

## CONCEITOS TEÓRICOS SOBRE FIGURAS MULTIDIMENSIONAIS A MATEMÁTICA IMPLÍCITA DE PITÁGORAS A FERMAT

HOMAM ASAFKAN\*

### PARTE I

### INTRODUÇÃO

#### Breve Histórico que nos Remete às Figuras Multidimensionais

O matemático britânico Andrew Wiles deu prova definitiva para o Último Teorema de Fermat – UTF – como ficou conhecida a conjectura do matemático amador francês Pierre de Fermat (1601-1665). A odisséia desse gênio dos nossos tempos está registrada no livro de Simon Singh e relata bem a história do enigma intrincado e a busca comovente por uma demonstração “perdida” há mais de 350 anos.

Os matemáticos de todo o mundo estão convencidos de que Fermat não teria como unir conexões nos elos de lógica, capazes de provar o UTF em uma época onde a matemática ainda passava por sua infância.

Esse enigma teve alto grau de interesse e foi apresentado no século XVII. A charada é a seguinte:

“A equação  $x^m + y^m = z^m$ , na qual  $m$  é um inteiro qualquer não admite solução para  $x$ ,  $y$  e  $z$  inteiros diferentes de zero quando o expoente for maior que 2”.

Somente no final do século XX essa conjectura ganhou “status” de teorema quando foi finalmente demonstrado.

O que faz desse quebra-cabeça tão importante não é o fato de sua utilidade dentro da Matemática. Na verdade, não tem utilidade alguma. É o simples fato de ele ter sido concebido sem sua demonstração e seu autor ter afirmado que ela era simples. Isso intrigou os grandes gênios por séculos porque nenhum deles conseguia tal façanha. Sua

---

\* Pesquisador holandês, radicado no Brasil, vinculado à Universidade Federal do Rio de Janeiro.

demonstração recente contém uma matemática extremamente complexa, onde Wiles explorou técnicas avançadas, só acessíveis a poucos especialistas.

Diante disso há de se questionar: será que Fermat estava certo ou, pelo menos, falando a verdade, quando afirmava acreditar que a demonstração do UTF era simples?

Afinal, o que fez surgir o UTF? Um pensamento brilhante ou pura sorte?

As respostas nunca mais serão encontradas, sem que haja contestações. Embora seja tolice supor que haveria como recompor os pensamentos que nortearam a imaginação de Fermat no momento em que tornou célebre sua famosa declaração, sentimo-nos forçados a traçar planos de conjecturas a fim de obter pistas para aquilo que pode ser uma idéia interessante: teoricamente, é possível imaginar figuras  $(m - 1)$  dimensionais, onde  $m$  é um inteiro qualquer, maior que 2, e obtermos considerações sobre a projeção geométrica de qualquer figura multidimensional no plano.

— É de importância vital, para a devida compreensão desta sinopse, o fato de que, com exceção da complexidade no conceito de figuras multidimensionais, todos os elos de lógica que compõem o corpo deste artigo não contêm saltos intrincados de arranjos complexos em uma alta matemática. Ao contrário, refere-se a deduções axiomáticas facilmente verificadas e mostra as entrelinhas de uma história perdida, que vai do século VI a.C. até o século XVII. Nosso objetivo foi o de aflorar esse período, estudando e pesquisando, através de resquícios da História oficial. Ou seja, este trabalho tem sustentação científica em uma matemática implícita de Pitágoras a Fermat.

## PARTE II

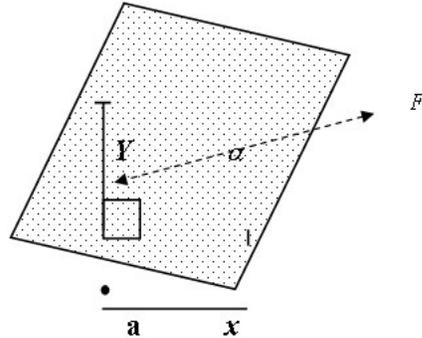
### A Definição de $m$ e de Triângulos Notáveis. Projeção de Figuras Multidimensionais.

Vamos começar supondo que Pierre de Fermat não construiu sua conjectura de uma forma casual. O que fez eclodir esse “instante de genialidade” foi resultado de conceitos acumulados em períodos descontínuos de reflexão. Vamos caminhar na

contramão da História e fazer o percurso contrário ao do matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Iniciamos mostrando uma questão trivial que remonta a Pitágoras:

**Seja a figura 1:**



Só existe triângulo retângulo quando a projeção do segmento de reta  $y$  sobre o segmento de reta  $x$  é ortogonal, existindo um único ponto  $\underline{a}$  da projeção. Ou seja: a projeção de  $y$  sobre  $x$  é nula se os lados menores do triângulo (retângulo) forem ortogonais.

