

# DINAMICA DE UNA VERSION NO LINEAL DE LA ECUACION DE LA RENTA DE SAMUELSON

*M<sup>a</sup> Dolores Soto Torres  
Guiomar Martín Herrán*

RESUMEN.— El proceso dinámico de formación del escenario de Pomeau-Manneville es analizado en este trabajo. Para ello, se considera una reformulación no lineal de una ecuación básica de comportamiento de la renta propuesta por Samuelson. El análisis dinámico se lleva a cabo considerando la inversión como parámetro de control y se estudia el comportamiento de la renta, antes, durante y después de la bifurcación nodo-silla.

## 1. INTRODUCCION

Cuando en la literatura económica se ha pretendido realizar el análisis dinámico de un sistema unidimensional paramétrico, y en tiempo discreto, se han buscado modelos en los que se puede encontrar una sucesión de bifurcaciones de salto en doble período, ya que entonces será posible determinar una región de valores de los parámetros, donde la evolución de la variable dependerá de las condiciones iniciales y llegará a ser caótica.

Podemos citar como ejemplos de este análisis el trabajo de Stutzer (1980) que estudia la versión discreta de un modelo de Haavelmo, el trabajo de Candela y Gardini (1986) que consideran un modelo de estas características al eliminar la componente aleatoria de una ecuación estocástica asociada a la variable «fracción de beneficio sobre renta». El análisis también es realizado por Lichtenberg y Ujihara (1989) en un modelo modificado de telaraña donde la oferta y la demanda del bien, no dependen sólo del precio en el momento  $t$ , sino también del precio en momentos anteriores. En Nusse y Hommes (1990) se considera un modelo de Samuelson reformulado por Gabish de la evolución de la renta.

Sin embargo, si consideramos aplicaciones unidimensionales, es posible encontrar otros procesos dinámicos complejos ligados a bifurcaciones

que no son de salto. Tal es el caso del proceso analizado por Pomeau-Manneville (1980) asociado a una bifurcación nodo-silla. En este proceso, es característico el comportamiento dinámico del sistema después de la bifurcación, pero para valores muy próximos a ella, donde aparecen comportamientos periódicos que en determinados períodos de tiempo pueden llegar a ser caóticos.

En este trabajo, pretendemos realizar un análisis del escenario de Pomeau-Manneville para lo que consideraremos un modelo no lineal, construido a partir de una versión lineal de la ecuación de la renta de Samuelson. El modelo no lineal elimina solamente la hipótesis de un comportamiento lineal del consumo en función de la renta del período anterior y la sustituye por un comportamiento exponencial lento, lo que se consigue dando valores apropiados a los parámetros.

El trabajo está estructurado en secciones. En la segunda, construimos la ecuación no lineal y analizamos su dinámica hasta encontrar los valores de la inversión, que es considerado como el parámetro de control, que dan lugar a la bifurcación nodo-silla. El planteamiento de esta bifurcación dará lugar al análisis del escenario, que es realizado en la tercera sección. El trabajo termina con unas conclusiones.

## 2. PLANTEAMIENTO Y PRIMEROS RESULTADOS

El modelo cerrado de Samuelson<sup>1</sup> supone que la renta en cada momento es la suma del consumo y de la inversión. El consumo  $C_t$ , se supone que se comporta linealmente:

$$C_t = a + bY_{t-1}, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1$$

en función de la renta del período anterior  $Y_{t-1}$ , donde  $a$  es el consumo con renta nula y  $b$  es la propensión marginal del consumo.

Si la inversión es autónoma con un valor  $I > 0$ , la ecuación que satisfice la renta será:

$$Y_t = I + a + bY_{t-1}$$

cuya dinámica asociada está caracterizada por un único estado estacionario, asintóticamente estable.

