & & Q_2 & & & Q_n \\ \vdash & \text{———} & + & \text{———} & + & \text{———} & \text{- - - - - -} & \dashv \end{array}$$

Siendo $Q_0 < 0$, al tratarse del desembolso inicial, y pudiendo tomar el resto de los flujos cualquier valor real.

—Los recursos financieros son ilimitados y el costo de los mismos constante para todos los períodos, teniendo todos éstos idéntica duración.

—La empresa puede colocar en el mercado cualquier cantidad ilimitada de recursos obteniendo de ellos un rendimiento.

—Para que un método de selección sea aceptable deberá ser aplicable y consistente[2].

2.1. Clasificación de las inversiones

Si bien en nuestro estudio utilizaremos la clasificación de Mao, seguida por la práctica totalidad de autores, no obstante creemos interesante hacer mención de los tipos de inversiones considerados por Schneider (19). Así, habla de inversiones de tipo I, o inversiones verdaderas, y de inversiones tipo II, o inversiones no verdaderas. Limita su estudio, en principio, a las primeras, con un solo tipo de interés interno positivo, eliminando aquellas de tipo de interés interno negativo, en base al afán de

[1] No son objeto de estudio en este trabajo otras aportaciones, como pueden ser las de Jean o Merret-Sykes.

[2] Una definición precisa de estos conceptos se encuentra en el trabajo de Teichroew, Robichek y Montalbano (22).

lucro de la inversión, y aquellas de varios tipos de interés interno positivo, por considerar mínima su importancia.

Con esta segunda afirmación Schneider elimina las inversiones mixtas, que definiremos posteriormente, eliminación que parece excesivamente simplista, pues, fácilmente, se nos ocurren ejemplos de este tipo de inversiones, cual es el caso de aquellos proyectos en los que exista un coste de clausura superior al ingreso del último período. Reflejo de esta afirmación son, entre otros, aquellos proyectos de inversión relacionados con la problemática del medio ambiente, que obligan, a su cese, a una restauración del mismo.

Por nuestra parte, utilizaremos la clasificación de Mao (11), donde se distingue entre inversiones simples y no simples por una parte, y puras y mixtas por otra. Esta última clasificación, de especial importancia para nuestros fines, será precisada en la sección 3.2.

2.2. Problemática del tipo de rendimiento interno (TIR)

Podemos definir el tipo de rendimiento interno de una inversión como «la tasa de descuento que iguala a 0 el valor actual de toda la serie de flujos de fondos asociados con el proyecto»[3]. Como es sabido, según este método, «se averigua cuál es el rendimiento o interés interno del proyecto, y se le compara con el interés calculatorio. Así, del rendimiento interno se puede descontar el coste del capital y, si aún resulta un rendimiento neto positivo, el proyecto se considera conveniente»[4].

El coste del capital no está, pues, implícito en el TIR, al tratarse de una rentabilidad bruta, calculada antes de deducir el costo de los fondos utilizados, pero sí en el criterio de decisión a partir del TIR. Realmente debemos decir que la decisión no la tomamos en función del TIR, sino del tipo diferencial TIR-coste de capital.

Ahora bien, es un hecho sobradamente comentado que este criterio es inconsistente si se trata de estudiar cierto tipo de proyectos de inversión, debido a que la ecuación de la que se obtiene el TIR puede tener varias raíces reales positivas o, incluso, ninguna raíz real. En efecto, «si las erogaciones de una inversión no se limitan al período inicial, es posible que no exista un concepto de la tasa de rentabilidad independiente del costo del capital para la empresa»[5]. Así, en las inversiones mixtas, que es en las que se da esta dependencia, se convierte en ineludible otro método de estudio.

Queremos indicar, para terminar este apartado, la irrelevancia de la distinción entre inversiones simples y no simples, operacionalmente hablando, como quedará más patente en la siguiente sección. Así, la operatividad del TIR no depende de que una inversión sea simple o no simple, sino, más bien, de que sea pura o mixta.

[3] Mao J.C.T. (11) pg. 169.

[4] Tarrago, F. (21) pg. 110.

[5] Mao J.C.T. (11) pg. 173.

3. El método de Teichroew, Robichek y Montalbano

3.1. Saldo de una inversión. Inversiones puras y mixtas

Para determinar el saldo o balance de un proyecto de inversión, supuesto que el tipo de rentabilidad interna del mismo sea r, lo haremos a través de la fórmula, para un momento t:

$$S_t(r) = \sum_{i=0}^{t} Q_i \left(1+r\right)^{t-i}$$

para cada t=0...n. manteniendo la notación anterior de la sección anterior. (Recuérdese que $Q_0 < 0$).