Somente triângulos retângulos geram termos pitagóricos. Portanto, imaginando  $x$ ,  $y$  e  $z$  inteiros, diferentes de zero, podemos fazer uma interessante associação:  $(x + y)^2 = z^2 = x^2 + 2xy + y^2$ . O termo algébrico  $2xy$ , se suprimido, nos dá  $z^2 = x^2 + y^2$ . Não é difícil chegar à conclusão que aquele termo algébrico, analisado geometricamente na projeção ortogonal, só podia valer zero para gerar um termo pitagórico:  $z^2 = x^2 + y^2$ . Se chamarmos esse termo algébrico de  $\Delta_m$ , (para  $m = 2$ ), podemos afirmar que  $\Delta_m = 0$ , porque sua projeção  $\underline{a}$  (adimensional) torna  $\Delta_m$  nulo.

Vamos insistir:  $(x + y)^2 = z^2 = x^2 + y^2 + \Delta_m$  torna uma equação diofantina ( $\Delta_m = 0$ ). Ou seja: se a projeção de  $y$  sobre  $x$  for ortogonal, resulta em um único ponto  $\underline{a}$  da projeção e  $\Delta_m$  é nulo.

Fermat associou definitivamente o binômio  $(x + y)^2$  ao teorema de Pitágoras:  $x^m$ ,  $y^m$ ,  $z^m$ , fazendo  $\Delta_m$  tornar-se nulo na projeção ortogonal de  $y$  sobre  $x$ . O grande salto de lógica deu-se quando ele abstraiu-se, gerando o

binômio  $(x + y)^2 = z^2 = x^2 + y^2 + \Delta_m$ , para  $m > 2$ , e começou a especular as consequências da existência dessa equação subvertida, que acabara de descobrir.

A essa altura Fermat já havia montado uma peça-chave daquele quebra-cabeça, mas precisava provar que  $\Delta_m \neq 0$  quando  $m$  é maior que 2. Com argumentos primitivos de ligações lógicas, Fermat acabara de conhecer o ‘berçário’ da equação  $x^m = y^m + z^m$  que levaria seu nome. Bastaria tão-só analisar a nulidade ou não de  $\Delta_m$  para se chegar a conclusões surpreendentes.

Em outro momento ocorreu-lhe ser viável fazer uma supressão inócua de todos os termos de  $\Delta_m$ , exceto o termo estratégico, que gerou um grande atalho na lógica, porque bastava apenas um único termo de  $\Delta_m \neq 0$  para que  $\Delta_m \neq 0$ . Sendo definido como:

$$\Delta_m = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} y^i x^{m-i}, \quad \text{para } m \in \mathbb{Z} / m \geq 2,$$

ele escolheu o seguinte termo estratégico de  $\Delta_m$ :  $y^{m-1}x$ , porque permite analisar a projeção de uma figura  $y^{m-1}$  multidimensional sobre um segmento de reta  $x$ , repousando sobre um plano  $\alpha$ , que só podia dar mais de um ponto  $\underline{a}$  na projeção ortogonal, ou qualquer que fosse o tipo de projeção.

Para maior clareza sobre o que estamos tentando mostrar, repouse no plano  $\underline{a}$  um segmento de reta  $x$ . Crie uma figura  $(m-1)$  dimensional definida como Figura multidimensional. Se  $m = 2$ ,  $F_1$  é unidimensional. É fácil verificar que  $F_1$  pode ter sua projeção ‘contida’ em um único ponto  $\underline{a}$ , se esta for ortogonal, quando jogamos sua sombra no segmento de reta  $x$ , no plano  $\alpha$  (conforme **figura 1** apresentada no início desta Parte).

É conclusão axiomática o fato de que:

$$\boxed{\text{Se } m > 2, \text{ então } : F_{(m-1)} > F_1 \Leftrightarrow F_{(m-1)} \not\subset F_1}$$

Não teria sentido, então conceber um plano  $\alpha$  ( $F_2$ ) no espaço unidimensional  $F_1$ , (como um segmento de reta  $x$ , em um único ponto  $\underline{a}$ ).

