ESTRATEGIAS OPTIMAS EN EL JUEGO DIFERENCIAL DE LANCASTER, CON TANTO DE ACTUALIZACION

María Dolores Soto Torres
Ramón Fernández Lechón

RESUMEN.— Partiendo del juego diferencial planteado por K. Lancaster donde tanto los trabajadores como los capitalistas tratan de maximizar, conociendo la evolución del stock de capital, su consumo sobre un horizonte temporal finito, nosotros, consideramos que los objetivos no son aquellos, sino que ambos participantes tratan de maximizar el valor actual de su consumo, cuando los dos actualizan al mismo tanto.

Con este planteamiento determinamos las estrategias optimales en ciclo abierto de Stackelberg, con los trabajadores como líderes, y las estrategias de la solución cooperativa de Pareto en el óptimo social. Estos resultados, junto con los obtenidos por R. Gradus con la solución no cooperativa en ciclo abierto de Nash, nos permiten comparar los resultados.

1. INTRODUCCION

El juego diferencial planteado por K. Lancaster (1973) trata de probar la ineficacia del sistema capitalista al comparar las soluciones no cooperativas de Nash con las soluciones cooperativas de Pareto, en el óptimo social.

Este planteamiento es analizado posteriormente por Pohjola (1983) que obtuvo las soluciones en ciclo abierto de Stackelberg analizando tanto la posición de líder, como de seguidores de los capitalistas. En la obtención de estas soluciones, Pohjola, siguiendo la metodología de Wishart y Olsder (1979), utiliza la función delta de Dirac que complica en exceso los cálculos. A. de Zeeuw (1992) obtiene las soluciones en ciclo abierto de Stackelberg considerando a los trabajadores como líderes y a los capitalistas como seguidores y utilizando exclusivamente el Principio del Máximo de Pontriaguin.

En este trabajo, nosotros, siguiendo la técnica desarrollada por A. de Zeeuw, determinamos las estrategias en ciclo abierto de Stackerberg, en el modelo de Lancaster, considerando actualizaciones en los funcionales objetivos. La actualización de los objetivos, ya la considera R. Gradus (1988) en el modelo de Lancaster, aunque Gradus realiza una formulación entre gobierno y empresarios.

Los desarrollos de Gradus, y en particular los realizados en el modelo con actualizaciones, se limitan al cálculo de las soluciones no cooperativas de Nash, de ahí que sólo sean posibles las comparaciones de su trabajo con el modelo básico.

En la primera sección de este trabajo, nosotros determinamos la solución no cooperativa de Stackelberg con los trabajadores como líderes, suponiendo que trabajadores y capitalistas actualizan al mismo tanto. En la segunda sección, determinamos las soluciones cooperativas de Pareto, el óptimo social, y con los resultados proporcionados por Gradus sobre las soluciones de Nash, podemos realizar una comparación entre todas ellas.

2. LAS SOLUCIONES EN CICLO ABIERTO DE STACKELBERG

Considerando los tantos de actualización en el modelo de Lancaster, tendremos, que los trabajadores trataran de maximizar el valor actual de su consumo sobre un horizonte temporal finito:

$$\max_{z_1 \leq u_1 \leq z_2} \int_0^T e^{-\delta t} u_1 aK \, dt$$

donde K es el stock de capital, a el ratio output-capital y u_1 el tanto de consumo que suponemos está comprendido entre z_1 y z_2 con $0 < z_1 < z_2 < 1$. Por otra parte los capitalistas, que tienen como variable de control el tanto de inversión u_2, $0 \leq u_2 \leq 1$, tratarán de maximizar el valor actual de su consumo sobre el mismo horizonte temporal:

$$\max_{0 \leq u_2 \leq 1} \int_0^T e^{-\delta t} (1 - u_1)(1 - u_2) aK \, dt$$

Además, tanto los trabajadores como los capitalistas, conocen que el capital satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{K} = (1 - u_1) u_2 aK, \quad K(0) = K_0$$

Supongamos que los trabajadores son los líderes y los capitalistas los seguidores, entonces, para encontrar la función de reacción de los seguidores planteamos exclusivamente su problema de control. El hamiltoniano asociado será:

$$H_2 = (1 - u_1)\,(1 - u_2)aKe^{-\delta t} + \psi_2\,(1 - u_1)u_2aK$$

y aplicando las condiciones necesarias del principio del Máximo, que resultan también suficientes[1] tendremos que la solución óptima ha de verificar:

$$-\dot{\psi}_2 = (1 - u_1)\,(1 - u_2)ae^{-\delta t} + \psi_2\,(1 - u_1)u_2a, \quad \psi_2(T) = 0$$

con

$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi_2(t) > e^{-\delta t} \\ 0 & \text{si } \psi_2(t) < e^{-\delta t} \end{cases}$$

además de la ecuación diferencial de acumulación de capital.

