

DINAMICA DEL MODELO DE OBST

*María Dolores Soto Torres
Ramón Fernández Lechón*

RESUMEN.—El objetivo de este trabajo es analizar la dinámica de un modelo en tiempo continuo, propuesto por Obst.

En el estudio, y bajo determinados supuestos, se obtienen, como resultados relevantes, una bifurcación de Hopf y una órbita homocíclica que conecta un centro y un punto de silla.

1. Introducción

El modelo propuesto por Obst (1978) pretende demostrar la poca efectividad de la política monetaria convencional para luchar contra los ciclos cuando se pretende ajustar la inflación.

Así, en el estudio analítico de este trabajo realizado en Chiang (1987) se prueba que si la tasa de expansión monetaria se considera variable exógena, o bien función dependiente de la inflación (política monetaria convencional), el comportamiento de la relación demanda-oferta de dinero y de la inflación es cíclico, lo que supone que unas condiciones iniciales volverán a obtenerse después de transcurrido un periodo.

El comportamiento de las variables contrasta con el caso anterior, si la tasa de expansión monetaria se supone función no lineal de la tasa de variación de la inflación (política monetaria alternativa). Ahora, las trayectorias tenderán a un mercado monetario perfecto y una tasa de inflación constante.

Estos resultados se obtienen del modelo de Obst si se supone que, con cualquiera de las dos políticas, el modelo asociado tiene un único estado de equilibrio y que la tasa de expansión monetaria es decreciente con respecto a la única variable de la que depende en cada modelo, esto es, $m'(p) < 0$ en la política monetaria convencional y $m'(\dot{p}) < 0$ en la política monetaria alternativa.

En este trabajo, tratamos de analizar la dinámica asociada al modelo de Obst, sin tener en cuenta estas hipótesis por él exigidas. De este modo se podrán admitir distintos comportamientos de la tasa de expansión monetaria en función de la inflación o de variación de la tasa de inflación.

En una primera parte plantearemos las ecuaciones diferenciales en las que se basa el modelo de Obst. En las dos secciones siguientes analizaremos la dinámica de las dos políticas, distinguiendo si el correspondiente modelo no tiene estados de equi-

libro, tiene un único estado, o bien admite más de un estado de equilibrio. El trabajo lo concluimos destacando los resultados que adicionalmente surgen al eliminar las hipótesis impuestas al modelo original.

2. El modelo Obst

La hipótesis básica del modelo de Obst es el mecanismo de ajuste de la inflación:

$$\frac{dp}{dt} = h \left(1 - \frac{M_d}{M_s} \right), \quad h > 0$$

que muestra cómo un exceso de oferta monetaria ($M_s > M_d$) lleva consigo un aumento de la tasa de inflación p . En particular, si la oferta y demanda de dinero coincidiesen, tendríamos una tasa de inflación constante, que no supondría una estabilización de los precios.

La hipótesis adicional de que la demanda de dinero es directamente proporcional al producto nacional nominal: $M_d = a \cdot P \cdot Q$, con a constante, nos lleva a considerar la segunda ecuación diferencial del modelo de Obst. Esta ecuación viene planteada de la siguiente forma: si denotamos por μ la relación demanda-oferta de dinero y derivamos respecto al tiempo, tenemos:

$$\dot{\mu} = \mu \left(\frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{M}_s}{M_s} \right)$$

que podemos expresar:

$$\dot{\mu} = \mu (p + q - m)$$

donde $p = \dot{P}/P$, es la tasa de inflación, $q = \dot{Q}/Q$ será la tasa de crecimiento del producto nacional real, y $m = \dot{M}_s/M_s$, será la tasa de expansión monetaria.

Agrupando las dos ecuaciones, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales cuya dinámica en los supuestos $m = m(p)$ y $m = m(\dot{p})$ pasamos a analizar en las secciones siguientes.

