TRABAJANDO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON ESTRELLAS DE SEIS PUNTAS

Working on systems of linear equation with six points stars

MARCO VINICIO VÁSQUEZ BERNAL[1]

Recibido:09 de diciembre de 2017. Aceptado:23 de diciembre de 2017
DOI: http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2018.v5.n9.a44

Resumen

La enseñanza de las matemáticas tiene sus peculiaridades, cada vez el docente debe esforzarse por crear nuevas herramientas y procesos que despierten el interés de los estudiantes, innovando y proponiendo nuevas formas que permitan que el aula sea un espacio de comunicación armónico donde el conocimiento surge.

Este trabajo se ha planteado para desarrollar una temática de las matemáticas, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, presentándolas como una herramienta para resolver desafíos simples, lo que a simple vista se presenta es la imagen agradable de las estrellas de seis puntas, para mediante reflexión de su estructura establecer relaciones numéricas.

A lo largo de esta investigación está presente el criterio de equilibrio y armonía a pesar de la diversidad, es decir con números diferentes se puede llegar a un equilibrio, conceptos de pertenencia, no pertenecía, equivalencia y contradicción son manejados como conceptos a pesar de no mencionarse, se intenta que el individuo los utilice sin detenerse en discusiones sobre el concepto.

Esta investigación es parte de una propuesta didáctica que la desarrollamos en la UNAE de Ecuador, la primera parte de este trabajo se publicó en esta misma revista en el 2015 [1].

Palabras clave: Sistemas lineales, ecuaciones, equilibrio, estrellas de seis puntas.

Abstract

The teaching of mathematics has its peculiarities, each time the teacher must strive to create new tools and processes that arouse the interest of students, innovating and proposing new ways that allow the classroom to be a space of harmonious communication where knowledge arises

This research has been proposed to develop mathematical topics, the resolution of systems of linear equations, presenting them as a tool to solve simple challenges, what at first sight is presented is the pleasant image of the six-pointed stars, for reflection of its structure to establish numerical relationships.

Throughout this research, the criterion of balance and harmony is present despite diversity, that is, with different numbers it is possible to reach a balance, concepts of belonging, not belonging, equivalence and contradiction are handled as concepts despite not be mentioned, it is intended that the individual use them without stopping in discussions about the concept.

This research is part of a didactic proposal that we developed in the UNAE of Ecuador. The first part of this work was published in this same magazine in 2015 [1].

Keywords: Linear systems, equations, equilibrium, six-pointed stars.

1 Matemático, mención estadística. Magíster en Gerencia Empresarial (MBA). Magíster en Investigación para el Desarrollo Educativo. Diplomado Superior en Práctica Docente Universitaria y Especialista en Educación Universitaria. Actualmente, catedrático de la UNAE (Universidad Nacional de Educación de Ecuador). Miembro del Consejo editorial de la UNAE. Miembro del Consejo Editorial de la revista Mamakuna. Delegado Embajador de Ecuador en el Parlamento Internacional de Educación. Columnista de El Heraldo del Cañar y de Ecuadoruniversitario.com. Correo electrónico: marco.vasquez@unae.edu.ec

I. Introducción

TAL VEZ esta es la estrella mas común, ligada incluso a algunos hechos de la historia humana, llegando incluso a atribuirle poderes. Geométricamente resulta de dividir el círculo en seis partes, concepto similar a la definicion de radian, y su construcción es el resultado de sobreponer dos triangulos equilateros.

En este caso, como se observa en la Fig. 1, la estrella mágica contiene:

- 6 Segmentos.
- 6 vértices.
- 6 cortes.

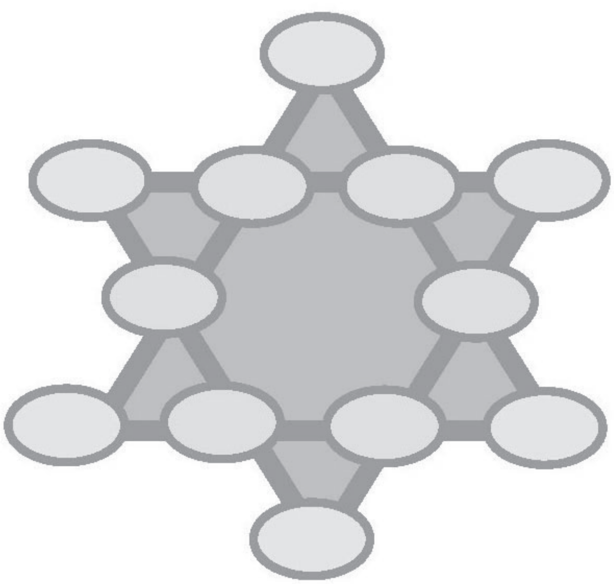

Fig. 1. Estrella Mágica.

- Tenemos entonces que la estrella esta compuesta de 12 elementos.
- En cada segmento estarán cuatro elementos.
- Cada elemento, simultáneamente forma parte de dos segmentos.
- Cada segmento se corta con otros cuatro y no se corta con uno.

II. Estrellas mágicas con elementos que forman series aritmeticas

Recordando las propiedades de las estrellas mágicas se indicará la forma de construir una estrella mágica con los primeros 12 enteros positivos, es decir se trabajará con el conjunto:

[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]

Que obviamente forman una serie aritmética, cuya razón es 1.

Primero se calcula cuanto suman todos estos elementos, utilizando la siguiente formula [2]:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Con n = 12, el resultado de la sumatoria tendremos 12x13/2 = 78.

Se sabe que cada uno de los elementos esta presente en dos segmentos, entonces la suma total será el doble, esto es 156.

Existen seis segmentos, donde todos deben sumar una misma cantidad, entonces cada segmento debe sumar veinte y seis (156/6 = 26).

A continuación en la Tabla I, se indicarán las 33 combinaciones de cuatro elementos cuya sumatoria es 26.

Deberemos escoger seis de ellas que cumplan las condiciones indicadas, que contengan en dos de ellas a cada uno de los doce números, que cada uno tenga un elemento común con cuatro de las demás, y que no tenga elemento en común con la otra.

Tomemos para iniciar la combinación 4, en relación a esta:

- Combinación 7 tiene en común el elemento 1.
- Combinación 19 tiene en común el elemento 10.
- Combinación 25 tiene en común el elemento 11.
- Combinación 30 tiene en común el elemento 4, y
- Combinación 11 no tiene elementos en común.

Tabla I. 33 combinaciones.

Combinaciones				
1	1	2	11	12
2	1	3	10	12
3	1	4	9	12
4	1	4	10	11
5	1	5	8	12
6	1	5	9	11
7	1	6	7	12
8	1	6	8	11
9	1	6	9	10
10	1	7	8	10
11	2	3	9	12
12	2	3	10	11
13	2	4	8	12
14	2	4	9	11
15	2	5	7	12
16	2	5	8	11
17	2	5	9	10
18	2	6	7	11
19	2	6	8	10
20	2	7	8	9
21	3	4	7	12
22	3	4	8	11
23	3	4	9	10
24	3	5	6	12
25	3	5	7	11
26	3	5	8	10
27	3	6	7	10
28	3	6	8	9
29	4	5	6	11
30	4	5	7	10
31	4	5	8	9
32	4	6	7	9
33	5	6	7	8

Tomando cada una de estas combinaciones podremos construir una estrella mágica de seis puntas, siguiendo los siguientes proceso:

1. Tomemos la combinación 4, de este escojamos el elemento 1 y ubiquemos este en un vértice.

La Fig. 2, muestra una estrella mágica donde los elementos de cada segmento suman 26, por lo indicado anteriormente.

En ningún caso esta es la única, pero nos sirve para poder analizar y generar otras, esta vez tomaremos en cuenta algunas consideraciones:

- Existen 33 combinaciones de cuatro números distintos del 1 al 12,
- Cada número está presente de 10 a 12 veces en las combinaciones.

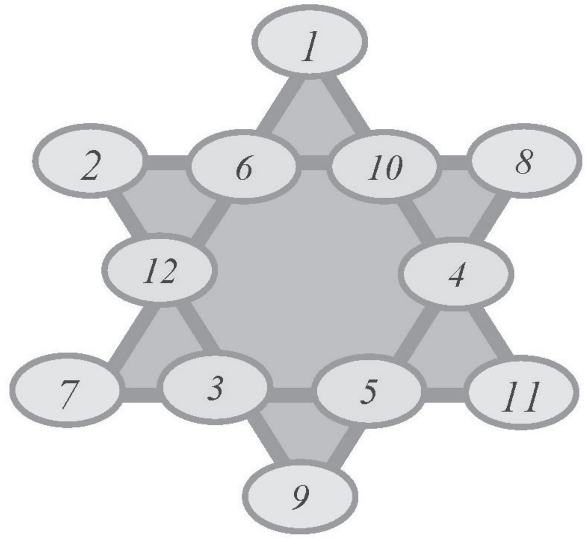

Fig. 2. Estrella Mágica–Elementos de cada segmento suman 26.

- Cada estrella mágica tiene seis segmentos.
- Cada número debe estar presente en dos de esos segmentos.
- En cada par de segmentos puede haber máximo un elemento en común.
- Todos los números deben estar presentes como elementos de la estrella.

Además debemos tomar en cuenta que si estudiamos de forma completa para un número, obtendremos todos los resultados posibles y no será necesario realizar el estudio para otro número.

Por lo indicado anteriormente, en la Tabla II, realizaremos un estudio para el numero uno.

Iniciaremos recordando las diez combinaciones donde esta presente el número uno, que enumeradas son:

Tabla II. Combinaciones que contienen el número 1.

A	1	2	11	12
B	1	3	10	12
C	1	4	9	12
D	1	4	10	11
E	1	5	8	12
F	1	5	9	11
G	1	6	7	12
H	1	6	8	11
I	1	6	9	10
j	1	7	8	10

Con base a las condiciones dadas, escogeremos pares de esta, que tengan en común únicamente el número 1.

Esto se da entre las combinaciones A e I, A y J, B y F, B y H, C y H, C y J, D y E, D y G, E e I, E e I, F y G; y, F y J, es decir existen 11 posibilidades.

A continuación estudiaremos cada uno de los casos, respetando el orden expuesto anteriormente.

Así tomaremos el caso entre las combinaciones A y D, el procedimiento a seguir será el siguiente [3]:

1. Luego de establecer las dos combinaciones, para la tercera buscaremos una que contenga un elemento de cada una de las combinaciones presentes y dos números distintos a los presentes en las dos combinaciones.

2. En las tres combinaciones estarán presentes nueve números, es decir tres no están en las indicadas.

3. De los tres que no están presentes, escogemos dos y buscamos una combinación que las contenga y además tenga dos cada una presente en una única combinación de las anteriores.

4. Tomaremos un número de los dos que tomamos de base para la anterior combinación, tomamos el tercer elemento que aún no ha sido considerado y buscamos una combinación que las contenga y además tenga dos, cada una presente en una única combinación de las anteriores.

5. Tomamos el otro número que no fue considerada en la combinación anterior, tomamos también el tercer numero que ya fue considerado en la combinación anterior y buscamos una combinación que las contenga y además tenga dos, cada una presente en una única combinación de las anteriores.

6. Con ello tomamos las seis combinaciones que constituyen la base matemática para construir la estrella mágica.

Aplicando lo indicado, seleccionamos las combinaciones A e I, ver Tabla III, que tienen en

Tabla III. Combinaciones A – I Alternativa 1

A	1	2	11	12
I	1	6	9	10
	2	9	7	8
	3	4	8	11
	3	5	6	12
	4	5	7	10

común, únicamente, el número 1, la tercera combinación la construimos tomando el 2 y el 9, que suman 11, escogeremos dos números que no estén en las combinaciones y cuya suma sea 15, en vista de que toda combinación debe sumar veinte y seis (26), escogemos el 7 y el 8.

Hasta allí tenemos tres combinaciones donde no están considerados ni el 3, ni el 4 ni el 5. Para la cuarta combinación colocamos el 3 y el 4, que suman 7, debemos escoger dos números que cada uno esté en una combinación distinta y sumen 19, escogemos el 8 y el 11 que están en las combinaciones primera y tercera respectivamente, para la quinta combinación tomamos otra vez el 3 y el otro valor que aún no ha sido considerado, el 5, entre los dos suman 8, escogeremos dos números que sumen 18, escogemos el 6 y el 12 que están en las combinaciones primera y segunda respectivamente. Para la ultima combinación tomamos los dos números que fueron ya relacionados con el 3, que suman 9, escogeremos dos números que sumen 17, escogemos el 7 y el 10 que están únicamente en la segunda y tercera combinación en su orden.

Luego del proceso indicado tenemos seis combinaciones, donde cada numero esta en dos de ellas, y cada par de combinaciones tienen a lo mucho un elemento en común, con este resultado podemos construir la estrella mágica [4] que se observa en la Fig. 3.

