PREFERENCIA E INDIFERENCIA EN LA TEORIA DE LA ELECCION SOCIAL

José Luis García Lapresta

RESUMEN.—Tras un breve análisis del uso de las nociones de preferencia en el lenguaje ordinario, se hace una incursión en la Teoría de la Elección Social para destacar la utilización de estos conceptos como instrumentos básicos del análisis del comportamiento racional. Se destaca el Teorema de Imposibilidad de Arrow como principal impulsor de la Teoría de la Preferencia y se aclaran las diferencias existentes entre las consecuencias de este resultado y las esencialmente negativas del Teorema de Incompletitud de Gödel en el ámbito de la Lógica. Se da una definición de estructura preferencial vinculada a los principales usos de la preferencia en Economía y se establecen las equivalencias existentes entre esta noción y las preferencias débiles y estrictas más usuales, bajo supuestos mínimos de racionalidad. Por último se caracterizan las estructuras preferenciales mediante clases de matrices antisimétricas.

1. INTRODUCCION

La actitud de preferir parece innata a todo ser vivo. Por lo general un bebé prefiere estar en los brazos maternos a estar en los brazos de su abuelo, a su vez, en los brazos de su abuelo a estar en los de una persona desconocida para él; un gato prefiere una anchoa a un trozo de pan; si se desea que una planta tenga las hojas verdes es preferible que esté cerca de la luz a que esté alejada de ella; toda persona tiene sus gustos musicales, gastronómicos, estéticos, etc.; un trabajador prefiere un determinado horario a otro; un consumidor prefiere ciertos bienes a otros; un ciudadano simpatiza más con un tipo de política que con otra. Todas estas tendencias son independientes de la posibilidad real de elección. Una persona puede preferir que un fin de semana sea soleado a que sea lluvioso; sin embargo, no está en sus manos el que sea de una forma u otra. La noción de *preferencia* va íntimamente ligada a las ideas de actitud, inclinación y tendencia; en cambio, el concepto de elección está asociado al de acción.

El uso de la noción de preferencia ha ido unido, en la mayoría de las ocasiones, al intento de fundamentar la idea de *comportamiento racional.* No podría decirse que un individuo es más o menos racional por el hecho de que prefiera las películas de Buñuel a las de Godard. En cambio sí podría sospecharse de su comportamiento racional en el caso de que prefiriera las películas de Buñuel a las de Godard, las de Godard a las de Herzog y, en cambio prefiriera las películas de Herzog a las de Buñuel. La mayor o menor racionalidad de un sujeto va ligada a la coherencia interna de sus inclinaciones, no al orden que ocupan los objetos en la jerarquización.

De igual forma podía hablarse de la noción de *indiferencia.* Un comensal puede preferir indistintamente comer besugo a la espalda o lubina al horno y, en ese caso podría decirse que es indiferente ante ambos platos. Un ciudadano puede no preferir un gobierno de extrema derecha a uno de extrema izquierda y, a su vez, no preferir un gobierno de extrema izquierda a uno de extrema derecha; también podría decirse que se muestra indiferente ante ambos tipos de gobierno. No está clara cuál es la relación existente, si es que la hay, entre los conceptos de preferencia e indiferencia. Según el contexto, la relación es de uno u otro tipo o simplemente son nociones independientes. Parece aconsejable, si se desea cierta generalidad, tratar ambas ideas como primitivas y establecer, en cada situación, las relaciones existentes entre ellas.

Al igual que las preferencias e indiferencias varían de un sujeto a otro, a veces éstas cambian con el paso del tiempo para un mismo sujeto. Un estudiante de 15 años puede mostrarse indiferente ante la posibilidad de estudiar Ingeniería o Química y, a sus 18 años, preferir una cosa a otra. Un agricultor que un año prefiere plantar girasol a plantar cebada, puede que el año siguiente prefiera plantar cebada en lugar de girasol. A pesar de que tiene sentido considerar las nociones de preferencia e indiferencia en su aspecto dinámico, aquí serán contempladas de forma estática. Se referirán a un sujeto concreto (individual o colectivo), como juicios subjetivos de valor, en un instante concreto.