3. Política monetaria convencional

En la política monetaria convencional se supone que la tasa de expansión monetaria depende exclusivamente de la inflación: $m = m(p)$. En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales será:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= h (1 - \mu) \\ \dot{\mu} &= \mu (p + q - m(p)) \end{aligned}$$

Entonces, si la oferta y demanda de dinero coinciden ($\mu = 1$), el segundo miembro de la primera ecuación se anula, pero la relación $p + q - m(p)$, dependiendo del comportamiento de la tasa de expansión monetaria, puede no anularse, anularse para un valor único, o bien para más de uno. Por consiguiente, el modelo no tiene por qué admitir un único estado de equilibrio o más de uno.

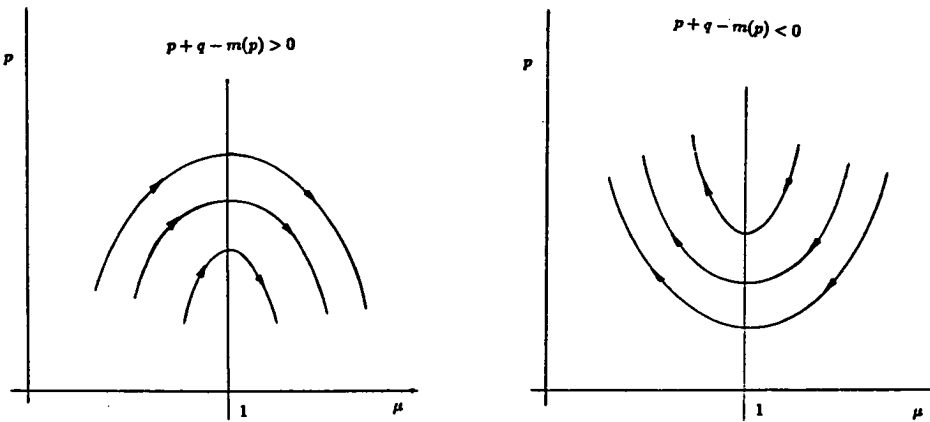
Analicemos concretamente tres posibilidades: que no admita estados de equilibrio, que admita uno solo, o bien que admita dos únicos estados de equilibrio.

A) Si el modelo no tiene estados de equilibrio, la traza de la matriz jacobiana asociada a él, que tiene como valor $p + q - m(p)$, es distinta de cero; luego, teniendo en cuenta el criterio de Bendixon (Guckenheimer y Holmes, pág. 44) el modelo carecerá de órbitas cerradas y, por tanto, no existen comportamientos cíclicos entre las variables μ y p .

El comportamiento de la inflación respecto a la variable μ está determinado por la ecuación diferencial en variables separadas:

$$\frac{dp}{d\mu} = \frac{h(1-\mu)}{[p + q - m(p)] \mu}$$

entonces, como la traza es no nula, tendremos que si fuera positiva (negativa) la inflación crece (decrece) si μ crece hasta alcanzar el equilibrio en el mercado monetario, situación que marca una inflación decreciente (creciente) (gráfica 1).



Gráfica 1

B) En el caso de que la ecuación $p + q = m(p)$ admitiese una única solución p^* , el modelo presentaría un único estado de equilibrio: $(p = p^*, \mu = 1)$ cuya dinámica asociada podemos caracterizar a partir de la función

$$H(p, \mu) = \frac{p^2}{2} + qp - V(p) - h(\ln \mu - \mu)$$

con $V(p) = \int^p m(x) dx$, que es constante sobre las trayectorias ($DH = 0$).

En efecto, el estado de equilibrio $(p^*, 1)$ es un punto crítico de la función $H(p, \mu)$ degenerado¹ si $m'(p^*) = 1$ y no degenerado en el resto de los casos.