De tal forma, si $S_t(r) > 0$, la empresa está endeudada con el proyecto en el momento t. Si, por el contrario, $S_t(r) < 0$, el proyecto está endeudado con la empresa, como es obvio. Por último si $S_t(r) = 0$, la rentabilidad obtenida en el momento t coincide con la esperada, puesto que la «cuenta» entre proyecto y empresa estaría saldada.

Con este concepto podremos precisar, con mayor claridad, la diferenciación entre inversiones puras y mixtas. Así, una inversión es pura si $S_t(r) \leq 0$ para $t = 0...n\text{-}1$, siendo r la tasa de retorno del proyecto. Será mixta si algún saldo $S_t(r) > 0$, para $t \leq n\text{-}1$, siendo r la «rentabilidad» de la inversión.

Si bien este nuevo concepto parece establecer una operativa para la diferenciación entre proyectos puros y mixtos, sin embargo la falta de determinación, a priori, de la rentabilidad, lo convierte en inoperante, a pesar de ser el criterio diferenciador comúnmente admitido.

Para resolver este problema de definición, basaremos la distinción en el concepto de saldo y «valor crítico» de r, de ahora en adelante r_c.

Este será el valor mínimo de r que hace que todos los saldos, salvo S_n, sean negativos o nulos (para la determinación de esta r_c, remitimos al anexo de esta sección, donde ofrecemos un algoritmo calculatorio. En cuanto a su existencia, basta con considerar el que la mayor potencia de r, en cada saldo, tiene un coeficiente negativo).

Una vez determinada la r_c, llamaremos inversión pura a aquella en que $S_n(r_c) \geq 0$ y mixtas al resto, es decir, aquellas en que $S_n(r_c) < 0$.

La relación de este criterio con aquél con el que comenzábamos esta sección es evidente, sin más que tener en cuenta la definición de r_c y el hecho de que los valores mayores que éste no hacen sino acusar la negatividad de los saldos. Un razonamiento análogo lleva también al paralelismo de esta definición con la ofrecida en la sección 2.

3.2. Relación entre rentabilidad del capital invertido y el coste del capital en las inversiones mixtas.

Vimos ya la problemática que presenta el TIR en las inversiones mixtas, por lo que es preciso establecer un nuevo criterio de decisión.

Definido el concepto de saldo o balance de una inversión, y admitido que si $S_t(r) < 0$ el proyecto está endeudado con la empresa, y si por el contrario $S_t(r) > 0$ la empresa está endeudada con el proyecto, diremos que, en el primer supuesto, el proyecto deberá saldar a la empresa en el futuro la deuda junto con los intereses acumulados, a un tanto de rentabilidad funcional r, y, en el segundo supuesto, la empresa deberá acreditar al proyecto el saldo positivo y abonarle, lógicamente, con un tipo de interés k. Este será menor que r, debido a la política general de prestatario y depositante. Del mismo modo, para una buena política de financiación este k deberá coincidir con el coste del capital para la empresa[6].

Así, los sucesivos saldos irán formulándose en función de r y k, según la siguiente relación de recurrencia.

$$S_0 = Q_0 \; ; \; S_i = S_{i-1}\,(1+s) + Q_i \text{ donde}$$
$$s = r \quad \text{si} \quad S_{i-1} \leq 0$$
$$s = k \quad \text{si} \quad S_{i-1} > 0$$

La igualdad $S_n = 0$ definirá una relación funcional creciente entre coste de capital y tasa de reinversión.

Para obtener esta relación funcional que nos proporcione un criterio válido de decisión actuaremos según el siguiente procedimiento:

1°.—Determinación de r_c (frente al método de «prueba y error» que proponen los autores consultados, establecemos, como hemos dicho, un algoritmo más operativo en la sección 3.3).

2°.—Si $S_n\,(r_c) > 0$, la inversión es pura, por lo tanto no existe relación funcional entre r y k. (De hecho la ecuación que se plantea es la misma que para determinar el TIR.)
Si $S_n\,(r_c) < 0$, la inversión es mixta, por lo tanto existe relación funcional entre r y k.

3°.—En el supuesto de que la inversión sea mixta se irán determinando los saldos de la misma, capitalizando con r o k, según sean estos negativos o positivos, respectivamente.
(Respecto a la determinación del signo de los saldos, estudiamos la cuestión en el apartado 3.4.)