Ambos conceptos: preferencia e indiferencia tienen especial protagonismo en discursos valorativos, como los de la Etica, la Estética y la Economía. En el segundo tercio del presente siglo surgió la necesidad de formalizar estas ideas, con el fin de poder desarrollarlas dentro de un marco conceptual adecuado. En este aspecto cabe remarcar las aportaciones hechas desde diferentes perspectivas, principalmente desde las teorías de la *utilidad*, de la *elección social*, de la *decisión bayesiana*, de *juegos* y de la *lógica de la preferencia.*

2. TEORIA DE LA ELECCION SOCIAL

Sin duda ha sido en la *Teoría de la Elección Social* donde se han producido los mayores desarrollos en el uso de las nociones de preferencia e indiferencia. Esta teoría, de la que Condorcet puede considerarse un precursor, entra a formar parte de la *Economía Matemática* a través del trabajo de Arrow *Social Choice and Individuals Values* de 1951. En él, Arrow considera un colectivo de individuos que ha de decidirse entre varias opciones, teniendo en cuenta las preferencias individuales y que la *agregación* de estas preferencias ha de seguir ciertas normas de «coherencia». Para ello formalizó la noción de preferencia entre pares de objetos mediante el concepto cojuntista de *relación binaria*. Si X denota el conjunto de estados o situaciones posibles susceptibles de ser deseados por los n individuos que forman el colectivo, entonces cada uno de estos individuos guía sus inclinaciones mediante una relación binaria. Si $x, y \in X$, entonces xR_iy se entiende como el hecho de que x es al menos tan preferido como y por el individuo i. Esta relación R_i de *preferencia* (*débil*) da lugar a otras dos relaciones binarias. Si $x, y \in X$, entonces $xP_i y$ se define como (xR_iy y no yR_ix); xI_iy abrevia (xR_iy y yR_ix). A P_i se le llama relación de preferencia *fuerte* (o *estricta*) del individuo i y a I_i relación de *indiferencia* del individuo i. Arrow, para trasladar la vaga noción de comportamiento racional exigió que $\langle X, R_i\rangle$ fuera, para cada individuo i, un *preorden total*, es decir que R_i fuera *reflexiva*: $\forall x \in X\ (xR_ix)$, *transitiva:* $\forall x,y,z \in X\ ((xR_iy$ y $yR_iz) \Rightarrow xR_iz)$ y completa (o total): $\forall x, y \in X\ (xR_iy$ o $yR_ix)$[1].

El principal objetivo planteado por Arrow es el de determinar un método de elección social que contemple las preferencias individuales y no viole ciertos principios normativos. En otras palabras, se cuestiona la posibilidad de que exista una *función de elección social* (o *función de agregación de preferencias*), f, que asigne a cada perfil $R_1, R_2,..., R_n$ de preferencias individuales una preferencia colectiva $R = f(R_1, R_2,..., R_n)$, que siga siendo preorden completo[2]. Al hecho de que f esté definida para cualquier perfil de preferencias individuales, Arrow lo llamó principio de *dominio no restringido*. En este marco, Arrow demostró su conocido *Teorema de Imposibilidad*[3]: si f cumple el *principio débil de Pareto*[4] y el principio de *independencia de alternativas irrelevantes*[5], entonces f es *dictatorial*, es decir $f(R_1, R_2,..., R_n) = R_i$, para algún $i \in \{1, 2,..., n\}$.

Ante un resultado tan pesimista ha habido numerosos intentos de modificar la noción de comportamiento racional, así como de establecer diferentes criterios en la agregación de las preferencias individuales. Una

1 Obsérvese que $xR_i y$ es equivalente a ($xP_i y$ o $xI_i y$).

2 May advierte en 1954 que los supuestos han de hacerse sobre el comportamiento racional de los individuos, es decir sobre las propiedades de $R_1, R_2,..., R_n$ y que las propiedades de la preferencia social agregada han de deducirse y no suponerse a priori.