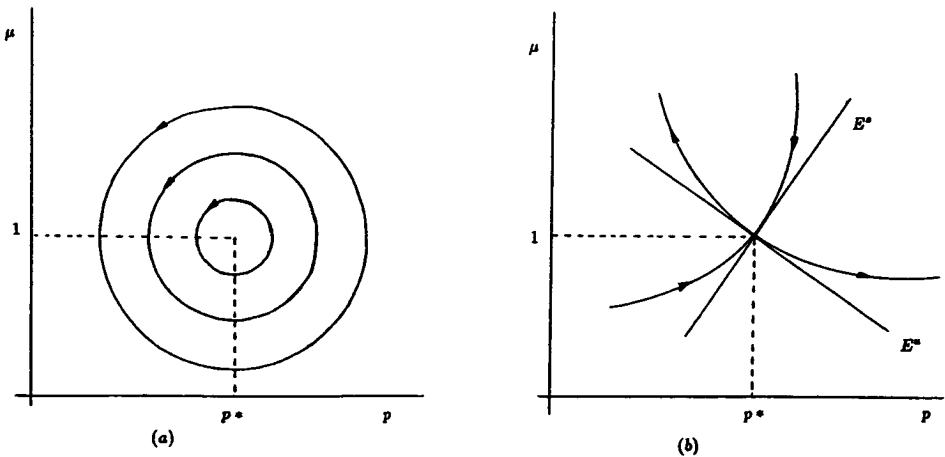
¹ El determinante de su matriz hessiana es nulo.

Si $(p^*, 1)$ es no degenerado, distinguimos dos posibilidades según $m'(p^*)$ sea menor o mayor que la unidad. En el primer caso, esto es, cuando $m'(p^*)$ es menor que la unidad, el estado de equilibrio es un mínimo de la función $H(p, \mu)$ siendo

$$H(p, \mu) - H(p^*, 1)$$

su función de Lyapunov asociada, que nos garantiza la estabilidad, pero no asintótica de este estado de equilibrio. Pero, además, su índice de Morse es cero, por lo que aplicando el lema (ver Majthay A., pág. 224) tendremos que existe un cambio de coordenadas en las cuales la representación local de $H(p, \mu)$ son circunferencias centradas en $(p^*, 1)$ con lo que el estado de equilibrio es un centro (gráfica 2(a)).

En el segundo caso, esto es, si $m'(p^*) > 1$, tenemos que el punto crítico $(p^*, 1)$ es un punto de silla de la función $H(p, \mu)$ y como tiene índice de Morse uno, tendremos un punto de silla en el modelo. Los subespacios estable e inestables tangentes a las variedades estable e inestable vienen determinados por los vectores $(\sqrt{h}, \sqrt{m'(p) - 1})$, $(\sqrt{h}, -\sqrt{m'(p) - 1})$ respectivamente (gráfica 2(b)). Ahora, sólo existirá una trayectoria, sobre la variedad estable, que tiende hacia $p = p^*$, $\mu = 1$.



Gráfica 2

El estudio del punto crítico degenerado necesita otro tratamiento, ya que si $m'(p^*) = 1$, la matriz jacobiana asociada al estado de equilibrio admite, considerando la ecuación característica, una única raíz doble nula. Luego, tendremos una bifurcación de codimensión dos.

Para el análisis de esta bifurcación, podemos utilizar la técnica propuesta por Guckenheimer (pág. 364), por lo que se tendrá que verificar $m''(p^*) \neq 0$.²

Considerando esta posibilidad, trasladamos el estado de equilibrio $(p^*, 1)$ al $(0, 0)$, mediante el cambio de variables $x = \mu - 1$, $y = p - p^*$, y entonces el sistema de ecuaciones diferenciales inicial se transformará en:

² Si eliminamos esta condición actualmente se desconoce cómo podría estudiarse la bifurcación.

$$\dot{y} = -hx$$

$$\dot{x} = -m''(p^*) \frac{y^2}{2} - m'''(p^*) \frac{xy^2}{2} - m''''(p^*) \frac{y^3}{6}$$

donde hemos de notar que en la segunda ecuación tenemos una dependencia exclusiva de los términos cuadráticos y cúbicos. Si, considerando el nuevo sistema, realizamos una nueva escala del tiempo mediante la transformación:

$$y = \varepsilon v, \quad x = \varepsilon^2 u, \quad m''(p^*) = \varepsilon a$$

$$m''''(p^*) = \varepsilon b, \quad \varepsilon \geq 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad t \rightarrow t\varepsilon$$

obtenemos un nuevo sistema en las variables u y v con hamiltoniano asociado:

$$H(v, u) = -hv^2 + \frac{a}{3} v^3$$

que admite como único punto crítico al estado $(0,0)$, pero, al ser degenerado, no podremos caracterizarlo ni como centro ni como punto de silla³.