4°.—Establecido S_n igualamos a 0, y obtenemos la relación entre r y k que nos servirá como criterio de decisión. De este modo, aquellos valores de k que verifiquen $r > k$ indicarán la viabilidad de la inversión y viceversa.

Omitimos ejemplos de este método, por la abundancia de los mismos en cualquier trabajo publicado sobre el tema.

3.3. Algoritmo para la determinación de r_c

ETAPA 1: Se halla el primer flujo Q_{t_0} tal que se verifique

$$\sum_{j=0}^{t_0} Q_j > 0$$

Sea Q_{S_0} el flujo más avanzado tal que, $Q_i > 0$ para $i = t_0 .... S_0$ con $i < n$. Es decir, tomamos flujos sucesivos a partir del desembolso inicial, hasta que la suma de los mismos, positivos y negativos, sea mayor que cero. Si

[6] Suárez Suárez, S. (20) pg. 91.

llegado aquí, los flujos siguientes son positivos, seguimos tomando hasta el primer negativo.

Por supuesto, si en ningún momento la suma de los flujos es mayor que cero, esto implica que r_c es igual a cero. Debemos tener siempre presente que lógicamente la r_c buscada será mayor o igual que cero.

ETAPA 2: Se determina la solución positiva mayor de la ecuación

$$\sum_{j=0}^{S_0} Q_j \left(1+r\right)^{S_0-j} = 0$$

Sea r_0 esta solución. (Obsérvese que cualquier saldo anterior a t_0 toma valor negativo para $r = r_0$.)

ETAPA 3: Sea Q_{t_1} $(t_1 > S_0)$ el primer flujo tal que se verifique

$$\sum_{j=S_0+1}^{t_1} Q_j > 0.$$

Sea Q_{S_0}, el flujo positivo más avanzado, tal que entre él y Q_{t_1} todos sean positivos $(S_1 < n)$.

En caso de que no exista Q_{t_1}, $r_c = r_o$.

En definitiva, repetimos el planteamiento de la etapa 1, a partir del primer flujo posterior a aquel en el que nos habíamos quedado Q_{S_c}. Este flujo será negativo.

ETAPA 4: Se halla

$$\sum_{j=S_0+1}^{S_1} Q_j \left(1+r_0\right)^{S_1-j} = A_1$$

Si $A_1 \leq 0$, se reitera la etapa 3, aumentando en una unidad los subíndices de t y s. Si $A_1 > 0$. Se halla la solución positiva mayor de la ecuación

$$\sum_{j=0}^{S_1} Q_j \left(1+r\right)^{S_1-j} = 0$$

Sea r'_1 esta solución, y r_1 = máx (r_0, r'_1). Así vemos que, si se cumple la condición establecida en la etapa 3, consideramos esta nueva sucesión de flujos como un proyecto de inversión en sí mismo que naciera en este nuevo origen.

Si el valor final de este nuevo proyecto con el r_0, es menor que cero, deberemos efectuar nuevamente el planteamiento establecido en la etapa 3, a partir del último flujo considerado.

Si por el contrario, el valor final fuera mayor que cero, se hallaría r_1 para todo el proyecto; es decir, desde el desembolso inicial y hasta el flujo al que hayamos llegado.

El nuevo candidato a r_c será el mayor entre los valores máximo de r obtenidos hasta el momento.

ETAPA 5: Pasar a la etapa 3, aumentando en una unidad los subíndices de t, s, r y r'.

Aparte de constituir un algoritmo fácilmente informatizable, la complejidad aparente del mismo desaparece en la práctica en la mayoría de los casos, y desde luego, nos parece más riguroso este método para la determinación de la r_c, que su obtención «por tanteo» como plantean los estudios consultados al respecto.

Como muestra de la operatividad del algoritmo en algunos casos, frente al tanteo, proponemos el siguiente proyecto mixto de inversión.

-1000	500	900	-100	-50	100	75	-100	50	80	-100

Donde r_c = 0,23 se obtiene en la segunda etapa por no darse las condiciones obligatorias para el cálculo de nuevos valores de r.

3.4. Problemática de determinación del signo de los saldos

Una cuestión esencial en el momento de calcular la relación entre r y k, por el método que estamos estudiando, es la determinación del signo de los distintos saldos del proyecto, pues de éste depende su tipo de capitalización (r o k). Incluso algunos autores definen los proyectos puros y mixtos a partir del signo de estos saldos.