3 Este resultado fue dado a conocer por Arrow en [Arrow 50], y en 1951, en el libro citado. Existe alguna incorrección, advertida por Blau en 1957, que Arrow rectificó en 1963, en la segunda edición del libro. La presentación dada aquí es equivalente a esta última.

4 Si una situación es preferida estrictamente a otra por cada uno de los miembros del colectivo, entonces es preferida estrictamente por el colectivo.

5 La preferencia colectiva entre dos opciones depende sólo de las preferencias individuales entre ambas y no sobre otras opciones.

de las primeras objeciones iba dirigida al supuesto de transitividad de las preferencias individuales; si se relajaba la transitividad por la *casi-transitividad* (transitividad de la relación escrita P asociada), entonces f tenía comportamiento oligárquico; si se relajaba la transitividad por la *casi-transitividad* (transitividad de la relación estricta P asociada), entonces f tenía comportamiento oligárquico; si se relajaba la transitividad por la *aciclicidad* (imposibilidad de que ocurra x_1Px_2, x_2Px_3,..., $x_{m-1}Px_m$ y a la vez x_mPx_1), entonces aparece el poder de algunos individuos a vetar algunas opciones. Existen en la literatura económica múltiples ejemplos, debilitaciones y generalizaciones de las nociones de racionalidad individual y colectiva que han permitido obtener una amplia gama de resultados y han sacado a la luz las relaciones existentes entre las diferentes nociones de comportamiento racional[6]. Puede decirse que el Teorema de Imposibilidad de Arrow, pieza clave de la Teoría de la Elección Social, ha sido el principal estímulo para el desarrollo de la Teoría de la Preferencia.

Otro enfoque alternativo consiste en fundamentar la noción de racionalidad en *funciones de elección*, en lugar de hacerlo en relaciones binarias. En 1954 May advertía que la construcción de Arrow está basada en la comparación de pares de bienes o estados de cosas, cuando en general se hace entre un número mayor. Un primer paso consiste en construir la función de elección asociada a una relación de preferencia: Si R es una relación binaria, C sería la aplicación que asigna a cada subconjunto no vacío S de X el subconjunto de elementos maximales de S para R (estados de cosas que son al menos tan deseables como cualquier otro): $C(S) = \{x \in S \mid xRy \ \forall y \in S\}$[7]. Con esta idea raíz se inicia una línea de investigación en la que la representación de la racionalidad se hace a través de axiomas sobre las funciones de elección, que no necesariamente provienen de relaciones de preferencia. A este respecto cabe destacar el axioma de *independencia de subdivisiones del proceso (path independence):* $C(S_1 \cup S_2) = C(C(S_1) \cup C(S_2))$ para cualesquiera S_1, $S_2 \subseteq X$, introducido por Plott en 1973 y que juega un papel fundamental en este tipo de desarrollo[8].

En alguna ocasión se ha comparado el Teorema de Imposibilidad de Arrow con el Teorema de Incompletitud de Gödel[9]. Si bien ambos comparten el pesimismo que provocan sus resultados, el teorema de Gödel supuso y supone un debilitamiento de la Matemática y de la mayoría de sistemas formales. El hecho de que existan sentencias para las que ni ellas ni sus negaciones pueda darse jamás una demostración (equivalentemente, hay sentencias ciertas que no se pueden demostrar), echó abajo el intento de

6 A este respecto puede consultarse [Kelly 78], [Sen 86] y [Barberà 91].

7 En un principio esta construcción se utilizó sólo para representar las preferencias sociales.

8 La asunción de este axioma asegura que cuando se han de escoger los elementos maximales de un subconjunto de estados de cosas, el proceso puede subdividirse en etapas, de forma que el resultado es independiente del camino elegido.