Por tanto, el análisis del modelo en la bifurcación, sólo podrá obtenerse a partir del comportamiento de las curvas de nivel de la función $H(v, u)$, simétricas respecto al eje de las v . En particular, la curva de nivel que pasa por el estado de equilibrio tiene un comportamiento análogo al caso en que no teníamos estados de equilibrio.

C) Si el modelo presenta dos estados de equilibrio $(p', 1)$, $(p'', 1)$ con $p' \neq p''$, tendremos que los valores de inflación p' y p'' serán los únicos que satisfacen la ecuación $p + q = m(p)$. Ahora bien, debido a que la pendiente de la recta $p + q$ es la unidad, si se verifica $m'(p') \neq 1$ y $m'(p'') \neq 1$, entonces $m'(p') > 1$ y $m'(p'') < 1$ o bien $m'(p') < 1$ y $m'(p'') > 1$.

Estudiemos esta última posibilidad, ya que si en alguno de ellos la derivada de la tasa de expansión monetaria es la unidad, volveremos al análisis de la bifurcación de codimensión dos.

Supongamos, por ejemplo, $m'(p') > 1$ y $m'(p'') < 1$, luego $(p', 1)$ es un punto de silla y $(p'', 1)$ es un centro, de acuerdo con los resultados obtenidos en el apartado B de esta sección.

Ahora bien, como $(p'', 1)$ es un centro, la curva de nivel de la función $H(p, \mu)$ que pasa por él es sólo satisfecha por él mismo, ya que tenemos garantizada la existencia de curvas cerradas en su entorno que le tienen a él como centro.

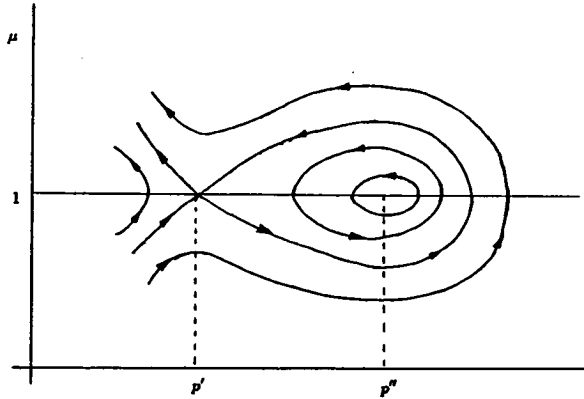
La curva de nivel de la función $H(p, \mu)$ en el punto de silla, tiene que admitir un punto doble $(p', 1)$, como fácilmente se comprueba. Los coeficientes regulares de las dos ramas que pasan por él son:

³ Los puntos críticos no degenerados de los sistemas hamiltonianos sólo pueden ser centros o puntos de silla.

$$\pm \sqrt{\frac{m'(p') - 1}{h}}$$

que coinciden con las pendientes de las variedades asociadas, según los cálculos anteriores.

El comportamiento de la curva $H(p, \mu) = H(p', 1)$, con un máximo en (p'', μ) , $\mu > 1$; un mínimo en (p'', μ) , $\mu < 1$, e inflexión en $\mu = 1$, nos garantiza la existencia de una órbita homocítica en el modelo (gráfica 3) que conecta al estado de equilibrio $(p', 1)$ consigo mismo.



Gráfica 3

La órbita homocítica marca la frontera de comportamientos cíclicos entre las variables inflación y relación oferta-demanda de dinero.

4. Política monetaria alternativa

En la política monetaria alternativa se supone que la tasa de expansión monetaria depende exclusivamente de la variación de la tasa de inflación: $m = m(p)$. En tal caso, las ecuaciones dinámicas del modelo se formularán:

$$\dot{p} = h(1 - \mu)$$

$$\dot{\mu} = \mu [p + q - m(h(1 - \mu))]$$

En este supuesto, el modelo presenta dos posibilidades: o bien no tiene estados de equilibrio, o tiene uno solo; en este último caso dicho estado de equilibrio será aquel para el que su valor de inflación verifique:

$$p + q = m(0)$$

Si no existe estado de equilibrio, las trayectorias del modelo satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{d\mu}{dp} = \frac{[p + q - m(h(1 - \mu))]\mu}{h(1 - \mu)}$$

y el desconocimiento del comportamiento de la tasa de expansión monetaria nos impide obtener resultados.