Estimamos, sin embargo, que esta definición puede ser problemática, por cuanto que, como veremos, en ocasiones, es imposible decidir acerca del signo de algunos saldos intermedios. Por tanto, el criterio de Teichroew, Robicheck y Montalbano presentará ciertas dificultades en algunos tipos de inversiones mixtas.

Las referencias explícitas a este problema son prácticamente nulas en la literatura consultada, excepción hecha del artículo de Castellano Rebollo (2), que apunta la cuestión y la resuelve en algún caso en particular. Mucho más general es la solución de Azofra Palenzuela y Miguel Hidalgo (1), de la que hablaremos más adelante. Pero, a pesar de las escasas referencias, estimamos el tema como esencial, desde un punto de vista teórico, pues restringe muy considerablemente la aplicabilidad del criterio que estamos en estos momentos estudiando, además de aconsejar como hemos hecho referencia anteriormente, a reconsiderar las definiciones de inversiones pura y mixta que ofrecen algunos autores.

Centremos el problema. Dado un proyecto de inversión, una vez que hemos determinado, a partir del valor S_n (r_c) que esta inversión es mixta, hemos de calcular el signo de los saldos S_t (r, k), $t = 0...n\text{-}1$, sabiendo solamente que $r_c > r$. Haremos una primera aproximación a esta cuestión estudiando el siguiente ejemplo. Omitimos, sin embargo, el estudio general para el caso de dos y tres flujos, ya analizado en el artículo de Castellano Rebollo[7].

[7] Castellano Rebollo (2).

Sea el proyecto de inversión:

–100	120	20	–120

$S_1 = -100(1+r) + 120$

Es claro que S_1 es mayor que 0 en caso de que r sea menor que 0,2.

Por el contrario S_1 será negativo si r es mayor que 0,2.

Ahora bien, para esta inversión mixta r_c = 0'35, y de la desigualdad $r < r_c$ no obtenemos ninguna información por tanto no es posible determinar el signo de S_1.

Si ya topamos con este problema para la determinación del signo en caso de 3 flujos, es obvio que a medida que el horizonte de la inversión se amplía se irá agravando. En todo caso, podemos dar algunas reglas «operativas» para la determinación del signo de algunos saldos, siempre en el caso de inversiones mixtas.

1.—El signo de S_{n-1} es distinto del signo del flujo Q_n, como se desprende del hecho de que $0 = S_{n-1}(1+s) + Q_n$.

2.—El primer saldo que puede tomar signo positivo es aquel S_t en el que por primera vez se verifica la desigualdad

$$Q_0 + Q_1 + \dots\dots + Q_t > 0$$

3.—Si está determinado el signo de todos los saldos salvo uno, y todos son negativos, éste ha de ser positivo (si no la inversión no sería mixta).

4.—En general de la igualdad $S_t = S_{t-1}(1+s) + Q_t$ en ocasiones se puede determinar el signo de S_t conocido el de S_{t-1} o viceversa.

Así: Si $S_{t-1} > 0$

Si $Q_t \geq 0$, entonces $S_t > 0$

Si $Q_t < 0$ y $|Q_t| < S_{t-1}$, entonces $S_t > 0$

Si $Q_t < 0$ y $|Q_t| > S_{t-1}$ puede haber indeterminación.

Si $S_{t-1} < 0$

Si $Q_t \leq 0$, entonces $S_t < 0$

Si $Q_t > 0$ y $Q_t < |S_{t-1}|$, entonces $S_t < 0$

Si $Q_t > 0$ y $Q_t > |S_{t-1}|$ puede haber indeterminación.

Se obtendrían reglas análogas para el caso de que se conociera el signo de S_t.

Como ilustración de estas reglas, así como del problema de indeterminación ofrecemos un ejemplo más.

Sea el proyecto

-1000	700	400	300	-100

Por la regla 2, $S_0 < 0$, $S_1 < 0$

Por la regla 1, $S_3 > 0$

Trataremos de determinar el signo de S_2

$$S_2 = S_1(1+r) + 400$$

Puesto que $S_1 < 0$ y $Q_2 > 0$, será positivo si $400 > S_1(1+r)$ y negativo en caso contrario, pero a priori no podemos determinar cuál es la desigualdad.

Por otra parte $S_3 = S_2(1+s) + 300$ ($s = r$ o k)

Puesto que $S_3 > 0$, y $Q_3 > 0$, S_2 puede tomar valor positivo o negativo.

De este modo, las reglas no sirven para determinar el signo de S_2.