Considerando el comportamiento de la variable de coestado ψ_2, tenemos dos posibilidades.

— $\psi_2\,(0) > 1$, entonces $u_2 = 1$, lo que no puede mantenerse durante un intervelo finito. Por tanto, si esta es la condición inicial de ψ_2, existirá un momento t, tal que $\psi_2(t) = e^{-\delta t}$, a partir del cual el control u_2 será el nulo, debido al comportamiento siempre decreciente de ψ_2.

— $\psi_2\,(0) < 1$, ahora como $z_1 \leq u_1 \leq z_2$, tendremos dada la ecuación diferencial que satisface ψ_2, que le momento terminal T debería ser menor o igual a[2]:

$$\frac{1}{\delta}\ \ln\ \frac{a(1 - z_2)}{a(1 - z_2) - j}$$

que implica imponer limitaciones en el horizonte temporal del modelo, que supondremos suficientemente amplio.

Entonces, si las políticas $u_2 = 1$ o $u_2 = 0$ no pueden mantenerse individualmente sobre el horizonte temporal, y dado el comportamiento decreciente de ψ_2 en ambas, tendremos que la reacción de los capitalistas sobre los trabajadores será: $u_2(t) = 1$ en $[0, t_2]$ y $u_2(t) = 0$ en $(t_2, T]$. El capital, por tanto, crecerá en el intervalo $[0, t_2]$ hasta alcanzar $K(t_2) > K_0$ y en el

1 Kamien, M. I. y Schwatrz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization.* Nort-Holland, p. 123.

2 La existencia de este valor exige que $a(1 - z_2) > j$, condición que supondremos se verifica en el modelo. Esta misma condición es exigida por Gradus, R. H. (1988): «The Reaction of The Firm on Gobernmental Folicy: A. Game-Theoretical Approach» en *Optimal Control Theory and Economic Analysis 3* (G. Feichtinger, Ed.). Nort-Holland, p. 274.

intervalo $(t_2, T]$ mantendrá un valor constante $K(t_2)$. Pero, además, en el intervalo $(t_2, T]$ y dado que $u_2 = 0$ en él, la resolución de la ecuación diferencial planteada, ahora, para ψ_2 nos proporciona:

$$a \int_{t_2}^{T} u_1 e^{-\delta t}\, dt = \left(\frac{a}{\delta} - 1\right) e^{-\delta t_2} - \frac{a}{\delta} e^{-\delta T}$$

y teniendo en cuenta las cotas para el control de los trabajadores, tendremos que t_2 tiene que pertenecer al intervalo

$$\left[T + \frac{1}{\delta} \ln \frac{a(1 - z_2) - \delta}{a(1 - z_2)}, T + \frac{1}{\delta} \ln \frac{a(1 - z_1) - \delta}{a(1 - z_1)}\right] \qquad (1)$$

El problema para los líderes puede plantearse:

$$\max_{z_1 \leq u_1 \leq z_2} \int_{0}^{t_2} e^{-\delta t} u_1 aK\, dt + K(t_2) \left[\left(\frac{a}{\delta} - 1\right) e^{-\delta t_2} - \frac{a}{\delta} e^{-\delta T}\right]$$

sujeto a la modificación del capital.

Los trabajadores, por tanto, tendrán que determinar no sólo los valores de su control u_1, sino también, el momento terminal t_2, sabiendo que tiene que pertencer al intervalo (1).