Para la construcción de la estrella simplemente ubicaremos los elementos, así en cada segmento, se ubicarán los elementos de cada combinación construida, deberemos tener en cuenta los elementos de cada intersección [5].

Se sugiere seguir el siguiente proceso:

a. Colocar el uno en un vértice (ubicamos 1),

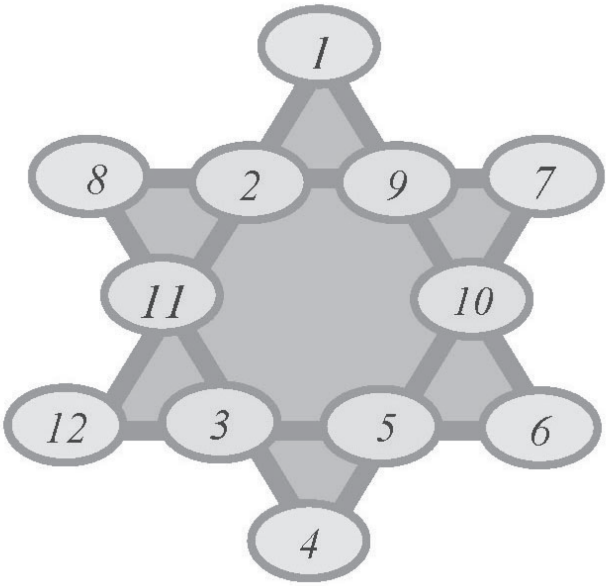

Fig. 3. Estrella Mágica – Base 2 y 9

b. Luego colocar los elementos diferentes de las dos primeras combinaciones que permitieron construir la tercera (colocamos 2 y 9).

c. Escogemos luego un elemento restante de la tercera combinación y lo ubicamos en un vértice, cuidando que se ubique junto al valor, con el cual coincida otro elemento en otra combinación, (8 junto al 2 ya que entre las combinaciones (1,2,11,12) y (8,11,3,4) coincide el 11, que será el otro).

d. Ese otro valor colocara en el siguiente corte (ubicamos el 11).

e. Llenaremos los dos segmentos, ubicando en los vértices, los números faltantes en las combinaciones (12 en el un segmento y 7 en el otro).

f. Para los otros cortes buscaremos los elementos coincidentes en las combinaciones hasta llenar la estrella mágica (así entre el segmento de vértice 8 y el otro de vértice 12 colocaremos el 3, entre el segmento de vértice 7 y el otro de vértice 1, colocamos el 10 que es coincidente en las combinaciones, luego ubicamos otro corte entre el segmento de vértice 12 y el otro de vértice 7 ubicamos el cinco.

g. Completamos otro segmento, colocando un vértice (en el ejemplo el 6).

h. Ubicaremos el último corte, por eliminación o tomando en cuenta los elementos de las combinaciones (colocamos el 10).

Con esto tenemos integrada la estrella mágica.

Esta claro que con las dos combinaciones seleccionadas, es posible obtener más de una estrella mágica, en la Tabla IV se observa otra posibilidad que se da si tomamos como base el seis y el once, y se genera la estrella mágica de la Fig. 4, además se tiene otra posibilidad la Tabla V y la Fig. 5.

Tabla IV. Combinaciones A-I Alternativa 2

A	1	2	11	12
I	1	6	9	10
	6	11	4	5
	3	7	4	12
	3	8	5	10
	7	8	2	9

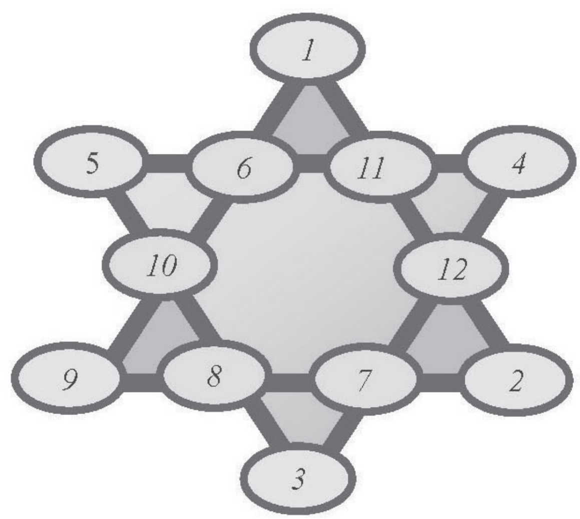

Fig. 4. Estrella Mágica –Base 6 y 11

Entre A y J, tendremos los siguientes resultados:

Tabla V. Combinaciones A-J Alternativa 1

A	1	2	11	12
J	1	7	8	10
	2	10	5	9
	3	4	7	12
	3	6	8	9
	4	6	11	5

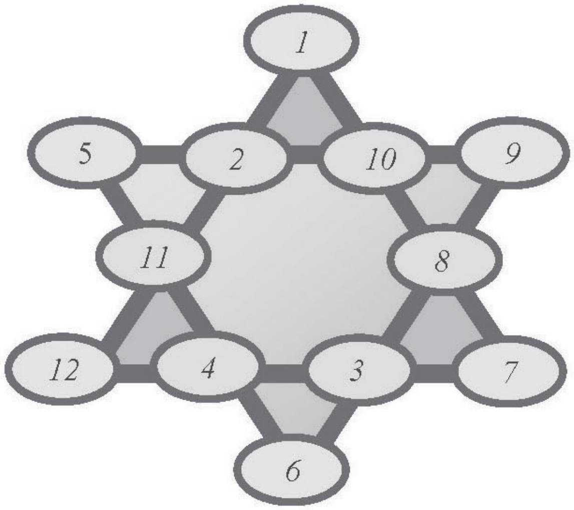

Fig. 5. Estrella Mágica – Base 2 y 10

Tabla VI. Combinaciones A-J Alternativa 2.

A	1	2	11	12
J	1	7	8	10
	7	12	3	4
	5	6	4	11
	5	9	2	10
	6	9	3	8

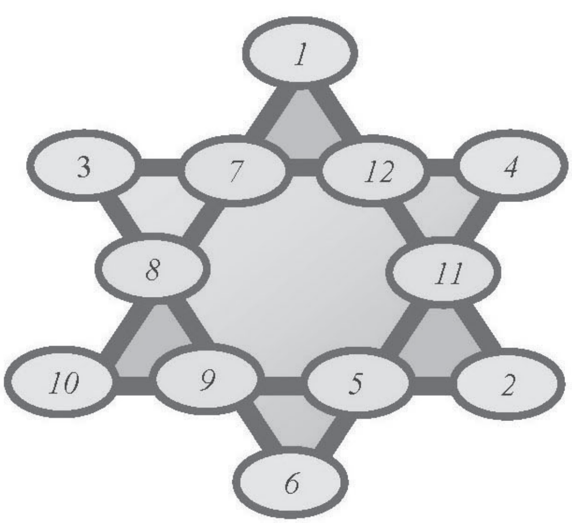

Fig. 6. Estrella Mágica - Base 7 y 12.

Entre B y F se tienen los siguientes resultados:

Tabla VII. Combinaciones B-F Alternativa 1.

B	1	3	10	12
F	1	5	9	11
	3	9	6	8
	2	4	8	12
	2	7	6	11
	4	7	5	10

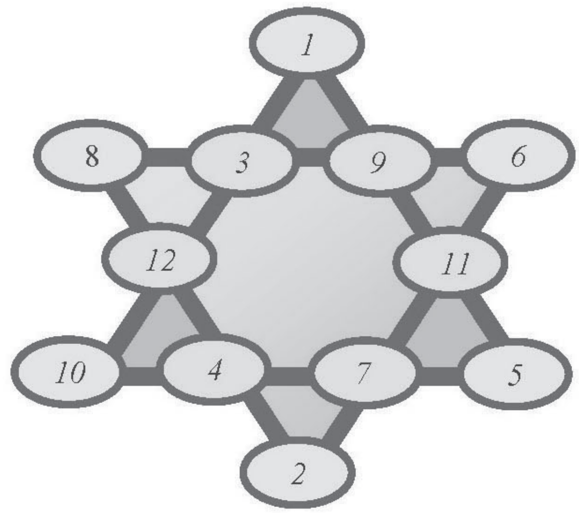

Fig. 7. Estrella Mágica - Base 3 y 9

Tabla VIII. Combinaciones B-F Alternativa 2

B	1	3	10	12
F	1	5	9	11
	3	11	4	8
	2	6	8	10
	2	7	5	12
	6	7	4	9

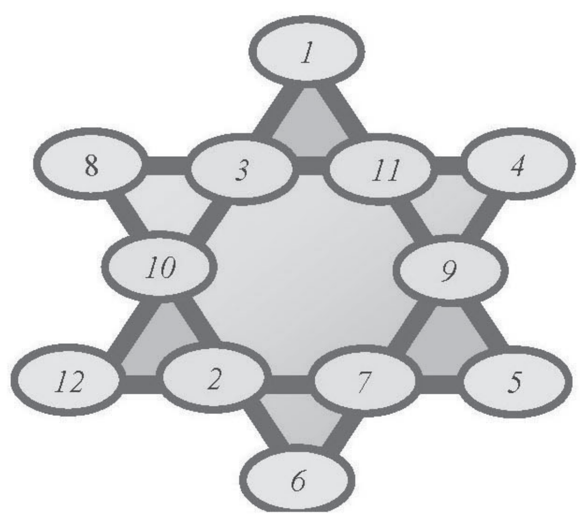

Fig. 8. Estrella Mágica - Base 3 y 11

Entre B y H se tienen los siguientes resultados:

Tabla IX. Combinaciones B-H Alternativa 1

B	1	3	10	12
H	1	6	8	11
	3	11	5	7
	2	4	8	12
	2	9	5	10
	4	9	6	7

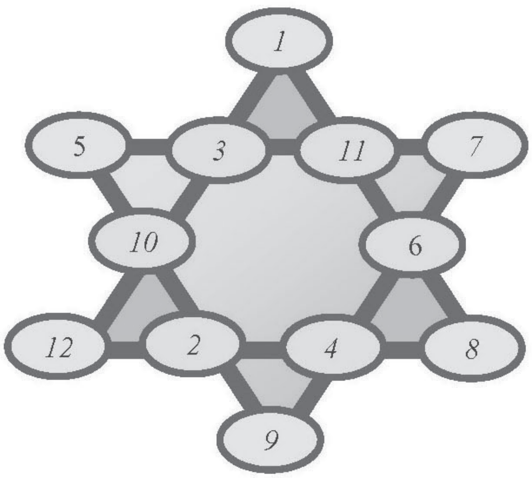

Fig. 9. Estrella Mágica - Base 3 y 11

Para el caso de las combinaciones entre C y H tendríamos:

Tabla X. Combinaciones C-H Alternativa 1

C	1	4	9	12
H	1	6	8	11
	8	9	2	7
	3	5	6	12
	3	10	2	11
	5	10	4	7

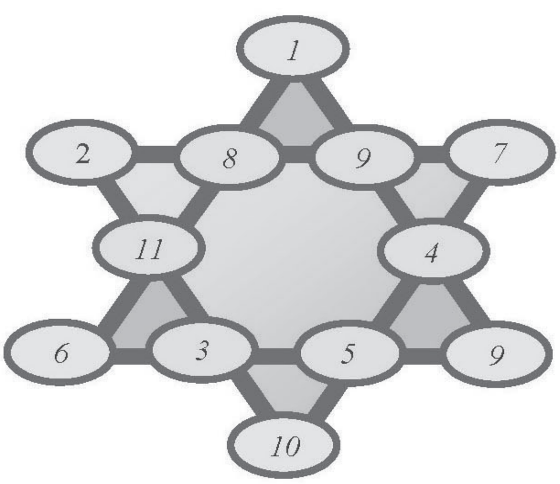

Fig. 10. Estrella Mágica - Base 8 y 9

Para el caso de las combinaciones entre C y J tendríamos:

Tabla XI. Combinaciones C-J Alternativa 1

C	1	4	9	12
J	1	7	8	10
	4	8	3	11
	2	5	9	10
	2	6	7	11
	5	6	3	12

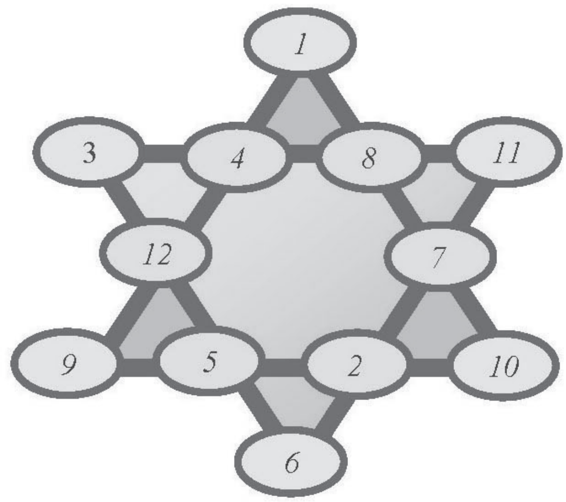

Fig. 11. Estrella Mágica - Base 4 y 8

Tabla XII. Combinaciones C-J Alternativa 2

C	1	4	9	12
j	1	7	8	10
	9	8	3	6
	2	5	7	12
	2	11	3	10
	5	11	4	6

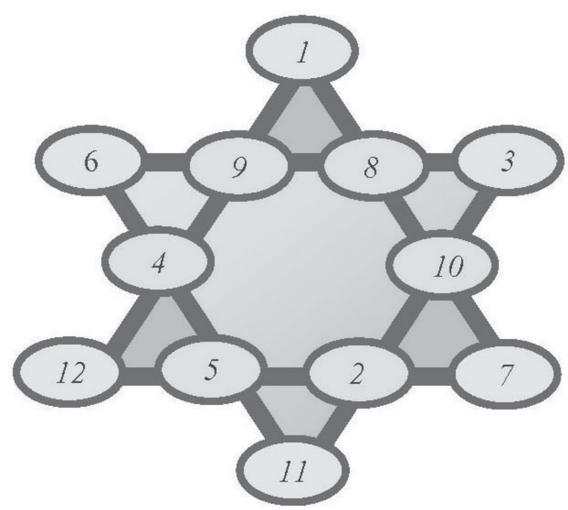

Fig. 12. Estrella Mágica - Base 9 y 8

Entre las combinaciones D y E se tendrá:

Tabla XIII. Combinaciones D-E Alternativa 1

D	1	4	10	11
E	1	5	8	12
	4	12	3	7
	2	6	7	11
	2	9	5	10
	6	9	8	3

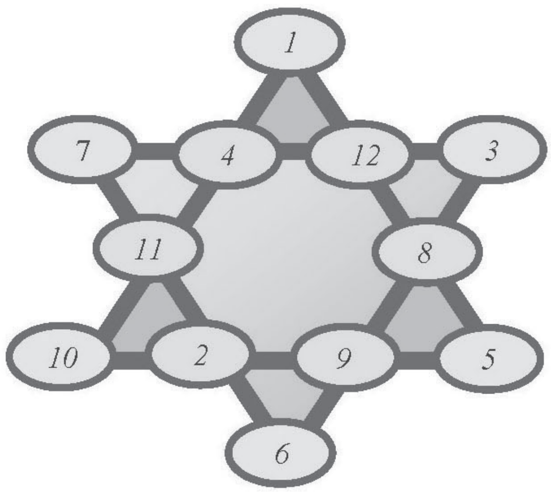

Fig. 13. Estrella Mágica - Base 4 y 12

Tabla XIV. Combinaciones D-E Alternativa 2

D	1	4	10	11
E	1	5	8	12
	8	10	2	6
	3	7	5	11
	3	9	2	12
	7	9	4	6

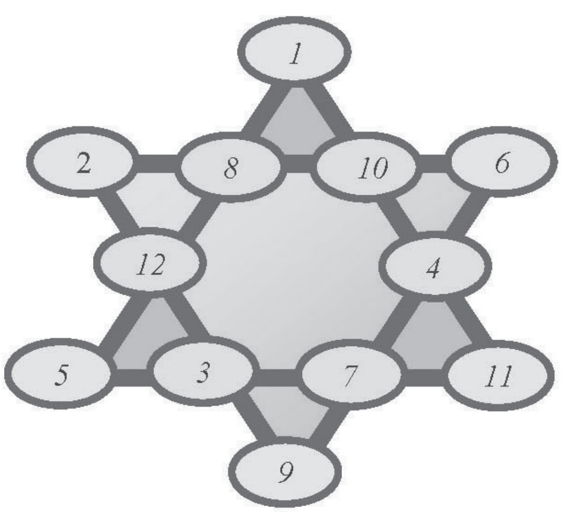

Fig. 14. Estrella Mágica - Base 8 y 10

Para las combinaciones D y G tendremos los resultados:

Tabla XV. Combinaciones D-G Alternativa 1

D	1	4	10	11
G	1	6	7	12
	4	12	2	8
	3	5	7	11
	3	9	6	8
	5	9	2	10

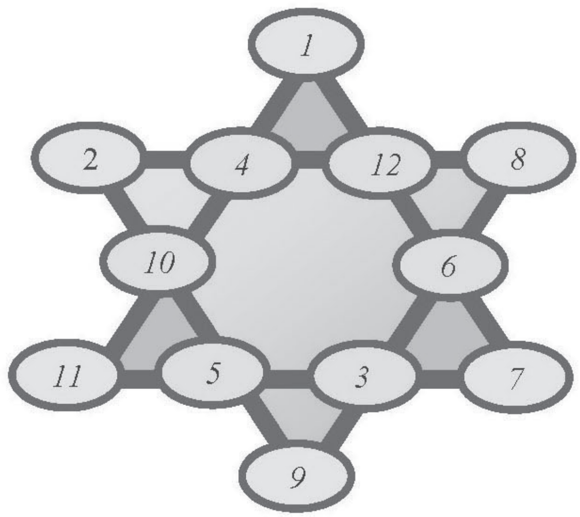

Fig. 15. Estrella Mágica - Base 4 y 12

Tabla XVI. Combinaciones D-G Alternativa 2

D	1	4	10	11
G	1	6	7	12
	6	10	2	8
	3	5	7	11
	3	9	2	12
	5	9	4	8

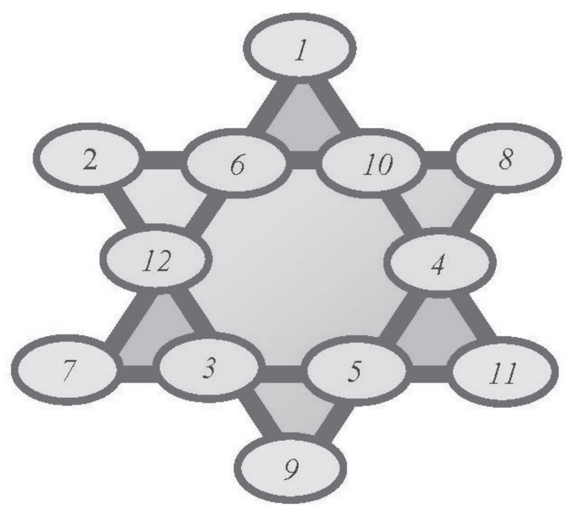

Fig. 16. Estrella Mágica - Base 6 y 10

Para las combinaciones entre E e I, se tendrá:

Tabla XVII. Combinaciones E-I Alternativa 1

E	1	5	8	12
I	1	6	9	10
	5	6	4	11
	2	3	10	11
	2	7	8	9
	3	7	4	12

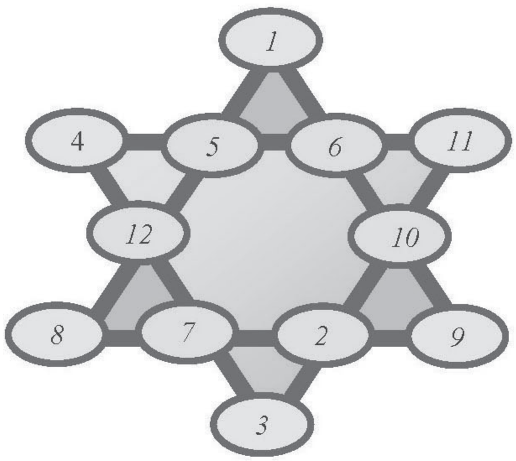

Fig. 17. Estrella Mágica - Base 5 y 6

Tabla XVIII. Combinaciones E-I Alternativa 2

E	1	5	8	12
I	1	6	9	10
	5	10	4	7
	2	3	9	12
	2	11	6	7
	3	11	4	8

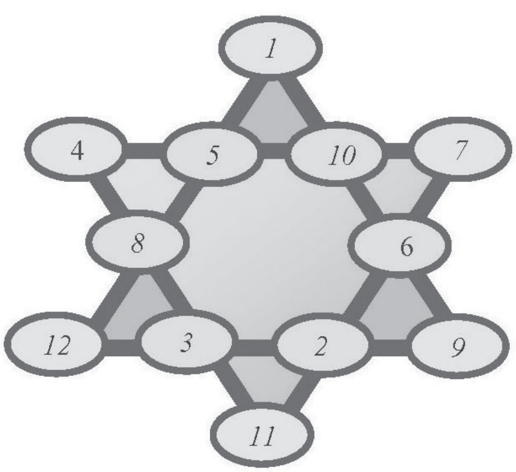

Fig. 18. Estrella Mágica - Base 5 y 10

Combinando entre F y G se tiene:

Tabla XIX. Combinaciones F-G Alternativa 1

F	1	5	9	11
G	1	6	7	12
	5	7	4	10
	2	3	10	11
	2	8	4	12
	3	8	6	9

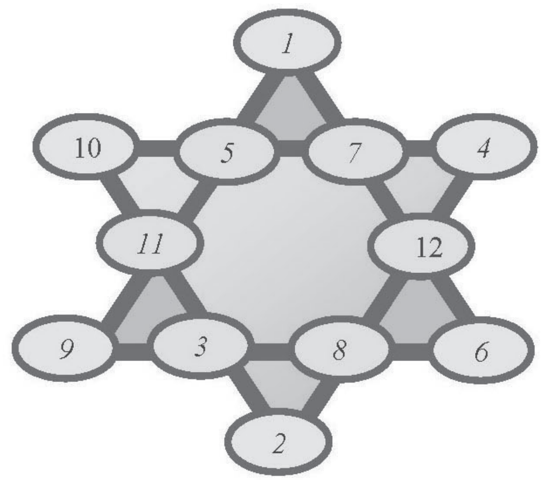

Fig. 19. Estrella Mágica - Base 5 y 7

Tabla XX. Combinaciones F-G Alternativa 2

F	1	5	9	11
G	1	6	7	12
	9	12	2	3
	4	8	3	11
	4	10	7	5
	8	10	2	6

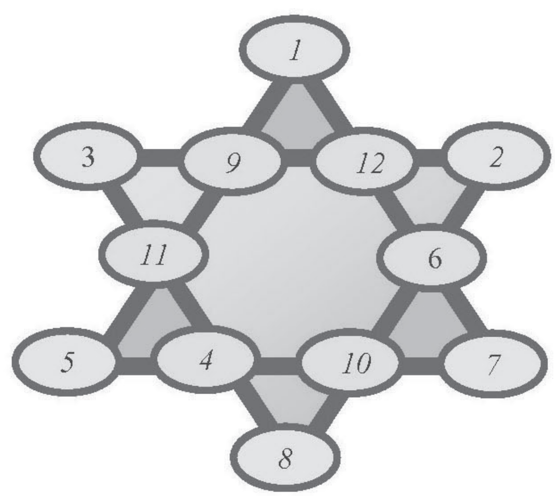

Fig. 20. Estrella Mágica - Base 9 y 12

Combinando entre F y J, tenemos los resultados:

Tabla XXI. Combinaciones F-J Alternativa 1

F	1	5	9	11
J	1	7	8	10
	7	9	4	6
	2	3	10	11
	2	12	4	8
	3	12	5	6

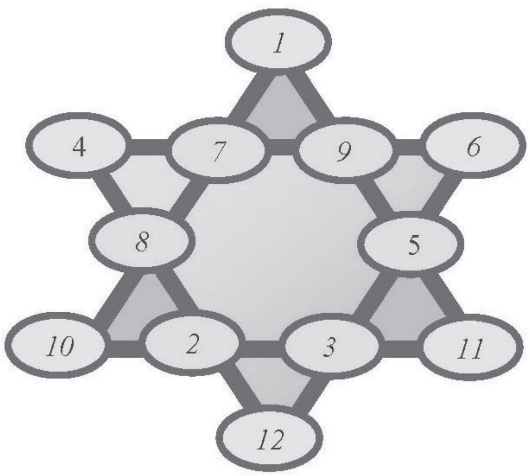

Fig. 21. Estrella Mágica - Base 7 y 9

Tabla XXII. Combinaciones F-J Alternativa 2

F	1	5	9	11
J	1	7	8	10
	9	10	3	4
	2	6	7	11
	2	12	4	8
	6	12	3	5

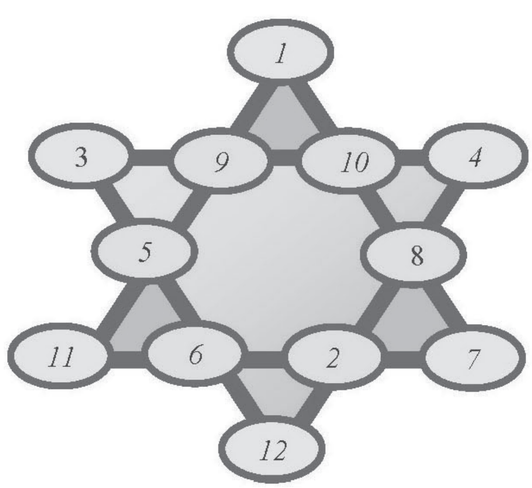

Fig. 22. Estrella Mágica - Base 9 y 10

Tenemos entonces 20 estrellas mágicas distintas.