Si el modelo presenta un único estado de equilibrio $(p^*, 1)$ (que es la suposición que Obst realiza) el comportamiento cualitativo asociado a él depende fundamentalmente del valor $m'(0)$.

En efecto, la ecuación característica asociada a la matriz jacobiana en el estado de equilibrio será:

$$\lambda^2 - m'(0)h\lambda + h = 0$$

por tanto, si $m'(0)$ es negativo, el estado de equilibrio es asintóticamente estable⁴, ya que las raíces, pudiendo ser complejas, siempre tienen parte real negativa.

Si $m'(0) = 0$, la ecuación característica admite un par de raíces complejas conjugadas y si $m'(0)$ llega a ser positivo, las raíces pasan a tener parte real positiva, luego, el estado de equilibrio es inestable.

Considerando $m'(0)$ como un parámetro de control que se mueve de valores negativos a positivos, tenemos una bifurcación de Hopf cuando se anula lo que nos garantizará, suponiendo la verificación de las hipótesis de esta bifurcación, la existencia de órbitas periódicas para valores de $m'(0)$ positivos pero próximos a cero.

Verificar las hipótesis exigidas nos lleva, en primer lugar, a determinar la nulidad de la derivada de la parte real de las raíces de la ecuación característica en la bifurcación:

$$\left. \frac{d}{dn'(0)} [hm'(0)] \right|_{m'(0)=0} = h \neq 0$$

y en segundo lugar, tendremos que determinar la forma normal del sistema de ecuaciones diferenciales para determinar que tales órbitas periódicas existen.

En la búsqueda de la forma normal primero trasladamos el estado de equilibrio $(p^*, 1)$ al $(0, 0)$ mediante el cambio de variable $x = \mu - 1$, $y = p - p^*$, en el nuevo sistema, si consideramos un nuevo cambio de variables $x = r$, $y = -\sqrt{h}s$, obtenemos el sistema equivalente en forma normal.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\sqrt{h}s - \sqrt{h}rs + [m(0) - \dot{m}(-hr)](r+1) \\ \dot{s} &= \sqrt{h}r \end{aligned}$$

donde la matriz asociada a la parte lineal tiene como diagonal no principal la parte imaginaria de las raíces de la ecuación característica en la bifurcación.

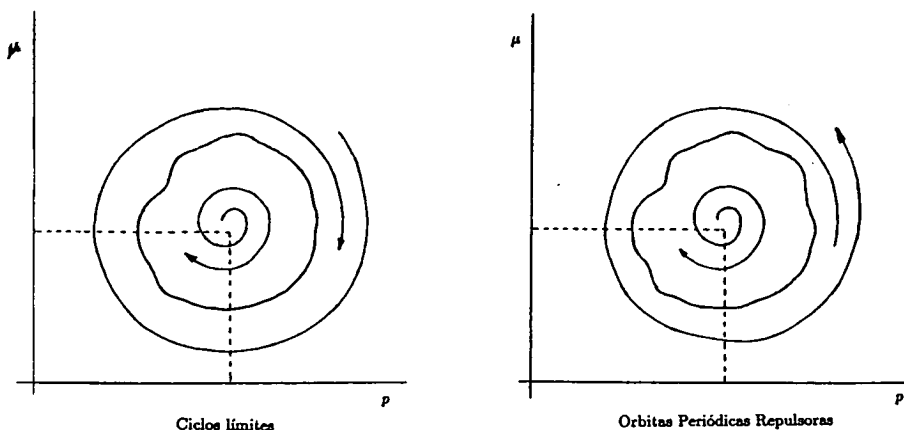
Asociado a la parte no lineal de este sistema se encuentra un parámetro (ver Guckenheimer, pág. 152) que si no es nulo, tendremos garantizada la existencia de comportamientos cíclicos entre las variables p y μ .