Si eliminamos la hipótesis de un comportamiento lineal del consumo y suponemos que satisface un comportamiento exponencial:  $C_t = ae^{hY_{t-1}}$ , donde  $a$  seguirá siendo el consumo con renta nula y  $h$ , positivo, podríamos considerarle suficientemente pequeño de tal forma que la ecuación lineal

<sup>1</sup> Este modelo puede encontrarse entre otros en Chiang, A. C. p. 598, Gandolfo, G., p. 37 ó Goldberg, G., p. 20.

podiera ser considerada una aproximación aceptable de la no lineal. Entonces, la nueva ecuación de la renta será:

$$Y_t = I + ae^{hY_{t-1}}, \quad a > 0, \quad h > 0$$

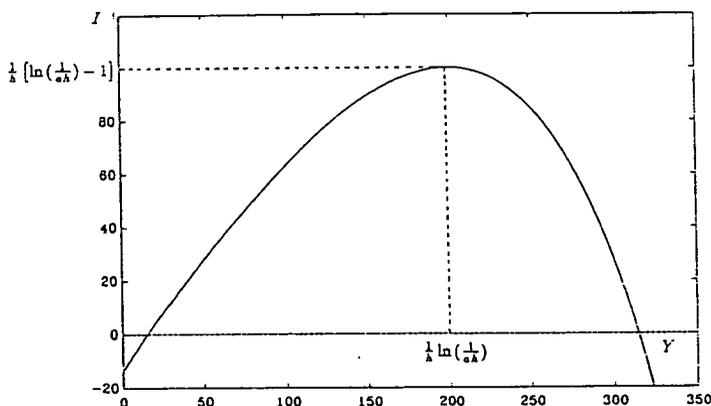
Esta ecuación, que no es lineal y previsiblemente tendrá una dinámica con mayor complejidad que el modelo lineal, tiene tres parámetros  $I$ ,  $a$  y  $h$ , que son susceptibles de modificación. Supongamos que dos de ellos permanecen fijos<sup>2</sup>,  $a$  y  $h$ , y que la inversión puede cambiar de valor por efecto de factores exógenos.

La dinámica asociada a la ecuación no lineal vendrá caracterizada, en primer lugar por sus estados de equilibrio, que en función de la inversión serán aquellos que satisfacen la ecuación:

$$I = Y - ae^{hY}$$

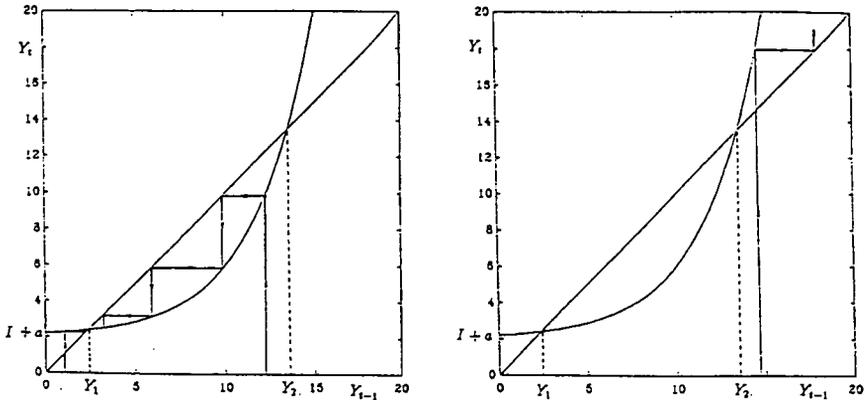
cuya representación (gráfica 1) nos muestra que son posibles la coexistencia de dos estados de equilibrio, o de uno solo, o bien, el modelo puede carecer de estados de equilibrio.