Podemos propor daí a seguinte conclusão:

Se  $m = 3$ , então podemos afirmar que não é possível haver projeção “contida” em um único ponto  $\underline{a}$ , mesmo sendo esta ortogonal, de uma figura  $F_2$  sobre  $F_1$ , no plano  $\alpha$ .

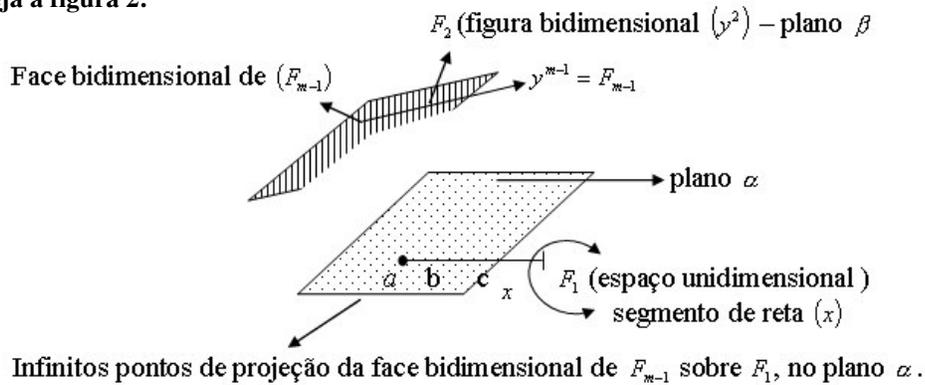
Significa dizer que se  $m = 3$ ,  $F_2$  possui infinitos pontos projetados sobre  $F_1$ , no plano  $\alpha$ , qualquer que seja o tipo de projeção. Concluimos então que:

Se  $m = 3 \Rightarrow \Delta_m \neq 0$

Quando Fermat chegou a essa conclusão, logo pôde prever o seguinte corolário (baseado no axioma acima):

Se,  $m \geq 3$ , então podemos afirmar que não é possível haver projeção “contida” em um único ponto  $\underline{a}$ , mesmo sendo esta ortogonal, de uma figura  $F_{(m-1)}$  sobre,  $F_1$  no plano  $\alpha$ .

Seja a figura 2:



— Lembre-se que temos a projeção de  $y^{m-1}$  sobre um segmento de reta  $x$ . por isso, escolhemos o termo de  $\Delta_m = y^{(m-1)}x$ .

Agora que Fermat conseguiu provar que  $\Delta_m \neq 0$ , quando  $m$  é maior que 2, pôde finalmente montar todo o quebra-cabeça e concluir sua conjectura. Isso explicaria porque aquele sábio francês concebeu o seu “Teorema” de forma tão simples, sem precisar demonstrá-lo.

Vamos esboçar um resumo na Parte III. Antes, contudo, conheça a idéia de triângulos notáveis no apêndice, pág. 17.

### PARTE III – RESUMO

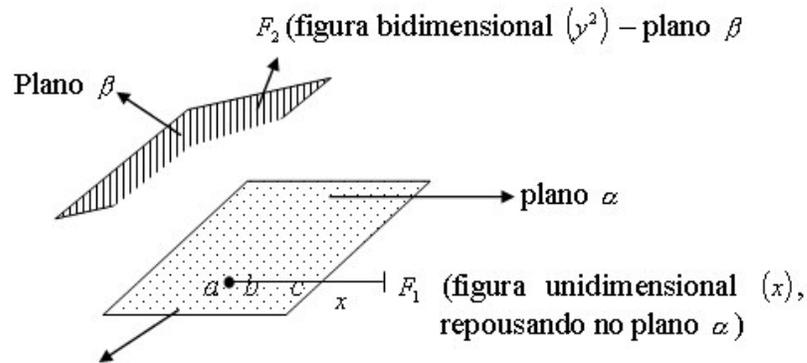
#### ARGUMENTOS GEOMÉTRICOS PRIMÁRIOS

##### (DEMONSTRAÇÃO CONTEXTUAL)

Imagine uma figura  $(m-1)$  dimensional, para  $m > 2$ :  $F_{(m-1)}$ , projetada sobre um segmento de reta  $x$  cuja sombra se espelhe no plano  $\alpha$ . É impossível, mesmo com o sol a pino, obtermos sombra nula.