La estructura de la estrella mágica de seis puntas donde cada segmento es una combinación de cuatro elementos que suman una cantidad constante y que tiene un elemento en común con otros cuatro segmentos, y no tiene elementos en común con uno de ellos, se puede observar en la Fig. 23, que el segmento 1, se interseca con los segmentos 2, 3, 5 y 6.; y, no se interseca con el segmento 4, de igual forma, el segmento 2 no se interseca con el segmento 6, y el segmento 3 no se interseca con el segmento 5.

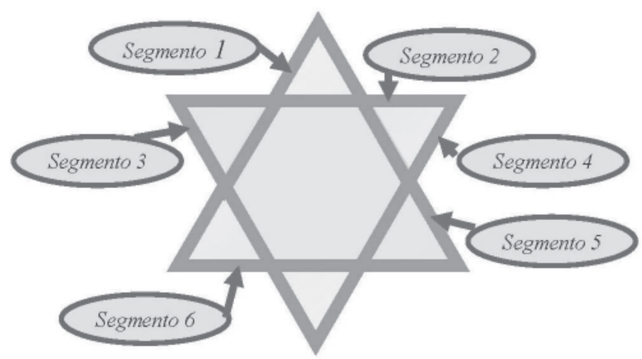

Fig. 23. Segmentos de la Estrella Mágica

Eso hace que si fijamos un segmente, podamos relacionarlos únicamente con las otro cuatro y teniendo en cuanta que entre ellos no se intersequen dos a dos, lo que hace que tengamos no 24 resultados diferentes (4!), sino únicamente 8.

III. Estrellas mágicas derivadas

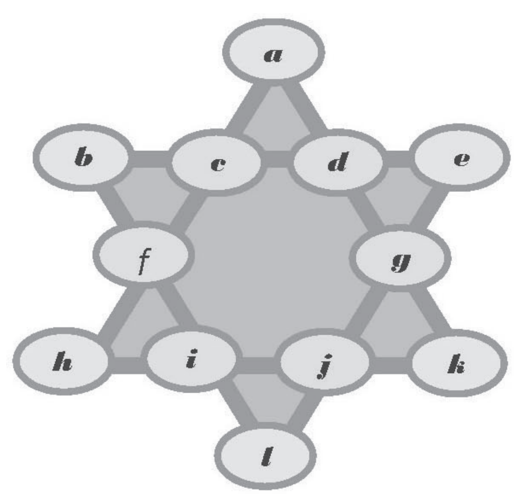

Fig. 24. Estrella Mágica Derivada

A. Fijamos una esquina, para el ejemplo tomamos la esquina a.

B. Fijemos la esquina opuesta, en nuestro caso l.

C. Existen dos segmentos, que no contienen los vértices seleccionados, en estos, a partir de la ubicación del vértice, los cuatro elementos se dividen en dos grupos de dos elementos compuestos por un vértice y un corte, manteniendo al mismo lado con respecto a los vértices cambiamos el vértice de un segmento pasara a ser corte del otro, y viceversa, así movemos los ocho elementos, este se aprecia en la figura 24. Para nuestro ejemplo los grupos serian b y c a la derecha de a; d y e a la izquierdo de a; y además h e i, a la izquierda de l; y, j y k a la derecha de l. Cambiaremos k por d, j por e, h por c y i por b, conforme se plantea en las líneas roja y negra.

D. Con los movimientos indicados, se tiene una nueva estrella mágica donde han cambiado los segmentos, pero los elementos en estos se mantienen, como se observa en la figura 25.

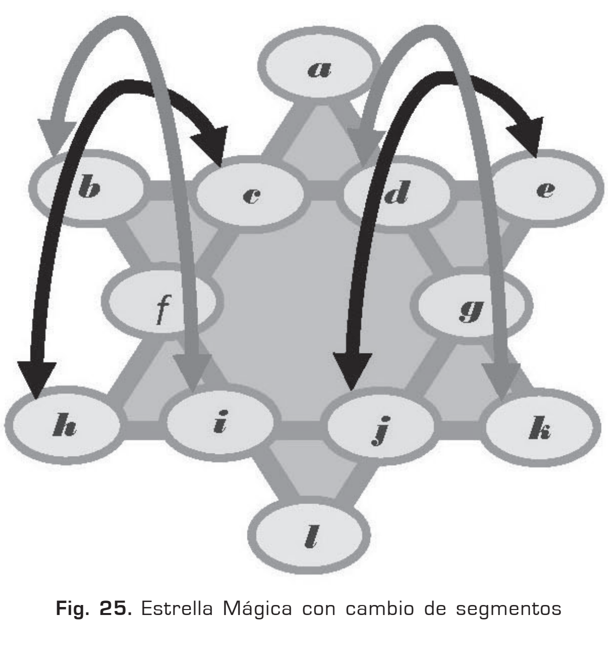

Fig. 25. Estrella Mágica con cambio de segmentos

Debe indicarse que los elementos f y g, no se mueven al igual que los vértices a y l.

Está claro que la estrella resultante es otra, con las mismas combinaciones.

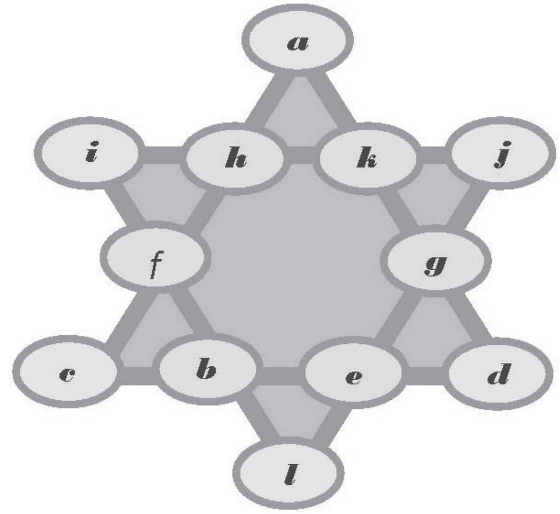

Fig. 26. Estrella Mágica con cambios

De igual manera, siguiendo el mismo proceso y fijando los vértices e y k de la figura 24, se generan las estrellas mágicas de las figuras 27 y 28.

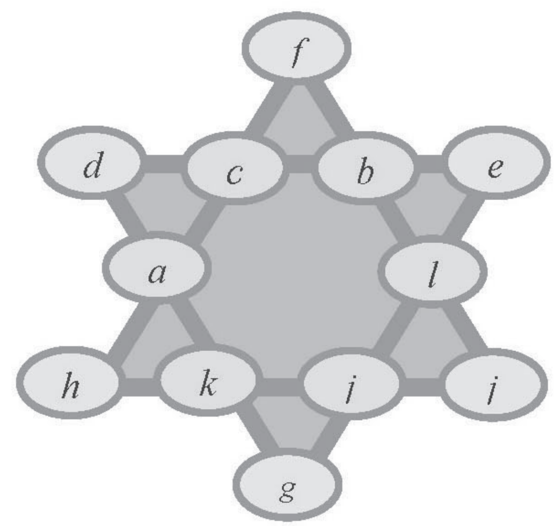

Fig. 27. Estrella Mágica con cambios 1

Es decir de cada estrella mágica se pueden derivar 3 distintas, ó por cada combinación matemática que cumpla las condiciones se tendrán cuatro estrellas mágicas distintas.

Si intentamos otro proceso como el planteado, la estrella resultante será una rotación sobre el centro de las indicadas y no otra.

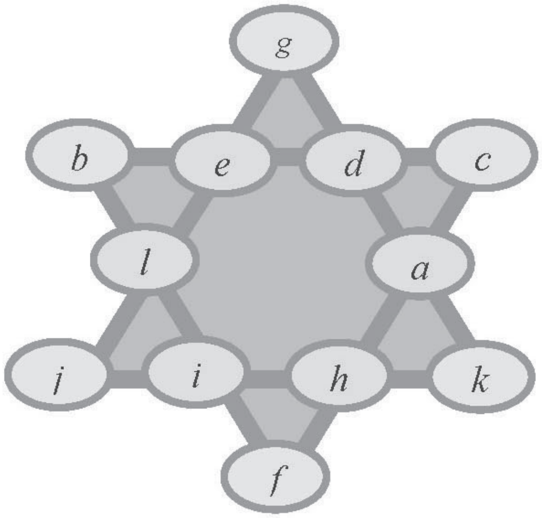

Fig. 28. Estrella Mágica con cambios 2

Se debe anotar por último que por cada estrella mágica se puede generar una simétrica que tampoco podría considerarse una distinta, mas bien se designara una rotación de 180 grados, tomando como eje la recta que pase por dos vértices opuestos ó dos cortes opuestos, y el resultado será el mismo.

Una rotación de la Fig. 24 es la Fig. 29

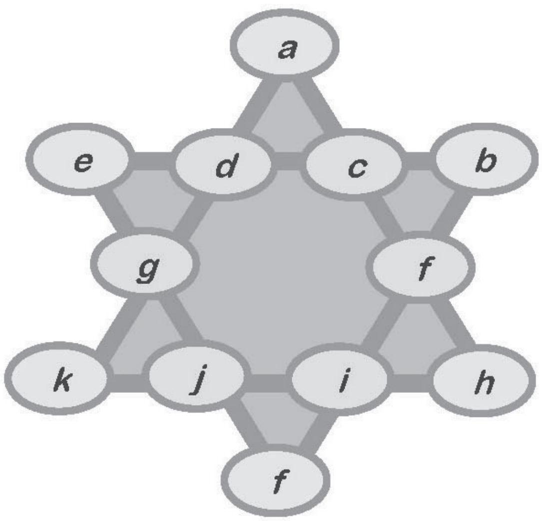

Fig. 29. Estrella Mágica con rotación

Se pueden definir además rotaciones sobre el centro, en sentido de las manecillas del reloj y para cada estrella existirán 6 posibilidades con esta rotación.

Consecuentemente, por cada combinación matemática que cumpla las condiciones expuestas anteriormente, tendremos cuatro estrellas mágicas distintas, cuatro rotaciones de 180 grados y rotaciones sobre su centro, es decir 48 estrellas derivadas, es decir con números consecutivos del 1 al 12 podremos establecer 960 estrellas mágicas, la estructura especial de que los elementos que cada segmento, tiene un elemento común con los otros cuatro.

IV. Generacion de estrellas magicas de seis vertices

El hecho de que se pueda generar estrellas mágicas de seis vértices con los elementos enteros del 1 al 12, es de vital importancia, en vista de que esos elementos forman entre sí una sucesión aritmética y la misma puede transformarse en otras a través de transformaciones lineales cualesquiera, que a su vez formarán otra sucesión aritmética que cumplirá la condición de estrella mágica [6][7].

Lo expresado anteriormente es fácilmente demonstrable, supongamos tenemos las seis combinaciones:

Que como se vio en la figura 24 genera una estrella mágica, donde la suma en cada segmento es 26.

A estos elementos aplicamos la transformación lineal: a n + b, donde a y b son números reales cualesquiera y n es elemento de la estrella mágica de la Tabla XXIII.

Tabla XXIII. Seis combinaciones

1º	1	5	9	11
2ª	1	7	8	10
3ª	7	9	4	6
4ª	2	3	10	11
5ª	2	12	4	8
&	3	12	5	6

Realizando las operaciones respectivas, tendremos que se genera el nuevo conjunto de seis combinaciones, que se observa en el Tabla XXIV, donde obviamente los elementos de todas las combinaciones suman **26a+4b**, como se puede comprobar en la Fig. 30.