Así, observamos que, si  $I$  pertenece al intervalo  $(0, \frac{1}{h} [\ln(\frac{1}{ah}) - 1])$ , tenemos dos estados de equilibrio  $Y_1, Y_2, Y_1 < Y_2$ ; y si la inversión crece, también crecerá  $Y_1$  mientras que  $Y_2$  decrecerá. Si la inversión toma el valor  $\frac{1}{h} [\ln(\frac{1}{ah}) - 1]$ , que coincide con el máximo de la ecuación de los estados de equilibrio, tendremos una única renta estacionaria  $\frac{1}{h} \ln(\frac{1}{ah})$ . Por último, si la inversión supera ese valor, el modelo carece de situaciones de equilibrio.



GRÁFICA 1.

2 El tratamiento del modelo es idéntico y se obtienen análogos resultados si dos cualesquiera de los parámetros permanecen fijos y el otro es el variable.



GRÁFICAS 2 Y 3.

Para poder evaluar el comportamiento de la renta en función del tiempo, determinemos la estabilidad de los estados de equilibrio.

La matriz jacobiana, en un estado de equilibrio cualquiera  $Y$ , será:

$$j|_Y = ahe^{hY}$$

por tanto,  $Y_1$  es un atractor ya que  $0 < j|_{Y_1} < 1$ ;  $Y_2$  es un repulsor, pues la jacobiana en él supera a la unidad y si la renta toma el valor  $\frac{1}{h} \ln\left(\frac{1}{ah}\right)$ , tenemos una bifurcación nodo-silla (Guckenheimer J, y Holmes P. (1983, p. 157)), ya que la jacobiana en el estado de equilibrio único es unitaria.

Cuando coexisten los dos estados de equilibrio, la evolución de la renta es diferente según las condiciones iniciales. En efecto, si partimos de la base de atracción de  $Y_1$ , que corresponde al intervalo  $[0, Y_2)$ , la renta tenderá hacia  $Y_1$  (gráfica 2); mientras que si las condiciones iniciales superan a  $Y_2$  (en  $Y_2$ , la tendencia es hacia sí misma), la renta evoluciona creciendo exponencialmente en un proceso de alejamiento de  $Y_2$  (gráfica 3).

Si la inversión toma el valor  $\frac{1}{h} \left[ \ln\left(\frac{1}{ah}\right) - 1 \right]$ , y por tanto, tenemos un único estado de equilibrio, con matriz jacobiana en él unitaria, la evolución de la renta también es distinta dependiendo de las condiciones iniciales (gráfica 4). Así, si la renta parte de una situación inferior a la de equilibrio, la evolución es hacia la situación estacionaria, mientras que si la supera, la tendencia es de crecimiento acelerado.

Cuando no existen estados de equilibrio, la renta tendrá un proceso continuado de crecimiento (gráfica 4). Ahora bien, el ritmo de crecimiento dependerá de los valores que tome la inversión, ya que estos condicionan la proximidad entre la curva de la renta y la bisectriz del primer cuadrante.

### 3. EL ESCENARIO DE POMEAU-MANNEVILLE

Si suponemos que la inversión toma un valor ligeramente superior, pero próximo al valor que origina la bifurcación, con lo que la proximidad entre la curva de la renta y la bisectriz del primer cuadrante será evidente, tendremos que un valor de renta inicial inferior al cuasi-punto fijo tiene que pasar, debido al proceso de crecimiento, por una región sumamente estrecha, a causa de la proximidad entre la curva y la bisectriz del primer cuadrante (gráfica 5).

Ahora, una renta que parta de un valor inicial  $Y_0$ , puede tardar un tiempo en atravesar la región estrecha para alejarse del cuasi-punto fijo, ya que en esta situación carecemos de situaciones estacionarias.

Tenemos dos cuestiones que resolver en esta situación. Por un lado, podríamos intentar determinar el tiempo que se tarda en atravesar un intervalo centrado en el cuasi-punto fijo, y por otro, podríamos determinar los valores que va alcanzando la renta durante este proceso.