Vamos supor que  $m = 3$ , obtemos a seguinte figura ( $F_2$ ):

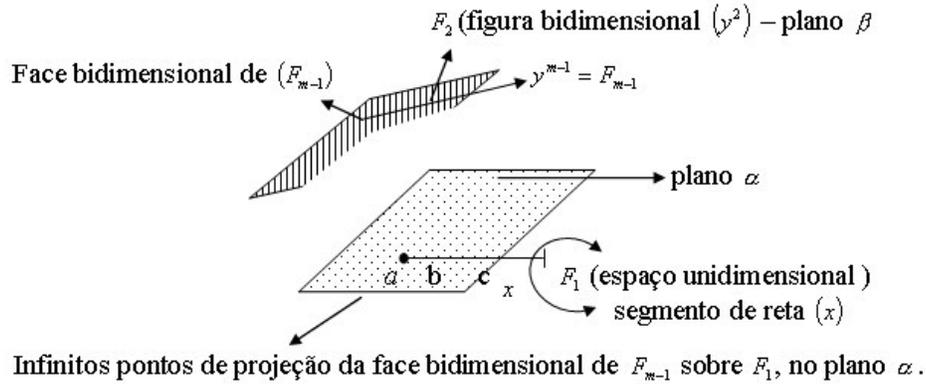
Seja a figura 3:



Projeção de infinitos pontos de  $y^2$  sobre  $F_1(x)$  no plano  $\alpha$ .

Existem infinitos pontos da projeção de  $y^2$  sobre  $(x)$ , o que acarreta um  $\Delta_m \neq 0$ . Porque  $F_2$  projeta sombra sobre  $F_1(x)$ , de modo que é impossível, qualquer que seja o tipo de projeção, obtermos sombra nula. Verificamos facilmente que, qualquer

que seja a figura  $(m-1)$  dimensional, para  $m \geq 3$  ( $F_{(m-1)}$ ), haverá sempre a projeção de infinitos pontos sobre o segmento de reta  $x$ , no plano  $\alpha$ , pois, qualquer que seja a figura, ela terá necessariamente, uma face bidimensional, conforme **figura 2, na página a seguir.**

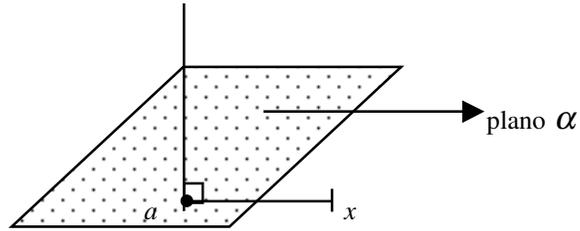


Infinitos pontos de projeção da face bidimensional de  $F_{m-1}$  sobre  $F_1$ , no plano  $\alpha$ .

Existem infinitos pontos da projeção de  $y^2$  sobre  $x$ , o que acarreta um  $\Delta_m \neq 0$ , porque  $F_2$  projeta sombra sobre  $F_1$ , de modo que é impossível, qualquer que seja o tipo de projeção, obtermos sombra nula. Verificamos facilmente que, qualquer que seja a figura  $(m-1)$  dimensional, para  $m \geq 3$  ( $F_{(m-1)}$ ), haverá sempre a projeção de infinitos pontos sobre o segmento de reta  $x$ , no plano  $\alpha$ , pois qualquer figura terá necessariamente uma **face bidimensional (ver figura 2)** e, portanto, não pode estar contida em um ponto  $\underline{a}$  do seguimento de reta  $x$ . Significa dizer que  $\Delta_m \neq 0$ , quando  $m > 2$ , porque, na verdade, como comprovamos, são infinitos, pontos da figura  $F_{m-1}$  projetada sobre o plano  $\alpha$ , quando esta tem pelo menos uma face bidimensional, que é o caso de  $m > 2$ . Tornamo-nos repetitivos propositadamente, a fim de que fique devidamente claro que quando  $\Delta_m \neq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ , logo:  $z^m = x^m + y^m + \Delta_m$ , não pode formar uma **equação de Fermat**:  $z^m = x^m + y^m$

Agora se  $m = 2$ , obteremos a seguinte figura, neste caso, o sol estando a pino (projeção **ORTOGONAL**).

Seja a figura 3:



Existe um único ponto  $\underline{a}$  da projeção **ORTOGONAL** de  $y$  sobre  $x$ , que acarreta  $\Delta_m = 0$ . De modo geral, poderíamos dizer que sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  inteiros diferentes de zero,  $(x + y)^m = z^m = x^m + y^m + \Delta_m$  seria uma equação de Fermat, não fosse a existência de  $\Delta_m$  no desenvolvimento daquele binômio, porque  $(x + y)^m = z^m = x^m + y^m + \Delta_m$  e a equação em destaque é  $z^m = x^m + y^m$ .