La resolución de este problema de control, donde las condiciones necesarias del principio del Máximo son también suficientes[3], nos lleva al planteamiento del hamiltoniano:

$$H_1 = u_1 aK e^{-\delta t} + \psi_1 (1 - u_1) aK$$

y a las condiciones:

$$-\dot{\psi}_1 = a u_1 e^{-\delta t} + a \psi_1 (1 - u_1)$$

$$\psi_1 (t_2) = e^{-\delta t_2} \left(\frac{\bar{a}}{\delta} - 1\right) - \frac{\bar{a}}{\delta} e^{-\delta T} \qquad (2)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} z_1 & \text{si } \psi_1(t) > e^{-\delta t} \\ z_2 & \text{si } \psi_1(t) < e^{-\delta t} \end{cases}$$

3 Kamien, M. I. y Schwatrz, N. L. (1981): *Op. cit.*, pp. 123 y 148.

pero, además, la condición (1), requerirá:

$$G(t_2) = \begin{cases} 0 & \text{con } t_2 \text{ perteneciente al interior de (1)} \\ \geq 0 & \text{con } t_2 = T + \frac{1}{\delta} \ln \frac{a(1 - z_1) - \delta}{a(1 - z_1)} \\ \leq 0 & \text{con } t_2 = T + \frac{1}{\delta} \ln \frac{a(1 - z_2) - \delta}{a(1 - z_2)} \end{cases}$$

donde

$$G(t_2) = H_1(t_2) - \delta K(t_2) e^{-\delta t_2} (\frac{a}{\delta} - 1)$$

Busquemos la posible solución interior, para ello, en la expresión $G(t_2) = 0$, sustituimos $\psi_1(t_2)$ por (2) y obtenemos:

$$t_2 = T + \frac{1}{\delta} \ln \frac{a(1 - u_1) + (a - 2\delta) + \delta^2}{a(1 - u_1)a} \qquad (3)$$

si este valor lo sustituimos en (2), obtenemos:

$$\psi_1(t_2) = e^{-\delta t_2} \left(\frac{a(1 - u_1) - \delta}{a(1 - u_1)} \right) < e^{-\delta t_2}$$

por tanto, el control en t_2 será z_2: $u_1(t_2) = z_2$. Este resultado podemos sustituirlo en (3) y obtenemos el valor de t_2.

Pero al considerar $G(t_2) = 0$, estamos suponiendo que t_2 está en el interior del intervalo (1) y esto ocurre si:

$$a(1 - 2z_2) < \delta < \frac{a(1 - z_2)(1 - 2z_1)}{1 - z_1}$$

Luego si δ verifica la desigualdad anterior[4], los controles optimales serán: $u_1(t) = z_1$, $u_2(t) = 1$ si $t \in [0, t_1]$; $u_1(t) = z_2$, $u_2(t) = 1$ si $t \in (t_1, t_2]$ y en el intervalo $(t_2, T]$, $u_2(t) = 0$ y $u_1(t)$ cualquier control admisible que satisfaga:

$$a \int_{t_2}^{T} u_1 e^{-\delta t} \, dt = \frac{\delta [a(1 - z_2) - \delta]}{a(1 - z_2)(a - 2\delta) + \delta^2}$$

4 Para que exista algún δ, z_1 tiene que ser menor que $\frac{1}{2}$.

donde el límite inferior de la integral es (3), sustituyendo u_1 por z_2. El momento t_1 viene determinado por la expresión:

$$t_1 = t_2 - \frac{1}{a(1-z_2)-\delta} \ln \frac{(a-\delta)\, a(1-z_2)}{a(1-z_2)\,(a-2\delta)+\delta^2}$$

Si $0 < \delta \leq a(1-2z_2)$, el punto t_2 encontrado anteriormente, que obviamente ya no es la solución del problema, se encuentra a la izquierda del intervalo (1) y la función G en este intervalo es no positiva, por tanto, el tiempo terminal del problema será:

$$t_2 = T + \frac{1}{\delta} \ln \frac{a(1-z_2)-\delta}{a(1-z_2)}$$

con

$$\psi_1(t_2) = \frac{az_2}{a(1-z_2)-\delta}\, e^{-\delta T}$$

que podrá ser mayor, menor o igual que $e^{-\delta t_2}$ dependiendo del valor de z_2. Pero, la restricción $0 < 1 - 2z_2$, implicará que sólo z_2 podrá ser menor que $\frac{1}{2}$. Entonces $\psi_1(t_2) < e^{-\delta t_2}$ y los controles optimales serán $u_1(t) = z_1$, $u_2(t) = 1$ en $[0, t_1]$; $u_1(t) = z_2$, $u_2(t) = 1$ en $(t_1, t_2]$, $u_1(t) = z_2$, $u_2(t) = 0$ en $(t_2, T]$, donde t_1 es el momento que satisface $\psi_1(t_1) = e^{-\delta t_1}$ y viene determinado por la expresión:

$$t_1 = \frac{1}{a(1-z_2)-\delta}\left(-\delta T + a(1-z_2)t_2 + \ln \frac{az_2}{a(1-z_2)-\delta} + \ln \frac{1+\dfrac{a(1-z_2)}{a(1-z_2)-\delta}}{1+\dfrac{az_2}{a(1-z_2)-\delta}}\right)$$

En el caso de que $\delta \geq \dfrac{a(1-z_2)\,(1-2z_1)}{1-z_1}$, podemos realizar un razonamiento análogo al caso anterior, obteniendo que el tiempo terminal t_2 será $T + \dfrac{1}{\delta} \ln \dfrac{a(1-z_1)-\delta}{a\,(1-z_1)}$ y ahora, serán los valores de z_1 los que determinen los controles optimales. Así:

— Si $z_1 \geq \frac{1}{2}$ tendremos $\psi_1(t_2) \geq e^{-\delta t_2}$ y $u_1(t) = z_1$, $u_2(t) = 1$ si $t \in [0, t_2]$ y $u_1(t) = z_1$, $u_2(t) = 0$ si $t \in (t_2, T]$.

— Si $z_1 < \frac{1}{2}$ entonces $\psi_1(t_2) < e^{-\delta t_2}$ y los controles optimales serán $u_1(t) = z_1$, $u_2(t) = 1$ en $[0, t_1]$; $u_1(t) = z_2$, $u_2(t) = 1$ en $(t_1, t_2]$ y $u_1(t) = z_1$, $u_2(t) = 0$ en $(t_2, T]$. Donde t_2 es el extremo derecho de (1) y

$$t_1 = \frac{a(1 - z_2)t_2 - \delta T}{a(1 - z_2) - \delta} + \frac{\ln \dfrac{(a - \delta)\,[az_1\,(a(1 - z_2) - \delta) + az_2\,a(1 - z_1)]}{a(1 - z_1) - \delta}}{a(1 - z_2) - \delta}$$

expresión en la que hemos de sustituir t_2 por su valor.

3. COMPARACION DE ESTRATEGIAS

Siguiendo los resultados de R. Gradus las estrategias optimales, en la solución no cooperativa en ciclo abierto de Nash, son de dos tipos dependiendo del tanto de consumo z_2. Por tanto, a diferencia de los resultados obtenidos con las de Stackelberg, el tanto de actualización no influye en las estrategias optimales.

Como en las de Stackelberg, en las estrategias de Nash existe un instante de tiempo, en el que el tanto de inversión pasa de ser unitario a nulo. Cuando estamos en el intervalo con inversión nula, el consumo de los trabajadores es máximo y si $z_2 < \frac{1}{2}$, la estrategia de Nash es idéntica a la de Stackelberg e incluso, los cambios de controles óptimos se producen en los mismos instantes de tiempo.

Si $z_2 \geq \frac{1}{2}$, la estrategia se simplifica, el momento de cambio de la inversión coincide con el extremo inferior del intervalo (1) y desde el momento inicial hasta él, el consumo de los trabajadores es z_1[5].

Por tanto, si $z_2 \geq \frac{1}{2}$, el capital en la economía es superior al que se obtendría con $z_2 < \frac{1}{2}$, ya que, durante el tiempo en que crece el capital, se utiliza un consumo mínimo.

Ahora bien, si $z_2 \geq \frac{1}{2}$, la estrategia de Nash puede compararse con la de Stackelberg con $z_1 \geq \frac{1}{2}$, (y $\delta \geq a(1 - z_2)(1 - 2z_1)$), pues esta condición implicará $z_2 > \frac{1}{2}$. Esta estrategia, permite, a la economía, obtener un capital superior a la de Nash, pero también a la de cualquier situación que puede presentarse en Stackelberg, por ser la que durante más tiempo permite un consumo mínimo y una inversión máxima.