Para la primera cuestión y ya que nuestra ecuación no se integra con facilidad, seguiremos la metodología propuesta por Bai-Lin H. (1989, p. 66). Así, si consideramos la ecuación de la renta,

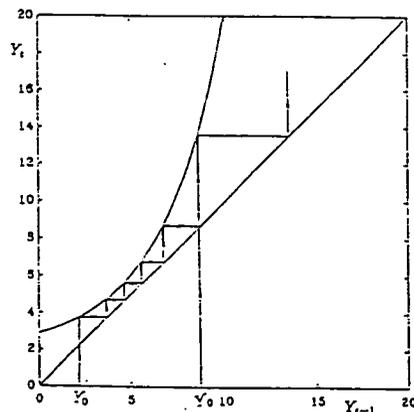
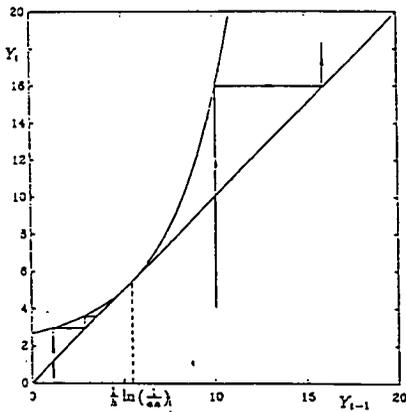
$$f(Y, I) = I + ae^{hY}$$

y la desarrollamos en un entorno del estado de equilibrio y del parámetro, en la bifurcación:

$$(Y^*, I^*) = \left( \frac{1}{h} \ln \left( \frac{1}{ah} \right), \frac{1}{h} \left[ \ln \left( \frac{1}{ah} \right) - 1 \right] \right)$$

tenemos:

$$f(Y, I) = Y^* + (Y - Y^*) + (I - I^*) + \frac{h}{2} (Y - Y^*)^2 + \dots$$



GRÁFICAS 4 Y 5.

si ahora, realizamos el cambio de variable  $X_t = Y_t - Y^*$  que nos traslada el estado  $Y^*$  al nulo, y lo sustituimos en la ecuación anterior, obtenemos:

$$X_{t+1} = X_t + (I - I^*) + \frac{h}{2} X_t^2 + \dots$$

La versión continua de esta última expresión, despreciando la influencia de los términos no considerados, será:

$$\frac{dX}{dt} = (I - I^*) + \frac{h}{2} X^2$$

que podemos integrar con unas condiciones iniciales  $X(0) = X_0$ . Tenemos:

$$\arctg X(t) \left( \frac{h}{2(I - I^*)} \right)^{1/2} - \arctg X(0) \left( \frac{h}{2(I - I^*)} \right)^{1/2} = t \left( \frac{h(I - I^*)}{2} \right)^{1/2}$$

Entonces, el tiempo que  $X(t)$  tarda en atravesar la región  $[-1, 1]$  verificará la ecuación:

$$2 \arctg \left( \frac{h}{2(I - I^*)} \right)^{1/2} = t \left( \frac{h(I - I^*)}{2} \right)^{1/2}$$

y si  $I \rightarrow I^*$ , tendremos como resultado

$$t \simeq \pi \left( \frac{h(I - I^*)}{2} \right)^{-1/2}$$

Esta expresión, por tanto, corresponde al número de pasos que de forma aproximada tardará la renta en atravesar la región

$$\left[ -1 + \frac{1}{h} \ln \left( \frac{1}{ah} \right), 1 + \frac{1}{h} \ln \left( \frac{1}{ah} \right) \right]$$

cuando la inversión  $I$  tiende hacia

$$\frac{1}{h} \left[ \ln \left( \frac{1}{ah} \right) - 1 \right].$$

Los valores numéricos de esta expresión, en el caso concreto de  $a = 100e^{-2}$  y  $h = 0.01$ , que originan unos valores  $(Y^*, I^*) = (200, 100)$ , vienen recogidos en la siguiente tabla:

$I - I^*$	pasos
0.00001	14050
0.0001	4443
0.001	1405
0.01	444

donde de acuerdo con los valores numéricos que hemos elegido, el número de pasos crece a razón de  $\sqrt{10}$ .