9 Véase, por ejemplo [Kelly 78, p. 1].

fundamentar la Matemática en la Lógica. La gran diferencia estriba en que, las nociones de *consistencia, completitud* y *prueba*, utilizadas por Gödel en la demostración de su teorema, son universalmente aceptadas y, en cambio, los conceptos de racionalidad individual y colectiva son susceptibles de numerosas interpretaciones, al igual que los requisitos a exigir en la agregación de las preferencias pueden ser de distinta índole. Debido a ello se abren caminos que permiten un desarrollo teórico con gran variedad de resultados, como los que hay actualmente y los que, con avances posteriores, puedan darse.

3. ESTRUCTURAS PREFERENCIALES

En la introducción se ponía de manifiesto que las nociones de preferencia e indiferencia no estaban relacionadas de forma unívoca. En gran parte de los trabajos efectuados en el marco de la teoría de la elección social, se ha considerado como noción primitiva la de preferencia débil R y, a partir de ella, se han definido las de preferencia estricta P e indiferencia I, resultando $R = P \cup I$. Otra formulación también muy extendida, aunque menos que la anterior, consiste en concebir como primitiva la noción de preferencia estricta P y definir la preferencia débil R como $xRy \Leftrightarrow (xPy$ o no $yPx)$ y la indiferencia I, como $xIy \Leftrightarrow$ (no xPy y no yPx). Esta construcción permite que se cumpla $R = P \cup I$ y, además, garantiza que R sea siempre completa.

Se posibilita un tratamiento más flexible y general si se conciben P e I como nociones primitivas y después se define R como $P \cup I$. En este sentido cabe destacar el trabajo *Preference Modelling* de Roubens y Vincke, en el que las estructuras preferenciales incluyen una tercera relación binaria, de incomparabilidad. En él caracterizan diferentes estructuras preferenciales por medio de matrices y grafos orientados. En un trabajo posterior de Vincke, se ilustran las estructuras preferenciales estudiadas con ejemplos tomados del mundo económico-financiero. A continuación se propone una noción alternativa a la de Roubens y Vincke, apropiada para su uso en Economía y con una codificación matricial más sencilla.

Una *estructura preferencial* es un par $\langle P, I\rangle$ de relaciones binarias sobre un mismo conjunto X de situaciones posibles que cumple:

i) P es asimétrica: $\forall x, y \in X(xPy \Rightarrow$ no $yPx)$
ii) I es reflexiva: $\forall x \in X(xIx)$
iii) I es simétrica: $\forall x, y \in X(xIy \Rightarrow yIx)$
iv) $\forall x, y \in X(sPy \Rightarrow$ no $xIy)$
v) $\forall x, y \in X(xPy$ o yPx o $xIy)$

Puede probarse que estas 5 propiedades son equivalentes a las 3 siguientes

i') P es reflexiva
ii') I es simétrica
iii') $\forall x, y \in X(xPy \Leftrightarrow$ (no yPx y no $xIy))$.

Si ahora se define la relación de preferencia débil como $R = P \cup I$, es decir, $xRy \Leftrightarrow (xPy$ o $xIy)$, entonces puede probarse fácilmente que R es reflexiva y no asimétrica, así como las equivalencias $xPy \Leftrightarrow (xRy$ y no $yRx)$, $xIy \Leftrightarrow (xRy$ y $yRx)$. A continuación se justificará que la noción de estructura preferencial es una generalización de las vías mencionadas para establecer P, I, R.

Si se define R como primitiva y se supone que es reflexiva y completa, entonces el par $\langle P_R, I_R \rangle$ es una estructura preferencial, si se toma $xP_Ry \Leftrightarrow (xRy$ y no $yRx)$ y $xI_Ry \Leftrightarrow (xRy$ y $yRx)$. Además se cumple $R = P_R \cup I_R$. Si se considera ahora una estructura preferencial $E = \langle P, I \rangle$ y se define $R_E = P \cup I$, puede probarse que $I_{R_E} = I$ $(xIy \Leftrightarrow (xR_Ey$ y no $yR_Ex))$ y que $P_{R_E} = P$ $((xR_Ey$ y no $yR_Ex) \Leftrightarrow xPy)$. Es decir, toda relación de preferencia débil que sea reflexiva y completa origina una estructura preferencial y toda estructura preferencial proviene de una relación de preferencia débil reflexiva y completa. Existe, por tanto, una biyección entre el conjunto de relaciones reflexivas y completas y el de estructuras preferenciales sobre un conjunto dado.