En este caso, la desigualdad $r < r_c$ tampoco decide efectivamente:

r_c = 0'22

$$S_2 = -1.000\,(1+r)^2 + 700\,(1+r) + 400$$

S_2 toma valor negativo (-234) para la r_c, luego, por ejemplo para 2 valores menores r_1 = 0'20 r_2 = 0,25 $S(r_1) < 0$ y $S\,(r_2) > 0$, con lo que no podremos determinar su signo.

4. El análisis de la relación funcional

4.1. La relación funcional $S_n(r,k) = 0$

La problemática de determinación del signo de los saldos desarticula, como hemos indicado, la solución de Robichek, Teichroew y Montalbano en general. Pero, por otra parte, es evidente la consistencia y profundidad de la misma, hasta el punto de que una ligera matización le devuelve, estimamos, todo su vigor.

De la lectura del trabajo de estos autores parece desprenderse el hecho de que el signo de los saldos de un proyecto de inversión es intrínseco al propio proyecto. Hasta ahora, hemos probado el problema de indeterminación, pero podría suponerse que ésta se debe a una falta de medios «algebraicos», a la no existencia de un algoritmo calculatorio suficientemente restrictivo o potente. Probaremos que no es así.

Si retornamos a la propia definición de saldo, nos encontramos con la raíz del problema: el saldo, en cualquier momento t, es una función de r y k. Así, no es de extrañar que su signo dependa, también, de estas dos variables, salvo en casos particulares, como los enunciados en las reglas del apartado anterior. Un saldo determinado, por tanto, no tendrá, en general, un signo fijo, sino que éste dependerá de los intervalos donde se muevan las variables que intervienen en su definición.

Con objeto de aclarar esta afirmación, retomemos uno de los ejemplos anteriores de indeterminación.

Sea el proyecto:

-100 | 120 | 20 | -120

Como vimos, su r crítica es de 0.35, y no es posible determinar, a priori, el signo del primer saldo S_1. Además $S_1 > 0$ si $r < 0.2$ y $S_1 < 0$ si $r > 0.2$. Analicemos ambos casos.

Si $r > 0.2$, S_1 es negativo, de donde:

$$S_2 = [-100(1+r) + 120]\,(1+r) + 20$$

Puesto que S_2 ha de ser positivo, se deduce que $0.15 < r < 0.35$. En definitiva si r está entre 0.2 y 0.35 $S_1 < 0$ y $S_2 > 0$.

Si $r < 0.2$, S_1 es positivo, y S_2, evidentemente, lo será también.

Así, la relación funcional sería para este proyecto:

$$S_3(r,k) = 0 = \begin{cases} \left(-100\,(1+r)^2 + 120\,(1+r) + 20\right)(1+k) - 20 & \text{si} \quad r \in [0.2,\ 0.35] \\ \left(\left(-100\,(1+r) + 120\right)(1+k) + 20\right)(1+k) - 20 & \text{si} \quad r \in [0,\ 0.2] \end{cases}$$

Este ejemplo permite destacar dos hechos: que la relación funcional está definida a trozos, y que, como consecuencia de esto, no existe, en general, una estructura fija de signo de los distintos saldos de un proyecto.

A partir de esta consideración, parece resultar más aconsejable que un intento de estudio analítico global de la relación funcional uno local, (como haremos en el apartado siguiente), puesto que se plantean problemas de definición, derivabilidad, multiplicidad, etc.

El modo de proceder, entonces, puede ser análogo al del ejemplo anterior, es decir, ir determinando las distintas relaciones funcionales, considerando los intervalos de variación de r. Ahora bien, en el caso de proyectos con un número elevado de flujos, el procedimiento se convierte en algo bastante prolijo y confuso, por lo que es preciso buscar una sistematización.

Un algoritmo de este tipo se halla desarrollado en el artículo de Azofra Palenzuela y Miguel Hidalgo (1), por lo que lo omitimos aquí. Hemos de señalar que estos autores estudian la definición a intervalos del coste del capital, cuestión que, desde un punto de vista de gestión empresarial es, notablemente, más ventajosa.

4.2. *La ecuación VAN = 0*

Como se ha señalado frecuentemente en apartados anteriores, el criterio TIR, o, si se prefiere, la ecuación VAN=0, carece de un claro significado económico en el caso de que el proyecto de inversión que se está intentando evaluar sea mixto. Curiosamente, como veremos, esta ecuación, o, más bien, las soluciones de la misma, admiten una nueva lectura a la luz de las aportaciones del método de los saldos.