La segunda cuestión, asociada al escenario de Pomeau-Manneville, que no tiene una cuantificación tan general, consiste en determinar los valores que va alcanzando la renta al atravesar la región «túnel». Para analizar esta cuestión, volvemos a considerar los valores de  $a$  y  $h$  que nos sirvieron para la construcción de la tabla y una diferencia de  $I - I^* = 0.0001$ , entonces, mediante una simulación por ordenador, el comportamiento de la renta que parte de una condición inicial de 199 alcanza el valor 201 en 4174 pasos<sup>3</sup>. El 80 % de estos pasos se dan cuando la renta se incrementa desde 199.7 a 200.3 y el 45 % se dan cuando la renta se incrementa las dos décimas de diferencia que hay entre 199.9 y 200.1. Además, hay cierta simetría en estos comportamientos, pues incrementar las primeras cinco décimas supone dar el 4 % de los pasos, que es el mismo número de paso, que la renta tarda en incrementar las últimas cinco décimas.

#### 4. CONCLUSIONES

La crítica más generalizada de los modelos con planteamiento lineal es que sus resultados suelen ser tan simples que no permiten explicar los fenómenos económicos que pretendía la construcción del modelo.

Por ejemplo, el planteamiento lineal del modelo que originó este trabajo, tiene una dinámica que no puede alterarse al modificar parámetros o condiciones iniciales. Sin embargo, la versión no lineal ofrece una mayor diversidad.

Así si el parámetro se mueve en una región específica, la evolución de la renta es de estabilización o crecimiento y serán sus condiciones iniciales las que determinen el diferente comportamiento. Las rentas más bajas tienden a estabilizarse, mientras que valores superiores crecen exponencialmente.

<sup>3</sup> El error, por tanto, entre el número de pasos reales y el que se obtiene según la expresión que nos sirvió para construir la tabla es del 6 %, pero notemos que esta última supone que la diferencia entre  $I$  e  $I^*$  es despreciable y así, los errores que existen entre los resultados reales y los de la tabla disminuyen al disminuir  $I - I^*$ .

Ahora bien, si el parámetro supera la región crítica de rentas altas o bajas, seguirán un proceso de crecimiento; pero, si el parámetro está muy cerca de la región crítica, el proceso se ralentiza, en determinados valores iniciales de renta y ofrece un comportamiento cuasi-periódico durante un intervalo de tiempo que es más amplio cuanto más próximo esté el parámetro a la región crítica.

#### BIBLIOGRAFIA

- Bai-Lin, H.: *Elementary Symbolic Dynamics*. World Scientific. Singapore. 1989. p. 66.
- Candela, G. y Gardini, A.: «Estimation of Non-Linear Discrete-time Macro Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 10, nº1-2, 1986, pp. 249-254.
- Chiang, A. C.: *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. McGraw-Hill. México D.F. 1987. p. 598.
- Gandolfo, G.: *Economic Dynamics: Methods and Models*. North-Holland. Amsterdam. 1980. p. 37.
- Goldberg, G.: *Introducción a las Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Marcombo. Barcelona. 1964. p. 20.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag. New-York. 1983.
- Lichtenberg, A. J. y Ujihara, A.: «Application of Non-Linear Mapping Theory to Commodity Price Fluctuations». *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1989. Vol. 13, nº 2, pp. 225-246.
- Nusse, H. E. y Hommes, C. H.: «Resolution of Chaos whit Application to a Modified Samuelson Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1990. Vol. 14, nº 1, pp. 1-20.
- Pomeau, Y. y Manneville, P.: «Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems». *Commun. Math. Phys*. 1980. nº 74, pp. 189-197.
- Stutzer, M. J.: «Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1980. Vol. 2, nº 4, pp. 353-376.