En el segundo caso mencionado, si se define P como primitiva y se supone que es asimétrica, entonces el par $\langle P, I_P \rangle$ es una estructura preferencial, si se define $xI_Py \Leftrightarrow$ (no xPy y no yPx). Si se toma $R_P = P \cup I_P$, se tiene además que $xR_Py \Leftrightarrow (xPy$ o no $yPx)$; es decir, las relaciones de preferencia débil y de indiferencia quedan definidas a partir de la noción primitiva de preferencia estricta. Puede probarse que, como en el caso anterior, se verifica $xPy \Leftrightarrow (xR_Py$ y no $yR_Px)$, $xI_Py \Leftrightarrow (xR_Py$ y $yR_Px)$. Si ahora se considera una estructura preferencial $\langle P, I \rangle$ y, a partir de su reducto preferencial P, se define I_P como antes, entonces $I = I_P$ $(xIy \Leftrightarrow$ (no xPy y no yPx)). Por consiguiente, toda relación de preferencia estricta que sea asimétrica da lugar a una estructura preferencial y toda estructura preferencial proviene de una relación de preferencia estricta asimétrica. Es decir, existe una biyección entre el conjunto de relaciones asimétricas y el de estructuras preferenciales sobre un conjunto dado.

Como resumen, sirva el siguiente esquema:

R ref. y com.	$\rightarrow$	$\langle P_R, I_R \rangle$ estr. pref.	$\rightarrow$	$P_R \cup I_R = R$
$E = \langle P, I \rangle$ e.p.	$\rightarrow$	$R_E = P \cup I$ ref. y com.	$\rightarrow$	$\langle P_{R_E}, I_{R_E} \rangle = E$
P asimétrica	$\rightarrow$	$\langle P, I_p \rangle$ estr. pref.	$\rightarrow$	P
$\langle P, I \rangle$ estr. pref.	$\rightarrow$	P asimétrica	$\rightarrow$	$\langle P, I_P \rangle = \langle P, I \rangle$

A continuación se relacionarán las estructuras preferenciales con clases de matrices antisimétricas, de forma biunívoca. Si $E = \langle P, I \rangle$ es una estructura preferencial sobre un conjunto X de n elementos, entonces se define

$$M_E : M \times X \rightarrow \{-1, 0, 1\} \quad \text{como} \quad M_E(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xPy \\ 0, & \text{si } xIy \\ -1, & \text{si } yPx. \end{cases}$$

De la definición de estructura preferencial se sigue que M_E está bien definida y que es una matriz cuadrada antisimétrica de orden n. Recíprocamente, si X tiene n elementos y $M : X \times X \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ es una matriz antisimétrica, entonces $E_M = \langle P_M, I_M \rangle$ es una estructura preferencial si se define

$$\begin{cases} xP_My & \Leftrightarrow & M(x, y) = 1 \\ xI_My & \Leftrightarrow & M(x, y) = 0. \end{cases}$$

Además puede comprobarse fácilmente que $M_{E_M} = M$ y $E_{M_E} = E$; es decir las aplicaciones $M \rightarrow E_M$ y $E \rightarrow M_E$ son biyectivas e inversas la una de la otra.

Queda claro que según se fueran imponiendo axiomas de uno u otro tipo sobre P e I, se obtendrían diferentes estructuras preferenciales, las cuales vendrían caracterizadas por clases de matrices antisimétricas. Esto permite un tratamiento computacional de los modelos de las estructuras preferenciales y, por tanto, aseguran un mejor y más rápido análisis de la noción de comportamiento racional.