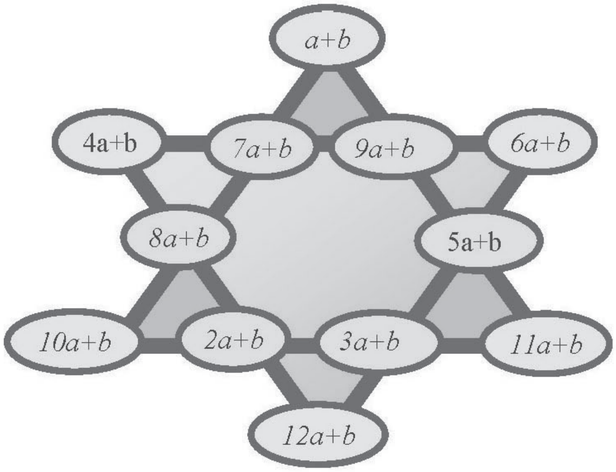

Fig. 30. Estrella Mágica con operaciones

Para verificar podríamos proponer lo siguiente:

Ejemplo 1. Construir la estrella mágica de seis puntas si a = 5 y b = -10. Las combinaciones derivadas de la Tabla XXIV y son presentadas en la tabla XXV, la estrella mágica de seis puntas será la mostrada en la Fig. 31, donde los elementos de cada segmento suman 90 (5x26 +4x(-10) = 90).

Tabla XXIV. Nuevo Conjunto

1º	a+b	5a+b	9a+b	11a+b
2ª	a+b	7a+b	8a+b	10a+b
3ª	7a+b	9a+b	4a+b	6a+b
4ª	2a+b	3a+b	10a+b	11a+b
5ª	2a+b	12a+b	4a+b	8a+b
&	3a+b	12a+b	5a+b	6a+b

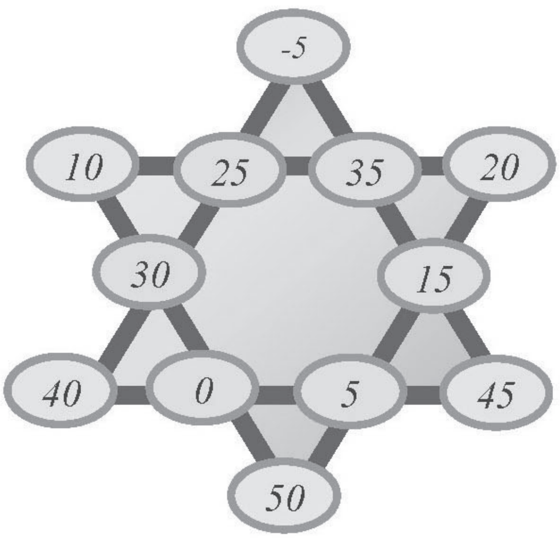

Fig. 31. Estrella Mágica –cada segmento suman 90

Tabla XXV. Combinaciones derivadas

1º	-5	15	35	45
2ª	-5	25	30	40
3ª	25	35	10	20
4ª	0	5	40	45
5ª	0	50	10	30
&	5	50	15	20

Esta claro entonces que esto se cumple para cualquier combinación lineal.

V. Construcción de una estrella magica, conociendo la constante de suma por segmento

Con base de lo anterior, podemos entonces de antemano fijar un valor deseado para la constante de suma por segmento, y en base a definir una transformación lineal planteada, existen infinitas, construir la estrella mágica de seis puntas que cumple lo solicitado [8].

Para lograr el objetivo planteado, deberemos seguir el siguiente proceso:

1. Definir el valor que se estipula como constate de suma de elementos por segmento (T).

2. Tomar uno de los veinte grupos de combinaciones que construyen una estrella mágica.

3. Determinar los valores **a y b**, de la relación lineal **26a + 4b = T**, seleccionándolo de infinitas posibilidades (26 es la suma original por segmento).

4. Con los valores de a y b, y en base del grupo de combinaciones seleccionadas en el paso 2, construir un nuevo grupo de combinaciones con los resultados de afectar a cada elemento dicha relación lineal.

5. Construir la nueva estrella mágica, ha sabiendas de que existen cuatro distintas, 4 simétricas y 48 derivaciones en total tomando en cuenta las rotaciones.

Ejemplo 2.

1. Fijar el valor de T es cien (100)

2. Escoger las combinaciones de la Tabla XXVI, que es una copia de la Tabla XVI.

   $26a + 4b = 100, \Longleftrightarrow b = (100 - 26a)/4$, es una relación equivalente, que muestra las infinitas posibilidades para escoger pares a y b que cumplan, ($a = 1, b = 37/2 = 18.5$), ($a = 2, b = 12$), ($a = 3, b = 11/2$), ($a = 4, b = -1$), son cuatro de ellas, escogeremos $a = 2$, $b = 12$.

3. Aplicando la transformación $2n + 12$ a cada elemento de la Tabla XXVI, tendremos la Tabla XXVII.

Tabla XXVI. Combinaciones ejemplo 2

1º	1	4	10	11
2º	1	6	7	12
3º	6	10	2	8
4º	3	5	7	11
5º	3	9	2	12
6º	5	9	4	8

Tabla XXVII. Transformación

1º	14	20	32	34
2º	14	24	26	36
3º	24	32	16	28
4º	18	22	26	34
5º	18	30	16	36
6º	22	30	20	28

4. Se construye la estrella mágica requerida, que se observa en la Fig. 32, donde se puede apreciar que se cumple la condición de estrella mágica de seis puntas, donde los elemento de cada segmento suman cien, cumpliendo el objetivo planteado.

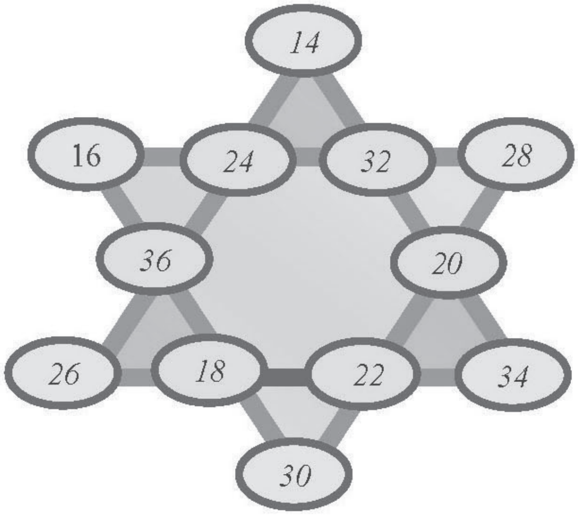

Fig. 32. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 100.

VI. Construccion de estrellas mágicas con valores que forman una serie aritmética

Con lo anteriormente indicado esto se facilita bastante, para aclarar diremos **"Si tenemos una serie aritmética de hasta doce elementos, se podrá construir estrellas mágicas con estos según se ha demostrado"**, si la cantidad de elementos es menos de doce, y forman una serie aritmética, se completara la serie y se procederá a construir la estrella mágica deseada [9].

Ejemplo 3. Deseamos construir una estrella mágica que contenga los elementos 19, 7, 15, 11.

Si ubicamos ordenadamente los números indicados: 7, 11, 15 y 19, vemos que si forma una serie aritmética donde la razón es 4, y existen 9 posibilidades para construir la serie completa, ya que el 7 puede ubicarse en el primero, segundo y hasta novena ubicación.

Este grupo de números también forman una serie aritmética de razón 2, donde los valores expuestos no son secuenciales en la sucesión, en este caso existen 5 series, el 7 puede ocupar desde el primer puesto hasta el quinto.

Para desarrollar el ejemplo escogeremos una serie de razón 2 donde el 7 ocupe el tercer puesto, es decir la serie aritmética seria: (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25).

Que resulta de utilizar la aplicación lineal $2n + 1$, a la estudiada, es sabido que para esto se puede tomar cualquiera de los veinte grupos de combinaciones que permiten la construcción de estrellas mágicas, escogeremos las que se ven en la Tabla XXVIII, que son las de la Tabla VII.

Aplicando la combinación lineal a estas combinaciones, se generan las combinaciones de la Tabla XXIX.

Ubicando esas combinaciones generamos la estrella mágica de la Fig. 33.

Tabla XXVIII. Combinaciones Tabla VII

1º	1	3	10	12
2º	1	5	9	11
3º	3	9	6	8
4º	2	4	8	12
5º	2	7	6	11
6º	4	7	5	10

Tabla XXIX. Combinaciones Resultantes Ejemplo 3

1º	3	7	21	25
2º	3	11	19	23
3º	7	19	13	17
4º	5	9	17	25
5º	5	15	13	23
6º	9	15	11	21

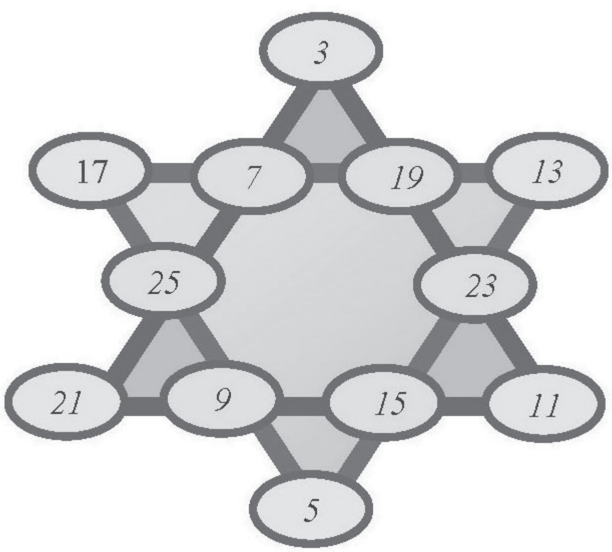

Fig. 33. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 56.

Se puede observar que la misma cumple con las condiciones de estrella mágica, que obviamente contiene como elementos los números 7, 11, 15 y 19, con una suma constante por segmento de 56.

Cuando se propone construir estrellas mágicas que contengan dos números cualesquiera, siempre será posible encontrar la serie aritmética que los contenga, seguiremos el siguiente proceso:

1. Calcularemos la razón que será la diferencia entre los dos números ó lo que resulte de dividir esta diferencia para enteros del 1 al 11.
2. Luego construiremos la serie aritmética de la cual los elementos forman parte, existirán algunas posibilidades, dependiendo del valor para el cual se ha dividido la diferencia, si razón se ha calculado dividiendo la diferencia para i (valor entre 1 y 11), existirán 12– i series aritméticas.
3. Encontraremos la aplicación lineal que la genera de la base de los números enteros del 1 al 12.
4. Escogeremos uno de los veinte grupos de combinaciones que construyen estrellas mágicas.
5. Generaremos el nuevo grupo de combinaciones.
6. Construiremos la estrella mágica requerida (existen 48 posibles).

Ejemplo 4. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 7 y 136.

La diferencia entre estos dos números es 129, cuyos submúltiplos son 1, 3, 43 y 129, resultantes de dividir la diferencia para 136, 43, 3 y 1 respectivamente, de éstos los menores a 13 son 3 y 1, entonces las posibles razones serán 43 ó 129, para el desarrollo escogeremos como razón el valor de 43, entonces entre los elementos 7 y 136 se ubicaran dos más (50 y 93), por lo que es posible proponer series donde el 7 pueda ser el primer elemento o ubicarlo hasta en el noveno lugar, es decir existen 9 posibilidades, escogeremos aquella donde el elemento 7 este en el quinto lugar, por tanto la serie aritmética será: (-165, -122, -79, -36, 7, 50, 93, 136, 179, 222, 265, 308).

La aplicación lineal para este caso será: **43 n– 208.**

Tomaremos como base las combinaciones que se presentan en la Tabla XXX, que es una copia de la Tabla XI.

Aplicando la combinación lineal planteada tenemos el grupo de combinaciones que se presentan en la Tabla XXXI.

Con las combinaciones indicadas es posible construir la estrella mágica requerida, misma que

Tabla XXX. Combinaciones Tabla XI

1º	1	4	9	12
2º	1	7	8	10
3º	4	8	3	11
4º	2	5	9	10
5º	2	6	7	11
6º	5	6	3	12

Tabla XXXI. Combinaciones Resultantes Ejemplo 4

1º	-165	-36	179	308
2º	-165	93	136	222
3º	-36	136	-79	265
4º	-122	7	179	222
5º	-122	50	93	265
6º	7	50	-79	308

se observa en la Fig. 34. Donde se observa que están presentes los números 7 y 136, además todos los elementos suman 286.

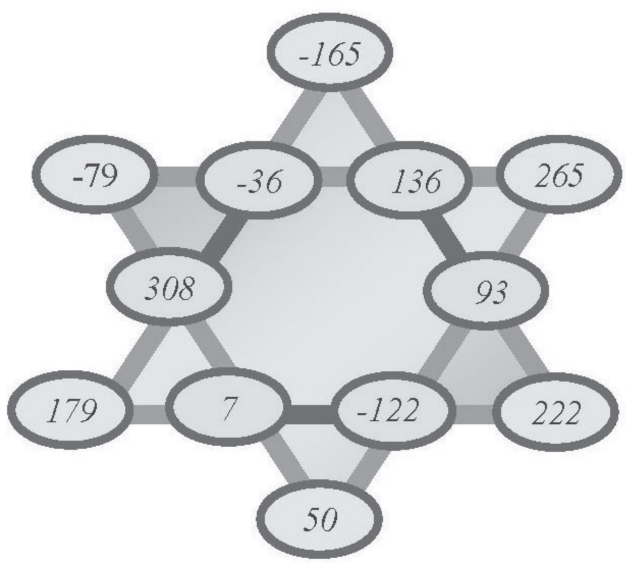

Fig. 34. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 286.