Como, **por definição**  $\Delta_m = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} y^i x^{m-i}$ , para  $m \in \mathbb{Z} / m \geq 2$ ,

podemos observar que  $\Delta_m$  só foi considerado sob o aspecto geométrico da projeção de  $y^{m-1}$  sobre  $x$ . No caso de  $m = 2$ , a projeção teve de ser **ORTOGONAL** para termos  $\Delta_m = 0$ , pois não sendo esta **ORTOGONAL**, teríamos um fatídico  $z^2 \neq x^2 + y^2$ , ou melhor,  $z^2 = x^2 + y^2 + \Delta_m$  (equação não-fermatiana).

As conseqüências das proposições apresentadas neste estudo habilita-nos a apresentar agora a Parte IV, onde procuramos reunir argumentos lógicos capazes de tornar consistente a demonstração inusitada de um teorema.

## PARTE IV

### A SOLUÇÃO DE UM PEQUENO PROBLEMA

#### I. Conceito Fundamental de $\Delta_m$ - Definição

Seja  $\Delta_m = (x + y)^m - (x^m + y^m)$ , de modo que

$$z^m = (x + y)^m \quad \therefore \quad z^m = x^m + y^m + \Delta_m$$

Podemos verificar que a equação diofantina  $z^m = x^m + y^m$ , para  $x, y$  e  $z$  inteiros diferentes de zero, está **DEFINIDA** se, e somente se, obtivermos um  $\Delta_m$  nulo, ou seja,

$\Delta_m = 0$ , no desenvolvimento do binômio. Destaca-se intrínseca relação entre

$$(x + y)^m = z^m = x^m + y^m + \Delta_m \text{ e a equação diofântica}$$

$$z^m = x^m + y^m \text{ onde, aliás, o único diferencial é o } \Delta_m, \text{ que terá,}$$

para a demonstração do Teorema, uma **REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA**.

**Por definição**  $\Delta_m = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} y^i x^{m-i}$ , para  $m \in \mathbb{Z} / m \geq 2$ .

## II. Análise da Representação Geométrica de $\Delta_m$

A projeção é operação geométrica fundamental para se entender o conceito de  $\Delta_m$  que deve ser limitado a  $y^i x^{m-i}$ , ou ainda, mais precisamente ao termo  $y^{m-1} x$ .

Para efeito de prova, limita-se tão-somente à projeção de  $y^{m-1} x$  sobre o seguimento de reta  $x$ , onde  $y^{m-1} x$  representa uma figura multidimensional  $(F_{(m-1)})$  e  $x, F_1$  para

$m > 2$ , que nos dá a seguinte declaração axiomática:  $F_{(m-1)} > F_1 \Leftrightarrow F_{(m-1)} \not\subset F_1$  onde

podemos verificar o seguinte corolário:

Se,  $m > 2$ , então podemos afirmar que não é possível haver projeção “contida” em um único ponto  $\underline{a}$ , mesmo sendo esta ortogonal, de uma figura  $(F_{(m-1)})$  sobre  $F_1$ , no plano  $\alpha$ .

Seja agora o termo estratégico  $y^{m-1} x$  de  $\Delta_m$ . Chamemos  $A$  o conjunto de pontos formados pela projeção de  $x$  sobre  $y^{m-1}$  e  $B$  o conjunto de pontos da projeção de  $y^{m-1}$  sobre  $x$ .

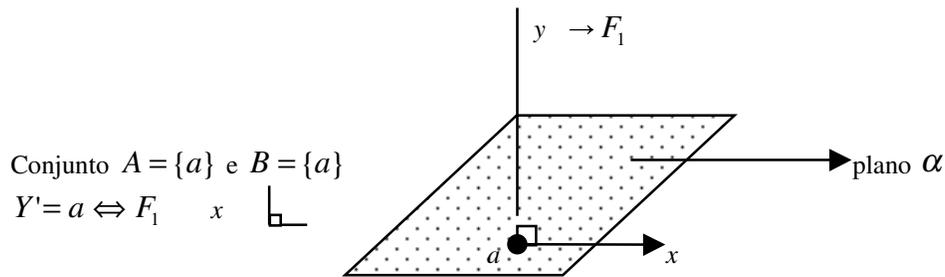
A projeção é  $(y^{(m-1)})$  para uma figura  $(F_{(m-1)})$  projetada sobre o plano  $\alpha$  onde repousa o seguimento de reta  $x$ .