BIBLIOGRAFIA

Arrow, K. J.: «A dificulty in the concept of social welfare». *Journal of Political Economy* 58, 1950, pp. 328-346.

Arrow, K. J.: *Social Choice and Individual Values*. Wiley. New York, 1951. [Segunda edición: Yale University Press. New Hagen, 1963].

Arrow, K. J.: «Rational choice functions and orderings». *Econometrica* 26, 1959, pp. 121-127.

Barberà, S.: «Algunos modelos de comportamiento racional en Economía», en *Invitación a la Teoría Económica*. Eds. X. Calsamiglia y R. Marimon. Ariel Economía. Barcelona, 1991.

Blair, D. H. - Pollak, R. A.: «Collective rationality and dictatorship: the scope of the Arrow theorem». *Journal of Economic Theory* 21, 1979, pp. 186-194.

Blair, D. H. - Pollak, R. A.: «Acyclic collective choice rules». *Econometrica* 50, 1982, pp. 931-943.

Blau, J.: «The existence of social welfare functions». *Econometrica* 25, 1957, pp. 302-313.

Brown, D. J.: «Aggregation of preferences». *Quarterly Journal of Economics* 89, 1975, pp. 456-469.

Chipman, J. S. - Hurwicz, L. - Richter, M. K. - Sonnenschein, H. F.: *Preferences, Utility, and Demand*. Harcourt, Brace. New York, 1971.

Fishburn, P. C.: *The Theory of Social Choice*. Princeton University Press. Princeton, 1973.

Fishburn, P. C.: *Nonlinear Preference and Utility Theory*. AT&T Bell Laboratories, 1988.

Gödel, K.: «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme». *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 1931, pp. 173-198. [Existe traducción al castellano con una introducción al artículo (de Jesús Mosterín): «Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines», en *Kurt Gödel. Obras completas*. Alianza Universidad. Madrid, 1981, pp. 45-89].

Houthakker, H. S.: «On the logic of preference and choice», en *Contributions to Logic and Methodology in Honor of J. M. Bochenski*. Ed. A. Tymieniecka. North Holland. Amsterdam, 1965.

Kelly, J. S.: *Arrow Imposibility Theorems*. Academic Press. New York, 1978.

Mas-Colell, A. - Sonnenschein, H.: «General possibility theorems for group decision functions». *Review of Economic Studies* 39, 1972, pp. 185-192.

May, K. O.: «Intransitivity, utility, and the aggregation of preference patterns». *Econometrica* 22, 1954, pp. 1-13.

Neumann, J. von - Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. Princeton, 1944.

Plott, C. R.: «Path independence, rationality, and social choice». *Econometrica* 41, 1973, pp. 1075-1091.

Rescher, N.: «Semantic foundations for the logic of preference», en *The Logic of Decision and Action*. Ed. N. Rescher. Pittsburg University Press. Pittsburg, 1967.

Rescher, N.: *Introduction to Value Theory*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, N. J., 1969.

Roubens, M. - Vincke, P.: *Preference Modelling*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 250. Springer-Verlag. Berlin, 1985.

Sen, A. K.: *Collective Choice and Social Welfare*. Holden-Day. San Francisco, 1970.

Sen, A. K.: «Social choice theory», en *Handbook of Mathematical Economics*, vol. III. Eds. K. J. Arrow y M. Intrilligator. North Holland. Amsterdam, 1986, pp. 1073-1081.

Uzawa, H.: «A note on preference and axioms of choice». *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 8 (1), 1956, pp. 35-40.

Vincke, P.: «La modelisation des preferences». *Document de Travail de l'I.M.E.* 83. Université de Dijon, 1985.

Wright, G. H. von: *The Logic of Preference*. Edinburgh University Press. Edinburgh, 1963. [Existe traducción al castellano: *La Lógica de la Preferencia*. Editorial Universitaria de Buenos Aires. Buenos Aires, 1967].