Si lo que se desea es construir una estrella mágica que contenga tres valores dados deben cumplirse una de las siguientes condiciones:

a. El número medio es el promedio aritmético entre los dos extremos.

b. La diferencia entre el número mayor y el número intermedio debe ser múltiplo de la diferencia entre el número medio y el número menor, y la razón entre las diferencias debe ser un entero menor a once.

c. La diferencia entre el número menor y el número intermedio debe ser múltiplo de la diferencia entre el número medio y el número mayor, y la razón entre las diferencias debe ser un entero menor a once.

d. La diferencia entre el número mayor y el número medio, y la diferencia entre el número medio y el número menor son múltiplos de un mismo número, y sus razones con respecto a ese submúltiplo común no deben sumar más de once.

El caso a es evidente, pues los tres números formarían una serie aritmética.

Para estos casos se asegura el siguiente proceso:

1. Identificar la razón, en algunos casos será posible encontrar además otra razón submúltipla de esta.

2. Construir la serie aritmética que los contenga, es posible que existan, mas de una posibilidad.

3. Encontraremos la aplicación lineal que la genera de la base de los números enteros del 1 al 12.

4. Escogeremos uno de los veinte grupos de combinaciones que construyen estrellas mágicas.

5. Generaremos el nuevo grupo de combinaciones.

6. Construiremos la estrella mágica requerida (existen 48 posibles).

Ejemplo 5. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 75, 12, 21.

Ordenando los números tendremos: 12, 21 y 75, entonces la diferencia entre el número mayor y el intermedio es 54 y la diferencia entre el intermedio y el menor es 9, donde se puede ver que la diferencia mayor dividida para la diferencia menor es 6, entonces en este caso la razón de la serie aritmética sería el 9, como además 6 + 1 = 7, que es menor que 11, y además, en este caso, no es posible tomar otra razón para la serie aritmética, por cuanto en ese caso la suma de los cocientes será mayor a once.

Entre 12 y 75, tenemos por tanto cinco números intermedios que construirán una serie obligada de siete elementos, los cinco restantes pueden ser ala izquierda, a la derecha o a ambos lados, existen por tanto existen seis posibles series, escogeremos aquella donde el 12 se ubique en el tercer puesto, es decir la serie es: (-6, 3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93), que tiene razón nueve y contiene los doce elementos.

La aplicación lineal será: **9 n – 15.**

Escogemos el grupo de combinaciones que se ve en la Tabla XXXII, igual a la Tabla XIV, para aplicar a este la combinación lineal planteada y generar la Tabla XXXIII, con el que construiremos la estrella mágica que se observa en la Fig. 35.

Tabla XXXII. Combinaciones Tabla XIV

1º	1	4	10	11
2º	1	5	8	12
3º	8	10	2	6
4º	3	7	5	11
5º	3	9	2	12
6º	7	9	4	6

Tabla XXXIII. Combinaciones Resultantes Ejemplo 5

1º	-6	21	75	84
2º	-6	30	57	93
3º	57	75	3	39
4º	12	48	30	84
5º	12	66	3	93
6º	48	66	21	39

Se puede comprobar que la estrella mágica planteada contiene a los elementos: 12, 21 y 75, además se debe indicar que la constante de suma por segmento es 174.

Ejemplo 6. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 43, 11, 83.

En este caso, los números ordenados serán: 11, 43 y 83, por tanto la diferencia del número mayor

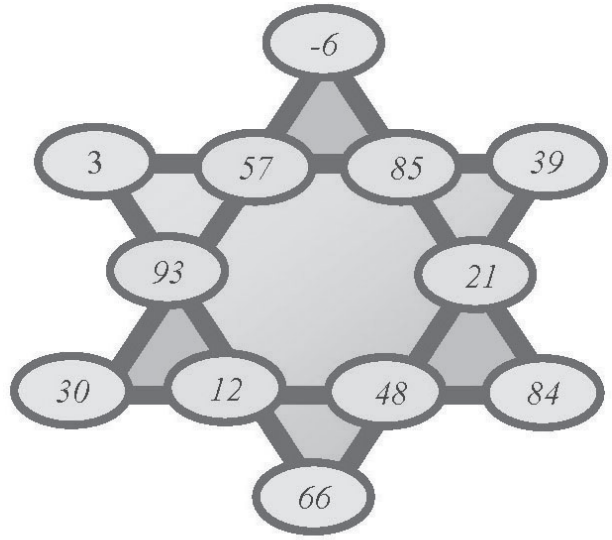

Fig. 35. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 174.

al medio será 40 y del intermedio al menor será 32, en este caso el cociente entre las diferencias no es un valor entero, pero en cambio las dos son múltiplos de los números 8, 4, 2 y 1.

En este caso tenemos 32/8 = 4 y 40/8 =5, y además 4 + 5 < 12.

Si hacemos este calculo para otro submúltiplo 32/4 = 8 y 40/4= 10, donde 8 + 10 > 11, es decir podemos construir la serie aritmética con razón 8, y no de los demás submúltiplos, tendríamos la serie: 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59, 67, 75, 83, compuesta de 10 elementos, deberemos añadir 2 elementos menores, un menor y un mayor o dos mayores, escogeremos el caso donde el 11 sea el segundo elemente, la serie sería: (3, 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59, 67, 75, 83, 91).

La aplicación lineal seria: **8 n – 5.**

Escogemos los grupos de combinaciones que se observan en la Tabla XXXIV, que es igual a la Tabla V y que en función de la aplicación lineal planteada se genera la Tabla XXXV y que posibilitan construir la estrella mágica que se presenta en la Fig. 36.

Se comprueba que todos los segmentos suman 188, donde están presentes los números 43, 11 y 83.

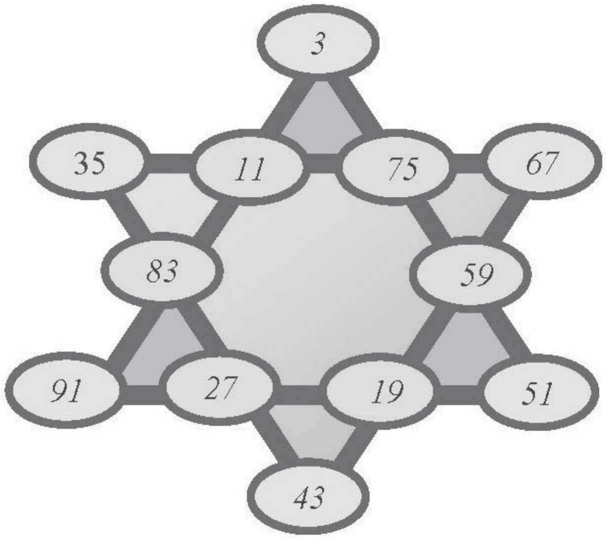

Fig. 36. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 188.

Tabla XXXIV. Combinaciones Tabla XV

1º	1	2	11	12
2º	1	7	8	10
3º	2	10	5	9
4º	3	4	7	12
5º	3	6	8	9
6º	4	6	11	5

Tabla XXXV. Combinaciones Resultantes Ejemplo 6

1º	3	11	83	91
2º	3	51	59	75
3º	11	75	35	67
4º	19	27	51	91
5º	19	43	59	67
6º	27	43	83	35

Ejemplo 7. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 47, 15, 95.

Poniendo los números dados en orden tendremos 15, 47 y 95, por tanto la diferencia del número mayor al medio será 48 y del intermedio al menor será 32, en este caso el cociente entre las diferencias no es un valor entero, pero en cambio las dos son múltiplos del 16, 8, 4, 2 y 1.

Para buscar la serie aritmética calcularemos 32/16 = 2 y 48/16=3, y 2 + 3 = 5 < 12.

También 32/8 = 4, 48/8 = 6 y 4 + 6 < 12.

Pero 32/4 = 8, 48/4 = 12 y 4 + 12 > 11como además 4+5 <12.

Por tanto podemos tomar coma razón de la serie aritmética puede ser el 8 ó el 16, escogeremos el 16, es así que tendremos los valores: 15, 31, 47, 63, 79, 95, seis elementos que contienen los requeridos, es decir se deberán añadir seis elementos mas, dando 7 posibles resultados, escogeremos aquella donde el 15 es el cuarto elemento, la serie es: (-33, -17, -1, 15, 31, 47, 63, 79, 95, 111, 127, 143).

La aplicación lineal seria: **16 n – 49.**

Escogemos los grupos de combinaciones que se observan en la Tabla XXXVI, que es igual al grupo de la Tabla VIII y que en función de la aplicación lineal planteada se genera la Tabla XXXVII y que posibilitan construir la estrella mágica que se presenta en la Fig. 37.

Tabla XXXVI. Combinaciones Tabla XVIII

1º	1	3	10	12
2º	1	5	9	11
3º	3	11	4	8
4º	2	6	8	10
5º	2	7	5	12
6º	6	7	4	9

Tabla XXXVII. Combinaciones Resultantes Ejemplo 7

1º	-33	-1	111	143
2º	-33	31	95	127
3º	-1	127	15	79
4º	-17	47	79	111
5º	-17	63	31	143
6º	47	63	15	95

Para concluir probaremos que todos los segmentos suman 220, donde están presentes los números 47, 15 y 95.

Para construir estrellas mágicas con cuatro ó más números dados, de la única opción es que estos formen parte de una serie aritmética, para ello se puede seguir el siguiente proceso:

- Ordenar los números de menor a mayor.
- Obtener las diferencias entre los números que se ubiquen uno a continuación de otro.

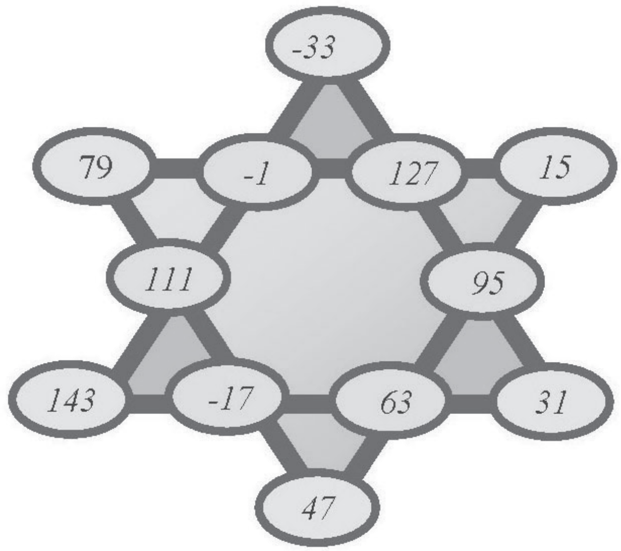

Fig. 36b. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 220.

- Ver si estas diferencias tienen submúltiplos comunes.
    - Si existen esos múltiplos, para cada submúltiplo, dividir todas las diferencia para ese submúltiplo y sumar los resultados (que son enteros), si esta sumatoria es menor a doce (once o menos), entonces es posible construir la serie aritmética y el submúltiplo es la razón de dicha serie.
    - Si esa suma es doce ó más o no es posible construir la serie, por tanto este método no es valido.

Una vez construida la serie se procede como los casos anteriores.

Ejemplo 8. Construir una estrella mágica que contenga los números 18, 4, 7, 13, 9.

Colocamos los números en orden: 7, 9, 13, 18.

Obteniendo las diferencias entre los elementos consecutivos, tendremos: 2, 4 y 5, el único entero submúltiplo existente es el 1, dividiendo las diferencias para 1 se tendrá: 2, 4 y 5 que sumados dan 11, eso indica que existe una serie que los contiene y no es sino la de números enteros positivos entre 7 y 18. Que como hemos visto existen varias estrellas mágicas de seis puntas que pueden construirse.

Ejemplo 9. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 138, 12, 48, 120.

Ordenando los números tenemos: 12, 48, 120 y 138.

Las diferencias serán: 36, 72 y 18, cuyos submúltiplos son 18, 9, 3 y 1.

Dividiendo las diferencias para 18, tenemos 2, 4 y 1 que suma 7, por tanto es posible construir una serie geométrica con razón 16.

Dividiendo las diferencias para 9, tendremos: 4, 8 y 2 que suman 14, mayor que 11, por tanto no es posible construir la serie aritmética, peor será con los demás submúltiplos.