**II-a. Análise de  $\Delta_m$  para  $m = 2$** 

Temos  $A$ , conjunto de pontos formados pela projeção **ORTOGONAL** de  $x$  sobre  $y$  e  $B$ , de  $y$  sobre  $x$ . Como  $x$  e  $y$  representam segmentos de reta, dizemos que  $x$  e  $y$  são figuras reflexivas, ou seja,  $F_{(m-1)} = F_{(2-1)} = F_1 = x = y$  (figuras unidimensionais).

Daí temos:

( $x$  e  $y$  representam segmentos de reta).



Por serem figuras reflexivas,  $A \cap B$  forma conjunto unitário que, por definição, acarreta  $\Delta_m = 0$  (no caso de  $m = 2$ ,  $\Delta_m$  só apresenta um único termo:  $2y'x$ ).

Isso explicaria por que um triângulo só pode ser retângulo quando  $z^2 = x^2 + y^2$ , ou seja, a projeção **ORTOGONAL** acarreta um  $\Delta_m$  **nulo**. Se a projeção não fosse **ORTOGONAL**  $\Delta_m \neq 0$ , ou seja,  $z^2 \neq x^2 + y^2$  e não teríamos triângulos retângulos:  $z^2 = x^2 + y^2 (+ \Delta_m)$ .

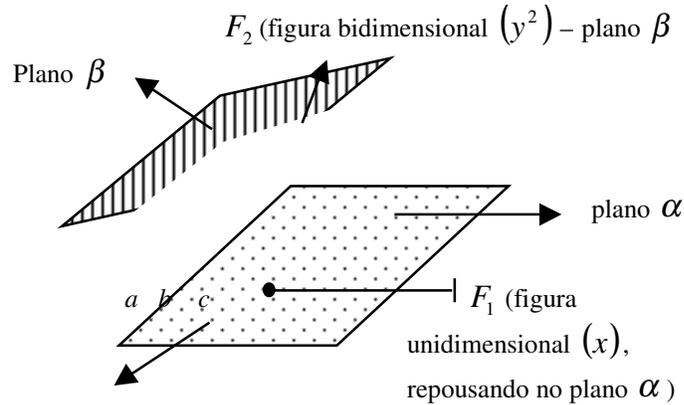
Portanto, temos que:  $\Delta_m = 0$  para  $m = 2$ , no caso da projeção ortogonal de  $y$  sobre  $x$ .

**II-b. Análise de  $\Delta_m$  para  $m = 3$** 

Baseados, no que verificamos no corolário acima, se  $m = 3$ , então podemos afirmar que não é possível haver projeção “contida” em um único ponto  $\underline{a}$ , mesmo sendo esta ortogonal, de uma figura  $F_2$  sobre  $F_1$ , no plano  $\alpha$ .

Vemos infinitos pontos da projeção de  $y^2 (F_2)$  sobre  $x (F_1)$  (ainda que seja ORTOGONAL).  $x$  representa um segmento de reta e  $y^2$  representa um plano.

Quando  $m = 3$ , obtemos a seguinte figura 3, ( $F_2$ ), na página seguinte:



Projeção de infinitos pontos de  $y^2$  sobre  $F_1 (x)$  no plano  $\alpha$ .

Se  $m = 3$ , o conjunto  $B = \{a, b, c, \dots\}$  é formado por infinitos pontos de  $y^2$  sobre  $x$ , que é equivalente dizer que temos uma figura bidimensional sobre uma figura unidimensional. Sabemos que se  $m > 2$ , então  $F_{(m-1)} > F_1 \Rightarrow F_{(m-1)} \not\subset F_1$ . Assim, temos  $A \cup B = \{a, b, c, \dots\}$  que acarreta  $\Delta_m \neq 0$ , ou seja,  $z^3 \neq x^3 + y^3$  porque obtemos infinitos pontos de projeção de  $F_2$  sobre  $F_1$ .

Portanto, temos que:  $\Delta_m \neq 0$ , para  $m = 3$ .