Como resultado de las mismas, aparece la relación funcional que se obtiene entre rentabilidad y coste de capital, igualando el último saldo a 0; $S_n\,(r,k) = 0$. Una vez hallada ésta, (que, en general está definida a trozos, y no tiene por qué ser una curva lisa[8] ya que para ello el polinomio en dos variables $S_n\,(r,k)$ debería ser irreducible), el criterio de decisión se adopta del siguiente modo: dado un coste del capital fijo e igual a k', (o una rentabilidad fija e igual a r'), se obtiene el mayor valor de r que verifica $S_n\,(r,k') = 0$, que será r' (respectivamente, y de modo análogo, k'). Si r' es mayor que k' el proyecto se acepta, y en caso contrario se rechaza. La igualdad $r' = k'$ indicará que es indiferente.

De este modo, revisten una especial importancia las soluciones del sistema:

$$\begin{gathered} S_n\,(r,k) = 0 \\ r = k \end{gathered}$$

por cuanto que, en algún sentido, indicarán los valores críticos de k, antes o después de los cuales la inversión será o no viable. Es decir, en el caso más sencillo, supuesto que $S_n\,(r,k) = 0$ defina una curva continua en el plano (r,k), las soluciones del sistema anterior indican los puntos donde es posible que se produzca el paso de r mayor que k a r menor que k o viceversa, salvo, obviamente, que existan contactos de multiplicidad par (tangencia, por ejemplo) entre dicha curva y la recta $r = k$ en esos puntos.

[8] La definición de curva lisa, así como otras que aparecerán a partir de ahora (punto singular, contactos pares, etc.), son propias de la geometría algebraica, y, por su prolijidad las omitimos aquí. Pueden hallarse, por ejemplo en FULTON; W. «Curvas algebraicas». Reverté. Zaragoza 1971.

Si bien, como ya hemos indicado, la relación funcional obtenida presenta la posibilidad de su definición a trozos, así como el hecho de que no tiene por qué definir una función implícita globalmente, si se verificara que en un entorno de los puntos solución del sistema la relación funcional estuviera en las condiciones del teorema de la función implícita[9], estos proporcionarían una valiosa información en cuanto a la decisión de aceptación o rechazo, aun cuando no pudiéramos valorar la brecha entre rentabilidad y coste del capital. Sólo se plantearía problema en el caso de coincidencia de alguna de las soluciones del sistema con extremos de los intervalos de definición de la función, y de ser así, bastaría con un estudio local directo.

En resumen: si logramos probar que la relación funcional $S_n(r,k) = 0$ verifica el teorema de la función implícita en entornos de los puntos solución del sistema antes descrito, si k' es uno de estos puntos, salvo que el contacto con la recta $r = k$ tenga multiplicidad par, será un punto crítico de valoración, en el sentido de que el paso por él conduce de la aceptación al rechazo o viceversa.

Ahora bien, las soluciones del sistema se obtienen al sustituir en la relación funcional k por r, o r por k, con lo que obtenemos una sola ecuación, que es, precisamente $(1+r)^n\, VAN = 0$, cuyas soluciones son las tasas de rendimiento interno del proyecto, en su sentido más ingenuo. Claramente, ahora, la no existencia de soluciones, o el hecho de que haya más de una tiene una interpretación bien precisa sin más que retornar al planteamiento del método de los balances.

Sea a una de estas soluciones, es decir, $S_n(a,a) = 0$, donde a no es uno de los extremos de los intervalos de definición de la relación. La función $z = S_n(r,k)$, considerada como función real de dos variables reales es continua, evidentemente, en un entorno del punto (a,a) y, por hipótesis, se anula en ese punto. Para que se verifique el teorema de la función implícita, la derivada parcial de z respecto a k no puede anularse en un entorno del punto (a,a), pero, puesto que, la función z es creciente respecto a k (los coeficientes de potencias de $(1+k)$ son los saldos positivos), esta derivada parcial es positiva. Por tanto, $S_n(r,k)$, en un entorno del punto (a,a) define una función $k = f(r)$, uniforme y continua, según el citado teorema. (Podemos afirmar, incluso, que f es también diferenciable).

De este modo, salvo que la recta $r = k$ tenga un contacto de multiplicidad par (tangencia, si el punto (a,a) es no singular) con la curva $k = f(r)$ en el punto (a,a), el valor a define un punto crítico de valoración (aceptación o rechazo), en el sentido más arriba indicado.