Construiremos entonces la serie entre 12 y 138, esto es: 12, 30, 48, 66, 84, 102, 120, 138, que contiene ocho elementos, tendremos entonces cinco posibles series, escogeremos: (-24, -6, 12, 30, 48, 66, 84, 102, 120, 138, 156, 174).

La aplicación lineal es: **18 n – 42.**

De base tomamos el grupo de combinaciones que se plantea en la Tabla XXXVIII, que es igual a la de la Tabla IX. Aplicando la combinación lineal se genera la Tabla XXXIX, que brinda las combinaciones que permitan la construcción de la estrella mágica que se observa en la Fig. 37.

Tabla XXXVIII. Combinaciones Tabla IX

1º	1	3	10	12
2º	1	6	8	11
3º	3	11	5	7
4º	2	4	8	12
5º	2	9	5	10
6º	4	9	6	7

Tabla XXXIX. Combinaciones Resultantes Ejemplo 9

1º	-24	12	138	174
2º	-24	66	102	156
3º	12	156	48	84
4º	-6	30	102	174
5º	-6	120	48	138
6º	30	120	66	84

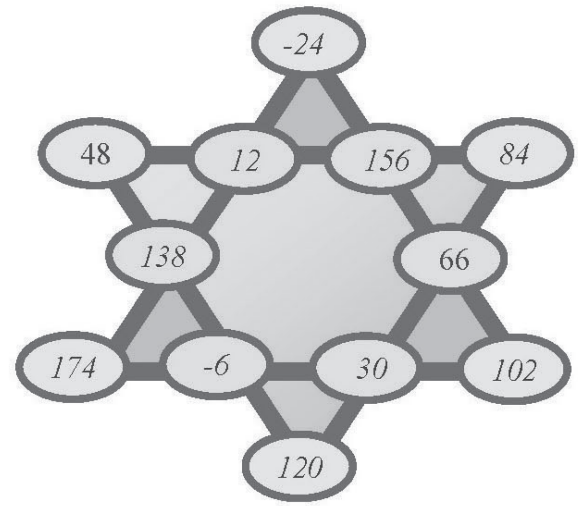

Fig. 37. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 300.

Se observa que la misma contiene los elementos planteados, y además en cada segmento los elementos suman 300.

Ejemplo 10. Construir una estrella mágica de seis vértices que contenga los números 5, 21, 165, 91, 53.

Ordenando los números tenemos: 5, 21, 53, 101, 165.

Las diferencias son: 16, 32, 48, 64, los submúltiplos de estas números son: 16, 8, 4, 2 y 1.

Dividiendo las diferencias para 16, tendremos: 1, 2, 3 y 4 que suman 10 que es menor a once, por tanto podemos construir la serie aritmética con razón 16, los otros submúltiplos dan razones que suman mas de 11, por tanto la única posible es la que tiene como razón el 16.

Interpolando entre 5 y 165 tendríamos: 5, 21, 37, 53, 69, 85, 101, 117, 133, 149, 165, que tiene once elementos, debemos anexar uno mas, tenemos dos posibilidades, escogeremos la serie aritmética: (5, 21, 37, 53, 69, 85, 101, 117, 133, 149, 165, 181).

La aplicación lineal asociada será: **16 n – 11.**

Tomamos el grupo de combinaciones que se aprecian en la Tabla XL, copia del grupo de la Tabla XXII. Aplicando la combinación lineal propuesta genera el grupo de combinaciones que se observa en la Tabla XLI, y que posibilita construir la estrella mágica que se tiene en la Fig. 38.

Tabla XL. Combinaciones Tabla XXII

1º	1	5	9	11
2º	1	7	8	10
3º	9	10	3	4
4º	2	6	7	11
5º	2	12	4	8
6º	6	12	3	5

Tabla XLI. Combinaciones Resultantes Ejemplo 10

1º	5	69	133	165
2º	5	101	117	149
3º	133	149	37	53
4º	21	85	101	165
5º	21	181	53	117
6º	85	181	37	69

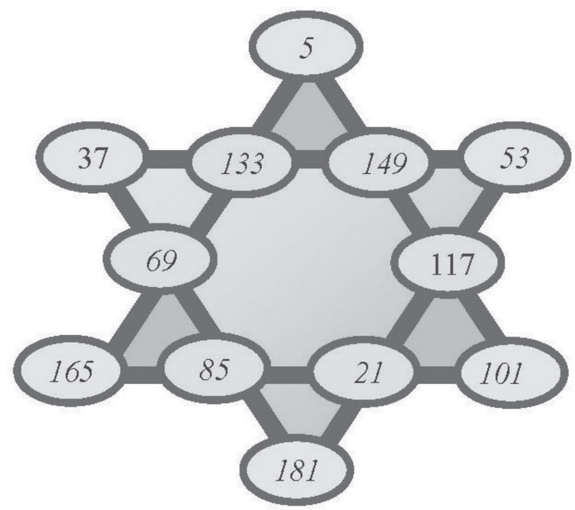

Fig. 38. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 372.

Se puede observar que la misma contiene lo elementos solicitados y además todos los segmentos contiene elementos que suman 372.

Con estos procedimientos podremos construir estrellas mágicas siempre que se pueda construir series aritméticas que contengan los números dados, es posible también tomar razones que no sean enteras.

Cabe anotar una consecuencia que se obtiene de las estrellas mágicas:

"En una estrella mágica la suma total de los elementos es igual a tres veces la suma de los elementos de cualquiera de sus segmentos".

VII. Demostración

En una estrella mágica los seis segmentos contienen elementos, cada uno de ellos contiene cuatro elementos que suman un mismo valor, supongamos que ese valor es.

Por tanto los totales de los 6 segmentos será (6S).

Llamaremos T, a la suma total de los elementos presentes en la estrella.

Como cada elemento esta presente en dos segmentos a la vez, entonces la suma total de segmentos será igual al doble de la suma total de elementos, entonces:

6S = 2T, por tanto T = 3S.

Es decir la suma de los elementos de un segmento será igual a la tercera parte del la suma total de los elementos de una estrella mágica. Con lo que la afirmación esta demostrado.

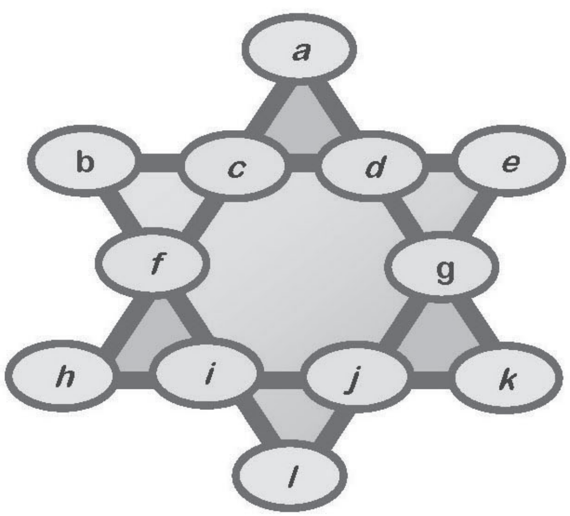

Fig. 39. Estrella Mágica de seis puntas

Como un corolario de esto se tendrá que, en una estrella mágica de seis puntas como la Fig. 39, teniendo en cuenta que los elementos de un segmento suman S, se tendrá que la suma de otros elementos que no forman parte del mismo segmento también es igual a S, así:

- a + f + g + l = S
- e + c + j + h = S
- b + d + i + k = S

VIII. Estrellas mágicas de seis puntas con numeros que no forman serie aritmética

Buscando generalizar los resultados, propondremos unos casos donde construimos estrellas mágicas de seis puntas con números que no forman ninguna progresión aritmética entre ellos.

Basándonos nuevamente en la Fig. 39, diremos: para que una estrella sea mágica, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} a+d+g+k=k+j+i+h \\ k+j+i+h=h+f+c+a \\ h+f+c+a=b+c+d+e \\ b+c+d+e=e+g+j+l \\ e+g+j+l=l+i+f+b \end{cases}$$

Que reduciendo genera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a+d+g=j+i+h \\ k+j+i=f+c+a \\ h+f+a=b+d+e \\ b+c+d=g+j+l \\ e+g+j=i+f+b \end{cases}$$

Tenemos por tanto un sistema de cinco ecuaciones con doce incógnitas, el sistema por tanto tiene infinitas soluciones, ó se puede dar valores arbitrariamente a siete variables, para tornar al sistema en uno consistente, cuya solución es única y cumple las condiciones de la estrella mágica de seis vértices.

Con la intención de posibilitar un proceso que cumpla con estructurar una estrella mágica de seis puntas supondremos que asignamos valores constantes, representándolas con letras mayúsculas, a las siete primeras variables y desarrollaremos el proceso para construir la estrella deseada, tendremos que:

a = A, b = B, c = C, d = D, e = E, f = F y g = G

Y el sistema sería el que se propone a continuación:

$$\boxed{\begin{cases} A+D+G=j+i+h \\ k+j+i=F+C+A \\ h+F+A=B+D+E \\ B+C+D=G+j+l \\ E+G+j=i+F+B \end{cases}}$$

Que es un sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, cuya solución es:

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{B} + \mathrm{D} + \mathrm{E} - \mathrm{A} - \mathrm{F}, \\ k &= \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{E} - \mathrm{A} - \mathrm{G}, \\ j &= \mathrm{A} - \mathrm{E} + \mathrm{F} \\ i &= \mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{G} \text{ y} \\ l &= -\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} + \mathrm{E} - \mathrm{F} - \mathrm{G}\,. \end{aligned}$$

Se debe anotar que la solución se facilita si ubicamos los elementos en la estrella mágica y en función de la igualdad de la suma de elementos por segmento se encuentra los elementos deseados.

Para comprobar y además como una forma de mostrar la efectividad del proceso, asignaremos los siguientes valores: A = 3, B = 5, C = -2, D = 0, E = -4, F = 6 y G = -3.

Aplicando las igualdades generadas en el sistema tendremos k= -1, h= -8, i= -5, j= 13 y l= -7, con estos valores construimos la estrella de la Fig. 40. Se debe anotar que entre las soluciones es posible que se repitan los valores arbitrariamente asignados, en ese caso deberá cambiar uno o varios de los valores asignados, hasta que las soluciones sean únicas, sin repetirse entre ellas ni repetir ninguno de los valores seleccionados.

Es visible que esta cumple los requisitos de una estrella mágica de seis puntas, donde la constante por segmento es de -1 y consecuentemente la suma total de los elementos será -3 y contiene los siete valores arbitrarios propuestos.

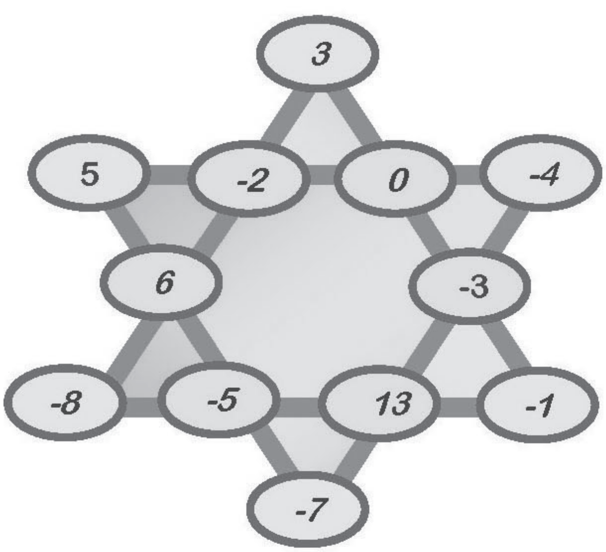

Fig. 40. Estrella Mágica constante por segment es -1

Entonces podremos afirmar que este proceso es valido y posibilita encontrar una estrella mágica de seis puntas colocando siete valores arbitrarios, que no forman serie aritmética alguna y en función de esta construir la estrella.

Sabemos que de esta solución se generan 48 estrellas mágicas, sin embargo si los valores asignados arbitrariamente deben ubicarse en forma distinta a las 48, será necesario replantear el sistema de ecuaciones y proceder con el proceso.

IX. Estrellas mágicas de seis puntas con números que no forman serie aritmética, fijando el valor de la suma constante de los segmentos

Para este caso, tendremos un sistema similar al anterior en el cual se deberá añadir una ecuación adicional en la cual se indique la característica de que los elementos por segmento sumen un valor constante N.

Tendremos entonces:

$$\boxed{\begin{cases} a + d + g = j + i + h \\ k + j + i = f + c + a \\ h + f + a = b + d + e \\ b + c + d = g + j + l \\ e + g + j = i + f + b \\ b + c + d + e = N \end{cases}}$$

Donde N es la resultante de sumar los elementos de un segmento.