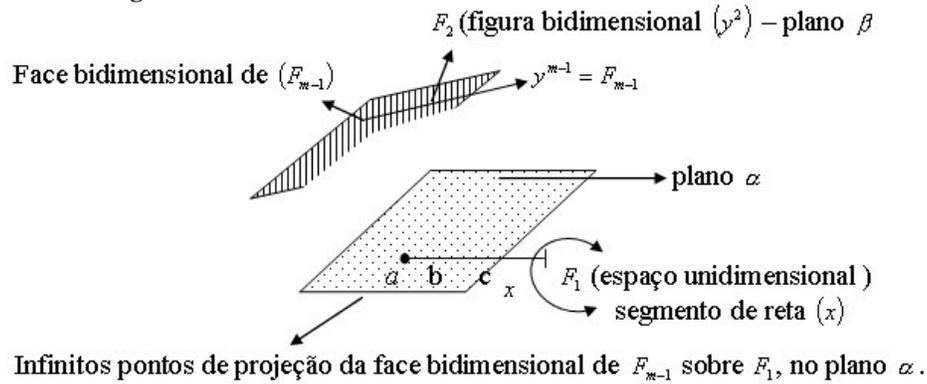
### II-c. Análise de $\Delta_m$ para $m > 3$

Baseados ainda no referido corolário acima e considerando o exposto em II-b., podemos deduzir que  $z^m \neq x^m + y^m$  para qualquer tipo de projeção, porque, para  $m \geq 3$ , haverá sempre o termo  $y^{m-1}x$ , com infinitos, pontos da projeção de  $y^{m-1}$  sobre  $x$  ( $F_{(m-1)}$  sobre  $F_1$ ). Qualquer que seja o  $m$  maior que 2, haverá sempre, necessariamente, pelo menos uma face bidimensional da figura geométrica multidimensional (ver figura abaixo). Isso leva-nos a concluir que a análise de  $\Delta_m$  para  $m = 3$  é equivalente à análise de  $\Delta_m$  para  $m > 2$ . Aliás, o corolário acima exposto

refere-se a qualquer  $m$  maior que 2 e não apenas  $m = 3$ .

Portanto, temos que:  $\Delta_m \neq 0$ , para  $m > 2$

Conforme figura 2:



### III. A Conseqüência da Prova de um Teorema

Em resumo:

Se  $m = 2 \rightarrow A \cup B = \{a\} \Leftrightarrow \Delta_m = 0$  (no caso específico de projeção ORTOGONAL que dá origem aos ternos pitagóricos).

Se  $m > 2 \rightarrow A \cup B = \{a, b, c, \dots\} \Leftrightarrow \Delta_m \neq 0$  (qualquer que seja o tipo de projeção).

Assim observamos que se  $m > 2$ ,  $\Delta_m \neq 0$ . Como, por definição,  $z^m = x^m + y^m$  se, e somente se,  $\Delta_m = 0$ , a equação diofantina  $x^m + y^m = z^m$ , na qual  $m$  é um inteiro qualquer não admite solução para  $x, y$  e  $z$  inteiros diferentes de zero quando o expoente for maior que 2.

A demonstração desse Teorema só se torna consistente se restringirmos o universo dos números ao conjunto dos inteiros que dão origem à equação de Fermat ( $\Delta_m = 0$ ). Portanto, uma demonstração considerando o campo dos Reais tornar-se-ia absurda uma vez que não podemos pôr em questionamento algo que não existe: o Teorema tem sua condição de existência em  $Z^*$  para  $x, y$  e  $z$  e  $\Delta_m$  nulo.

**PARTE V – EPÍLOGO****O DEVIDO MÉRITO A UM SÁBIO FRANCÊS**

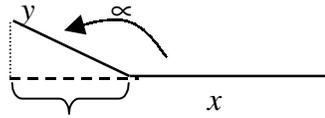
Do estudo apresentado, o conceito teórico sobre figuras multidimensionais parece complexo para um matemático do século XVII. Aliás, parece-nos dúbio conceber essas entidades projetadas sobre um plano, se não sabemos sequer se elas existem, mesmo para a alta matemática que se inicia no século XXI. Desconsiderando o alto nível de abstração sobre o tema, podemos afirmar que praticamente todos os argumentos matemáticos aqui expostos poderiam ser colocados por um pesquisador, mesmo que diletante, sem qualquer espanto que tenha vivido no século XVII. Defendemos a tese de que Pierre de Fermat de fato concebeu o Último Teorema de Fermat através de conexões lógicas consistentes, mas foi “preguiçoso” para formalizar suas idéias em linguagem matemática. Essa, aliás, parecia uma característica que lhe era peculiar, inerente a sua personalidade, pelo que atestam seus biógrafos.