Ahora bien, para que esto ocurra, es condición necesaria que:

$$\frac{df}{dr}(a) = 1 = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial r}(a,a)}{\dfrac{\partial z}{\partial k}(a,a)}$$

y, por tanto:

$$(*)\quad -\frac{\partial z}{\partial r}(a,a) = \frac{\partial z}{\partial k}(a,a)$$

[9] Una sencilla demostración de este teorema, para el caso de dos variables, que es el que nos ocupa, se encuentra, por ejemplo, en el clásico REY PASTOR, J.: «Elementos de la teoría de funciones». Biblioteca Matemática. Madrid 1973. Pg. 291 y ss.

La condición (*) es, entonces, necesaria para que se produzca ese contacto par, pero, curiosamente, admite una interpretación desde otro punto de vista.

Supongamos que las fuentes de financiación de la empresa pueden ser varias, o que, en definitiva, k puede recorrer todo un intervalo real I. En ese caso se optará por aquella fuente tal que la diferencia entre la rentabilidad asociada a la misma y el coste del capital sea mayor. Más concretamente, se trata de maximizar $u = r-k$, sujeta a la condición $S_n\,(r,k) = 0$ (la consideración de que k esté en I no afecta al aspecto local de la solución). Ahora bien, una condición necesaria de extremo para este problema (que se deduce de las condiciones de Lagrange), es, precisamente (*). Así, un punto de tangencia, caso de no existir restricciones de variabilidad del coste del capital, cumple las condiciones de máximo del problema enunciado (es claro que no es mínimo, puesto que éste no es acotado).

En resumen: las soluciones de la ecuación $VAN = 0$, siempre en las hipótesis de que no coincidan con uno de los extremos de definición de la relación funcional obtenida por el método de los saldos, indican valores críticos del coste del capital en uno de los sentidos siguientes: o bien la tasa diferencial r-k cambia de signo al pasar por una de ellas, o constituyen un máximo de la misma, e igual a 0, con lo que existe un entorno de las mismas que se encuentra en la región de no aceptación.

A continuación expondremos tres ejemplos sencillos que ilustran esta afirmación de modo exhaustivo, por cuanto recogen las tres posibles situaciones locales.

Ejemplo 1.-

Sea el proyecto de inversión:

-100	80	70	-40,7

La r crítica del mismo es de 0.33, aproximadamente.

La relación funcional obtenida igualando el último saldo a 0, al no haber problema de indeterminación de signos es:

$$[-100\,(1+r)^2 + 80\,(1+r) + 70]\,(1+k) - 40.7 = 0$$

Por su parte, las soluciones de la ecuación VAN = 0 se obtendrían de:

$$100\,(1+x)^3 - 80\,(1+x)^2 - 70\,(1+x) + 40.7 = 0$$

Estas raíces son: 0.10, -0.52 y -1.776. Desestimamos las raíces negativas, por su falta de significado económico. Así, el único punto crítico de valoración es 0.10, que, por otra parte, no verifica las condiciones (*). En definitiva, si $k > 0.10$, el proyecto se ha de rechazar, y aceptarse en caso contrario.

Como se puede observar, en este caso, donde no hay problemas de indeterminación del signo de los saldos, ni de contactos dobles con la recta $r = k$, el desestimado criterio TIR, tras la nueva interpretación realizada, ofrece la solución.

Ejemplo 2.-

Sea el proyecto de inversión:

-100	110	40	-44

Su r crítica es de 0.388, y la relación funcional que se obtendría por el método de los saldos:

$$S_n(r,k) = 0 = \begin{cases} \left(-100\,(1+r)^2 + 110\,(1+r) + 40\right)(1+k) - 44 & \text{si} \geq 0.10 \\ -100\,(1+r)(1+k)^2 + 110\,(1+k)^2 + 40\,(1+k) - 44 & \text{si } r < 0.10 \end{cases}$$

Como puede observarse, esta relación está definida a trozos, debido a la imposibilidad de determinación, a priori, del signo del saldo S_1.

Por su parte las raíces de la ecuación $VAN = 0$ son: 0.1, -0.37 y -1.73. Desestimando las negativas, el punto 0.1 presenta el problema de ser extremo de los intervalos de definición. Por ello, en este caso, basta con estudiar la relación entre r y k a la derecha e izquierda de este punto. Así, si, por ejemplo,

$k = 0.09$, $r = 0.96$ $(r > k)$

$k = 0.11$, $r = 0.103$ $(r < k)$

Por tanto, el proyecto se aceptará si $k < 0.10$, y se rechazará en caso contrario. Nuevamente, la decisión coincidiría con la tomada por el criterio TIR.