Después de operar, el valor de este parámetro resulta:

$$\frac{1}{16} h^2 (hm'''(0) - 2m''(0))$$

que, en el caso de que sea distinto de cero, nos garantiza órbitas periódicas, que son ciclos límites estables, si es positivo, y órbitas periódicas repulsoras si es negativo (gráfica 4).

⁴ Debido a este resultado, es por lo que Obst considera la política monetaria alternativa frente a la convencional.



Gráfica 4

Notemos que los valores de inflación y oferta-demanda de dinero interiores a la órbita periódica, salvo los valores del estado de equilibrio, al estar dentro de la zona de repulsión de éste, tenderán hacia los valores de la órbita periódica.

5. Conclusiones

La dinámica asociada a las ecuaciones propuestas por Obst presenta características relevantes, tanto en el caso de que la tasa de expansión monetaria se considere dependiente exclusivamente de la inflación o de la variación de la tasa de inflación.

En el primer caso, los comportamientos cíclicos entre las variables no deseados por Obst, y bajo la hipótesis de un único estado de equilibrio, se siguen manifestando en un intervalo más amplio de valores de la derivada de la tasa de expansión monetaria, así, estos comportamientos aparecen también si $m'(p) \in (0,1)$; en la política monetaria alternativa, las hipótesis exigidas por Obst marcan el límite de comportamientos no periódicos, ya que, para valores $m'(0)$ positivos, pero próximos a cero, surge una bifurcación de Hopf, que puede originar comportamientos periódicos entre las variables.

Si en la literatura económica no es infrecuente que la modificación de un parámetro dé origen a una bifurcación de Hopf (ver trabajos de Rasmussen, Mosekilde y Sterman (1985), Chiarella (1985), Zang (1989) o Reichlin (1990), la presencia de una órbita homocíclica, que aparece en el modelo cuando se consideran dos estados de equilibrio, uno punto de silla y el otro centro, no es común en los modelos económicos.

La diversidad de comportamientos dinámicos del modelo con la política monetaria convencional hace pensar que pueda ser un parámetro, que quizá venga especificado en la expresión explícita de la tasa de expansión monetaria, el responsable de ellos. En este caso, podría analizarse para qué valores de tal parámetro los distintos comportamientos dinámicos surgen y se destruyen. En particular, podría analizarse para qué valores la órbita homocíclica, que conlleva aspectos globales del flujo, subsiste.

Siguiendo los resultados obtenidos por Obst, los comportamientos cíclicos entre las variables parecen ser más comunes en la política monetaria convencional que en la alternativa, ya que no considerando la presencia de bifurcación de codimensión dos, si hay más de un estado de equilibrio existirán centros y, por lo tanto, al menos en su entorno existirán órbitas periódicas.

6. Bibliografía

- Chiang, A. C. (1987): *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. McGraw Hill.
- Chiarella, C. (1985): «Analysis of the Effects of Time Lags and Nonlinearities in a Macroeconomic Model Incorporating the Government Budget Constraint», en *New Mathematical Advances in Economic Dynamics*. (D. F. Batten y P. F. Lesse, Eds.). London. Croom Helm., págs. 131-152.
- Guckenheimer, J., y Holmes, P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York. Springer-Verlag.
- Majthay, A. (1985): *Foundations of Catastrophe Theory*. London. Pitman.
- Obst, N. P. (1978): «Stabilization Policy with an Inflation Adjustment Mechanism». *Quarterly Journal of Economics*. Mayo, págs. 355-359.
- Rasmussen, S., Mosekilde, E., y Sterman, D. (1985): «Bifurcations and Chaotic Behavior in a Simple Model of the Economic Long Wave». *System Dynamics Review*. Vol. 1, núm. 1, págs. 92-110.
- Reichlin, P. (1990): «Output-inflation Cycles in an Economy with Staggregated wage Setting». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 14, núms. 3-4, págs. 597-625.
- Verhulst, F. (1989): *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*. Berlín. Springer-Verlag.
- Zang, W. B. (1989): «Oscillations in the Rodriguez Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 13, núm. 3, págs. 485-497.