Acreditamos que Fermat olhou atentamente à sua direita e, ao alcance de seus olhos, viu o UTF. Outros, no entanto, olharam para a esquerda e precisaram dar a volta ao mundo na teoria dos números para vislumbrar uma genialidade turva desse grande pensador francês.

**APÊNDICE****TRIÂNGULOS NOTÁVEIS – DEFINIÇÃO**

Para unir os elos de uma corrente lógica que culminaram na constatação de que, tendo  $x^m + y^m + \Delta_m = z^m = (x + y)^m$ , só podemos obter a equação de Fermat:  $x^m + y^m = z^m$ , se  $\Delta_m = 0$ , é preciso conceber a idéia dos triângulos notáveis. Define-se triângulo notável como todo aquele que tem um ângulo interno  $\infty$ , formado pelos dois lados menores do triângulo, tendendo a  $180^\circ$ . Dessa forma, a projeção do lado  $y$  sobre o lado  $x$  (definido como  $y'$ ) se aproxima de  $y$ .

Ou seja,  $\lim_{\alpha \rightarrow 180^\circ} y' = y$



$y'$  (projeção de  $y$  sobre  $x$ )

### — $\Delta_m$ e o triângulo notável

Mostraremos que, sendo  $z^m = (x + y)^m = x^m + y^m + \Delta_m$ , a entidade  $\Delta_m$  pode ser a representação geométrica da projeção de  $y^{m-1}$  sobre  $x$ , para efeito da verificação da sua nulidade ou não, para  $m > 2$ .

Como, no caso do triângulo notável,  $y$  é unidimensional,  $m$  só pode valer 2 (porque é a projeção de  $y^{(m-1)}$  sobre  $x \Leftrightarrow y^1$  sobre  $x$ . Logo:  $m - 1 = 1 \therefore m = 2$ ).

Portanto, temos:  $z^2 = x^2 + y^2 + \Delta_m$

Por definição  $\Delta_m = 2y'x$  (representação geométrica da projeção de  $y$  sobre  $x$ ).

Note que quando  $\alpha$  se aproxima de  $180^\circ$ ,  $\Delta_m$  aproxima-se de  $2yx$ .

Logo, temos:  $z^2 = x^2 + y^2 + 2xy \therefore z^2 = (x + y)^2$ .

Se substituirmos  $y(F_1)$  por  $y^{(m-1)}(F_{(m-1)})$ , de modo análogo, temos  $\Delta_m$  como representação geométrica da projeção de  $y^{(m-1)}$  sobre  $x$  e, conseqüentemente temos que  $z^m = (x + y)^m = x^m + y^m + \Delta_m$ , onde  $\Delta_m$  implica projeção de  $y^{m-1}$  sobre  $x$ , para  $m > 2$ . (c.q.d.)

### UMA CONSIDERAÇÃO IMPORTANTE

No caso específico de  $\alpha = 90^\circ$ ,  $y' = \underline{a}$ , logo  $\Delta_m = 0$  e  $z^m = x^m + y^m$  (sem  $\Delta_m$ ) gera uma equação de Fermat.

Daí termos concluído que se  $m = 2$ ,  $(y^{(m-1)})' = \underline{a}$  acarreta  $\Delta_m = 0$  e conseqüentemente  $z^m = x^m + y^m$  gera uma equação de Fermat, que se distingue de  $z^m = x^m + y^m + \Delta_m$  (equação não-fermatiana). Lembre-se que numa equação de Fermat  $x, y$  e  $z$  são inteiros diferentes de zero.

Para obtermos uma equação de Fermat, o primeiro passo é analisarmos a projeção do  $y^{m-1}$  sobre  $x$  igual a  $(y^{(m-1)})'$ . Se esta gerar  $\Delta_m \neq 0$ , necessariamente teremos uma equação não-fermatiana (É o que verificamos quando  $m$  é maior que 2).

Note que a importância dessa consideração consiste em mostrar a diferença existente entre  $z^m = x^m + y^m$  (equação de Fermat) e uma equação não-fermatiana:  $z^m = x^m + y^m + \Delta_m$   $\Delta_m \neq 0 \Leftrightarrow m > 2$ .

Dessa forma mostra-se que uma equação de Fermat só tem chances de existir quando  $\Delta_m = 0$  no binômio  $(x + y)^m = z^m = x^m + y^m + \Delta_m$ , sendo  $x, y$  e  $z$  inteiros diferentes de zero. Ou seja: *Se existe  $z^m = x^m + y^m$ , então  $\Delta_m = 0$*  (por definição).

**Nota:** Volte a pág. 285