Ejemplo 3.-

Sea el proyecto de inversión:

-100 — 40 — 40 — 299,2 — -284,35

La estructura de signos de los saldos es fija. Todos ellos son negativos salvo S_3. Así la relación funcional será:

$$S_n(r,k) = 0 = -100(1+r)^3(1+k) + 40(1+r)^2(1+k) + 40(1+r)(1+k) + 299.2(1+k) - 284.35$$

A su vez, la única raíz real de la ecuación $VAN = 0$ es 0.1 con multiplicidad 2. Esta raíz verifica las condiciones (*), por tanto la curva definida implícitamente por la relación funcional tiene como tangente en el punto (0.1, 0.1) a la recta $r=k$. Por ello, en un entorno de 0.1 la curva se encuentra en la región de no aceptación. De este modo, al no haber más puntos críticos de valoración el proyecto se ha de rechazar siempre. Sólo para k=0.1 resulta indiferente.

Al igual que en los casos anteriores las raíces de la ecuación $VAN = 0$, dan información suficiente para adoptar una decisión.

Estos tres ejemplos, como dijimos, recogen las tres posibilidades indicadas más arriba. Claramente, si se aumenta el número de flujos, podrían presentarse las tres situaciones simultáneamente, pero al ser el análisis local, nos encontraríamos reducidos a uno de los casos anteriores.

Bibliografía

Azofra Palenzuela, V.; De Miguel Hidalgo, A.: «El problema de la inconsistencia del criterio de la tasa de rendimiento interna y una propuesta de solución». *Anales de Estudios Económicos y Empresariales* Valladolid 1987.

Castellano Rebollo, J. Miguel: «Estudio sobre inversiones mixtas». *Esic Market n. 45.* Julio-septiembre 1984.

Conde López, Alejandro: *Tratado sobre inversiones.* Ed. INDEX, Madrid 1976.

Cristóbal Zubizarreta, J. María: «Análisis del Método de Schneider para la obtención de la tasa de retorno aproximada de un proyecto de inversión». *Esic Market n. 31.* Enero-abril 1980.

—— «La tasa interna de retorno y la valoración de inversiones». *Gestión científica, vol.* 1. n. 2. 1986.

—— «El criterio de la pseudotasa de retorno en las inversiones no puras». *Esic Market n. 36.* Septiembre-diciembre 1981.

—— «El problema de la unicidad de la tasa de retorno de una inversión: una aproximación». *Gestión científica* n. 1. 1983.

De Faro, C.: «A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return: further comments». *Jorunal of financial and quantitative anlysis.* Septiembre 1978.

Jean, W. H.: *Teoría analítica de la financiación.* Editorial Ariel. Barcelona 1976.

Jordano Pérez, Juan: «Panorama y literatura sobre selección de inversiones», *B.E.E. n. 105.* Diciembre 1978.

Mao James, T.C.: *Análisis financiero.* Editorial El Ateneo. Buenos Aires 1975.

Marín García, J.M.; Martín Dávila, M.: «Fórmulas explícitas aproximadas para el cálculo del rendimiento interno de una inversión». *Gestión científica n. 1.* 1983.

Martín Dávila, M.: «Problemática del cálculo de la rentabilidad en operaciones de inversión/financiación: una nueva aproximación». *Esic Market n. 45.* Febrero-septiembre 1984.

—— «El tipo de rendimiento interno generalizado y su aplicación en la programación de inversiones». En *Temas actuales de gestión de empresas.* C.U.R. Sevilla 1986.

Montlor, J.: «Proyectos mixtos y proyectos agregados». *B.E.E. n. 115.* Abril 1982.

Peumans, H.: *Valoración de proyectos de inversión.* Ed. Deusto. Bilbao 1976.

Prieto Pérez, E.: «Decisiones de inversión». *Revista española de financiación y contabilidad. n. 17.* Julio-septiembre 1976.

Puig Andreu, J.V.; Renau Piqueras, J.J.: *Análisis y evaluación de proyectos de inversión.* Ed. Hispano Europea. 1981.

Schneider, E.: *Teoría de la inversión cálculo de la economicidad.* El Ateneo. Buenos Aires 1956.

Suárez Suárez, Andrés S.: *Decisiones óptimas de inversión y financiación de la empresa.* Ed. Pirámide. Madrid 1983.

Tarrago, F.: *Decisiones de inversión en la empresa. Cálculo de economicidad de los proyectos.* Ed. Hispano Europea. Barcelona 1978.

Teichroew, Robichek Y Montalbano: «An Analysis of criteria for investment and financing Decissions under Certainty». *Management Science.* Nov. 1975.