Analicemos ahora, la solución cooperativa de Pareto. Estas estrategias pueden obtenerse planteando el problema de maximizar la combinación

5 Esta estrategia coincidiría con la de Stackelberg si $z_2 \geq \frac{1}{2}$ no fuese inconveniente para $0 < \delta \leq a(1 - 2z_2)$.

convexa de los funcionales objetivos de capitalistas y trabajadores, sujeto a la ecuación diferencial que satisface el capital:

$$\max_{z_1 \leq u_1 \leq z_2,\ 0 \leq u_2 \leq 1} \int_0^T e^{-\delta t} (\lambda u_1 aK + (1-\lambda)(1-u_1)(1-u_2)aK)\, dt$$

sujeta a:

$$\dot{K} = (1-u_1)u_2 aK, \quad K(0) = K_0$$

La resolución de este problema aplicando las condiciones del Principio del Máximo, que de nuevo son necesarias y suficientes, nos proporciona dos políticas admisibles si adoptamos la posición simétrica $\lambda = \frac{1}{2}$[6].

Una de ellas, se caracteriza por la máxima inversión y el mínimo consumo. En ella, la variable de coestado ψ, que es decreciente, tiene que verificar $2\psi(t) > e^{-\delta t}$. En la otra política, la inversión es nula y se permite cualquier consumo admisible, $z_1 \leq u_1(t) \leq z_2$, que no tiene que ser constante. Esta política no puede mantenerse en todo el intervalo ya que, en caso contrario, el tiempo terminal T tendría que ser inferior a $\frac{1}{\delta} \ln \frac{a}{a-\delta}$.

Por tanto las estrategias óptimas de Pareto serían inversión máxima y consumo mínimo en $[0, \bar{t}\,]$ e inversión nula y consumo admisible en $(\bar{t}, T]$ donde:

$$\bar{t} = T + \frac{1}{\delta} \ln \left(1 - \frac{\delta}{a}\right)$$

Este momento $\bar{t}$, supera al límite superior del intervalo (1) y como hasta él se permite el consumo mínimo, tendremos que es la solución que obtiene un mayor capital en la economía. Por tanto, desde este punto de vista, la solución cooperativa de Pareto es mejor que las soluciones no cooperativas de Nash y Stackelberg.

4. CONCLUSIONES

Las estrategias de Stackelberg, cuando consideramos actualizaciones en el modelo básico de K. Lancaster y suponiendo que tanto capitalistas como trabajadores actualizan al mismo tanto, siendo los segundos líderes, ofrecen una diversidad de estrategias óptimales, dependiendo del tanto de

6 El óptimo social de K. Lancaster.

actualización; lo que no ocurre con las estrategias óptimas de Nash y la cooperativa de Pareto. Este tanto, además, determina los consumos de los trabajadores y capitalistas y salvo en una situación donde los consumos de los trabajadores no varian en el horizonte temporal, en el resto de los casos, estos consumos son máximos o mínimos, excepto en una situación y durante un intervalo donde permite una infinidad de soluciones.

Esta última característica, también la presenta la solución cooperativa de Pareto que da origen a una acumulación de capital superior a la que se obtiene con las soluciones no cooperativas de Nash o Stackelberg, resultado que coincide con el obtenido en el análisis del modelo básico.

BIBLIOGRAFIA

Basar, T. y Olsder, G. J. (1982): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press. New York.

Gradus, R. H. (1988): «The Reaction of The Firm on Governmental Policy: A Game-Theoretical Approach», en *Optimal Control Theory and Economic Analysis 3* (G. Feichtinger, Ed.). North-Holland. Amsterdam, pp. 265-290.

Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization*. North-Holland. New York.

Lancaster, K. (1973): «The Dynamic Inefficiency of Capitalism». *Journal of Political Economy*. Vol. 81, pp. 1092-1109.

Pohjola, M. (1983): «Differential Game Model of Capitalism». *Journal of Economic Dynamics and Control*. núm. 6, pp. 173-186.

Wishart, D. M. G. y Olsder, G. J. (1979): «Discontinuous Stackelberg Solutions». *International Journal of Systems Science*. núm. 10, pp. 1359-1368.

Zeeuw, A. (1992): «Note on 'Nash and Stackelberg Solutions in a Differential Game Model of Capitalism». *Journal of Economic Dynamics and Control*. núm. 16, pp. 139-145.