En este caso tenemos un sistema de seis ecuaciones con doce variables (N es un valor asignado), por lo tanto libremente podremos asignar seis valores a variables libremente, además deberemos tener en cuenta que esos valores no deben contradecir el hecho de que los elementos de un segmento sumaran N, con lo que aseguraremos la consistencia del sistema, por lo que se tendrán dos posibilidades:

i. La una es que en los seis valores, podremos incluir cuatro de un mismo segmento, con lo cual su suma sería el valor de N, como el caso anterior y más bien podríamos ingresar libremente el valor de otra variable, como se ilustra en el ejemplo 11.

Ejemplo 11. Se desea construir una estrella mágica de seis puntas, según el esquema de la Fig. 39, que contenga los siguientes valores:

a = 1, g = -4, k = -10, d = 12, j = 5, b = 8 y N = -1.

Según el esquema planteado a, d, g y k forman un segmento y su suma efectivamente es -1, por lo que si es posible construir la estrella solicitada (si no coincidiría la suma, no sería posible construir la estrella deseada por cuanto dos ecuaciones serían contradictorias), y además una condición estaría demás y la descartaríamos, pudiendo asignar libremente un valor a otra variable, el sistema quedaría:

$$\begin{cases} a+d+g=j+i+h \\ k+j+i=f+c+a \\ h+f+a=b+d+e \\ b+c+d=g+j+l \\ e+g+j=i+f+b \end{cases}$$

A sabiendas de que la sumatoria constante por segmento es -1, conforme lo solicitado.

Asignaremos a la variable L el valor de 0.

Si colocamos letras mayúsculas para las variables incógnitas y minúsculas para las que hemos asignado valores, tendríamos el sistema:

$$\begin{cases} C+E=a+g+k-b \\ C=g+j-b-d+l \\ E-I-H=k-g-l \\ F+C-I=-a+k+j \\ I-H-C=a-b-l \end{cases}$$

Cuya solución es:

C = g + j – b – d + l,
E = a + k – j + d – l,
I = a – b + g.
H = b + d – j,
F = k + d – l.

Que en el caso del ejemplo tendríamos C= -19, E= -2, I= -11, H= 15 y F= 2.

La solución permite construir la estrella mágica de la Fig. 41, donde se observa que están presentes los elementos solicitados, los elementos de cada segmento suman -1, y todos los elementos suman -3.

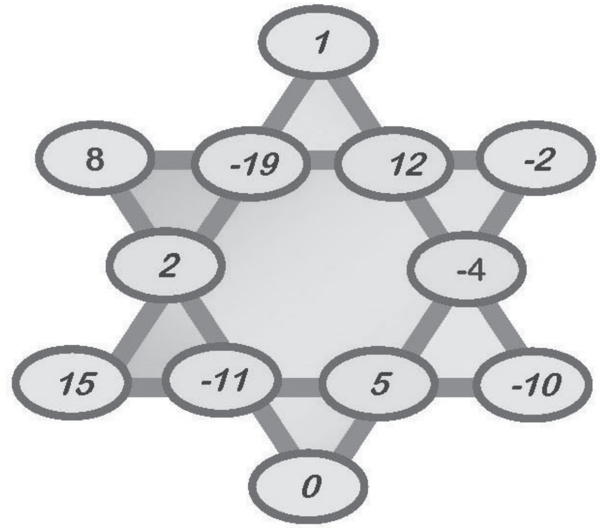

Fig. 41. Estrella Mágica resultante

ii. Cuando los elementos a los que se asignan valores no conforman un segmento completo y se indica el total de la suma por segmento, este caso es posible si por segmento, a lo máximo cuenta con dos valores asignados

$$\begin{cases} a+d+g+k=N \\ d+e+b+c=N \\ h+f+a+c=N \\ f+i+b+l=N \\ e+g+j+l=N \\ h+i+j+k=N \end{cases}$$

Este caso genera un sistema, que toma en cuenta la suma de los elementos por segmento como se observa a continuación:

Que constituye un sistema de 6 ecuaciones con 13 variables, donde podremos asignar arbitrariamente 7 valores, es decir el valor de N y seis mas, por lo expuesto en la nota, colocaremos de forma que máximo dos de ellos estén en un segmento, ello es posible si proponemos valores para esquinas opuestas: siguiendo el esquema de la Fig. 39 podríamos asignar valores a los elementos: a, b, i, l, j y h.

NOTA: si se asignan valores a tres elementos de un mismo segmento, como se ha fijado el total por segmento, el cuarto será fácilmente calculable y se tendrá un caso como el anterior.

Asignaremos mayúsculas a las variables incógnitas y minúsculas a las que asignamos valores, en consecuencia tendremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} D+G=n-k-a \\ D+E=n-b-c \\ F+H=n-c-a \\ F+I=n-b-l \\ E+G=n-l-j \\ H+I=n-j-k \end{cases}$$

Sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, cuya solución es:

$$G=\frac{n-a+b+c-l-j-k}{2}$$

$$E=\frac{n+a-b-c+k-j-l}{2}$$

$$D=\frac{n-a-b-c+l+j-k}{2}$$

$$H=\frac{n-a+b-c+l-j-k}{2}$$

$$I=\frac{n+a-b+c-l-j-k}{2}$$

$$F=\frac{n-a-b-c-l+j+k}{2}$$

Ejemplo 12. Construir una estrella mágica de seis puntas que manteniendo la estructura de la Fig. 39, que contenga los valores de:

b = -5, c = -10, a = 3, k = 7, j = -2, l = 6, y que además los elementos de cada segmento sea 10.

Como en cada segmento únicamente existe dos valores asignados y conocemos la suma por segmento, aplicamos las formulas expuestas anteriormente y tendríamos como resultados:

G = -19/2, E = 31/2, D = 19/2, H = 13/2, I = -3/2 y F = 21/2.

Solución que permite construir la estrella mágica de seis puntas que se observa en la figura 68. Se observa que en todos los segmentos los elementos suman 10, consecuentemente la suma total de los elementos presentes es 30 y, conforme lo solicitado los valores planteados están en los lugares invocados según el esquema.

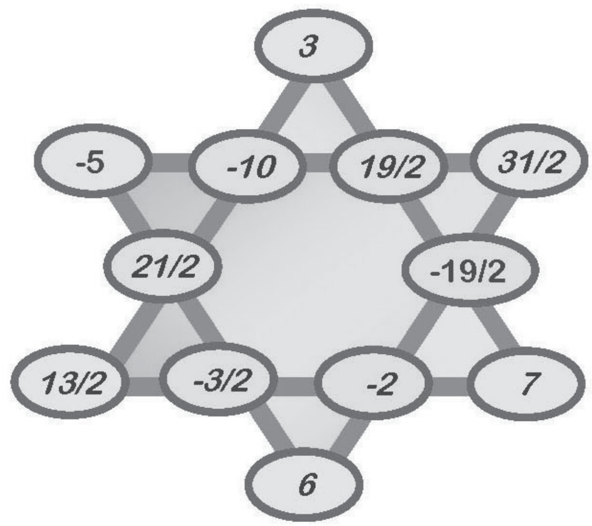

Fig. 42. Estrella Mágica resultante Ejemplo 12

X. Estrellas mágicas de seis puntas con números que no forman serie aritmética, y que la suma de sus vertices sea igual a la suma de los cortes

En el contexto en el que nos desarrollamos es posible proponer una condición adicional a la estrella mágica, que obviamente la hace mas interesante, esto es que los elementos de de los vértices y sumados den el mismo resultado que se obtiene al sumar los valores de los elementos ubicados en los cortes.

Siempre en función del esquema de la Fig. 39, plantearíamos el siguiente sistema:

Donde la ultima ecuación especifica la condición planteada.

$$\begin{cases} a+d+g+k=k+j+i+h \\ k+j+i+h=h+f+c+a \\ h+f+c+a=l+j+g+e \\ l+j+g+e=e+d+c+b \\ e+d+c+b=b+f+i+l \\ a+b+h+l+k+e=c+d+g+j+i+g \end{cases}$$

Obviamente que se puede resumir este sistema, ya que encada ecuación en ambos miembros está un mismo elemento, pero igual se tendrá un sistema de seis ecuaciones con doce incógnitas, posibilitando la libertad de asignar valores a seis elementos cualesquiera y resolver el sistema, que en ese caso se torna de solución única.

Para mostrar supondremos que asignamos valores (mayúsculas) a los elementos: a = A, b = B, c = C, d = D, e = E y f = F. lo que posibilitará el siguiente sistema:

$$\begin{cases} j+i+h-g=A+D \\ k+j+i=F+C+A \\ l+j+g-h=A+C+F-E \\ l+j+g=D+C+B \\ i+l=E+D+C-F \\ g-h+i+j-k-l=A+B-C-D+E-F \end{cases}$$

Procediendo a la resolución del sistema se tendrá la siguiente solución:

$$\boxed{G=\frac{-4a+5b+c+d+5e-4f}{4}}$$

$$\boxed{H=-a+b+d-f+e}$$

$$\boxed{I=\frac{b+c+d+5e-4f}{4}}$$

$$\boxed{J=a+f-e}$$

$$\boxed{K=\frac{-b+3c-d-e+4f}{4}}$$

$$\boxed{L=\frac{3d-b+3c-e}{2}}$$

Ejemplo 13. Construir una estrella mágica de seis puntas, que, sujetándose al esquema de la figura 8, contenga los valores A = 5, B = -2, C = 3, D = 7, E = -1 y F = 4, a la vez que la suma de los elementos de los vértices coincida con la suma de sus cortes:

Aplicando las formulas obtenidas, se obtendrán los resultados:

G = -41/4, H =-5, I = -13/4, J = 10, K = 21/4 y L = 33/4.

Valores que permiten construir la estrella mágica de la Fig. 43.

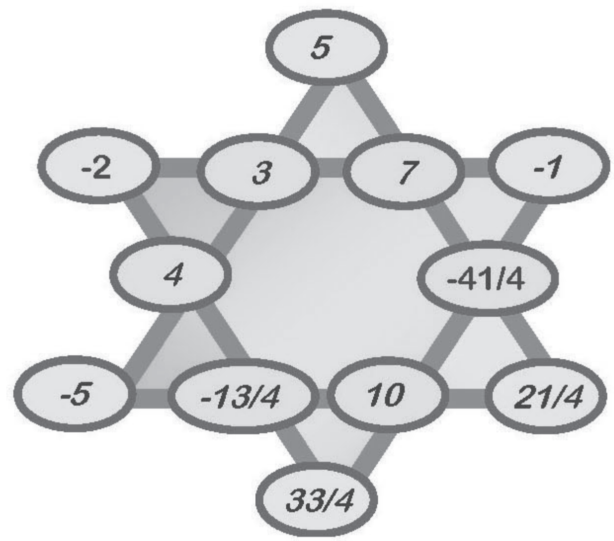

Fig. 43. Estrella Mágica resultante Ejemplo 13

Se observa que todos los valores propuestos están ubicados según el esquema propuesto, por segmento los elementos suman 7, por tanto en total sumaran 21, entonces si los elementos de los vértices suman igual que los elementos de los cortes, cada uno de esas sumas debería ser la mitad del total, en este caso esa adición será 21/2, lo que es cumple como se puede observar.

XI. Estrellas mágicas de seis puntas con números que no forman serie aritmética, que la suma de sus vértices sea igual a la suma de los cortes y que la suma de los elementos por segmento sea un valor dado

Hemos visto ya que en una estrella mágica de seis puntas el valor de la suma total de elementos es tres veces el valor de la suma de los elementos en cada segmento y además, si la suma de las puntas es igual a la suma de los elementos de los cortes, estos deberán sumar la mitad del total, o una vez y media el valor de la suma por segmento. Con lo que podremos afirmar que al fijar un valor para el total del segmento, estamos fijando el valor de la suma total de los elementos y la suma de puntas y cortes cuando estos coinciden.

$$\begin{cases} a+d+g+k=k+j+i+h \\ k+j+i+h=h+f+c+a \\ h+f+c+a=l+j+g+e \\ l+j+g+e=e+d+c+b \\ e+d+c+b=b+f+i+l \\ b+c+d+e=N \\ a+b+h+l+k+e=c+d+g+j+i+g \end{cases}$$

Con lo anotado, para este caso tenemos el siguiente sistema (siempre basándonos en el esquema de la figura 39.

Donde se observa que el sistema generado es de 7 ecuaciones con 13 variables, lo que posibilita que podamos arbitrariamente asignar valores a seis variables, debiendo recordar que los elementos de cada segmento no deben contradecir la condición de que los elementos de cada segmento deben sumar N.

Buscando la solución más general, asignaremos valores a las siguientes variables:

N = 10, c = C, j = J, b = B, k = K y l = L.

Generando el siguiente sistema a resolver (las minúsculas son incógnitas y las mayúsculas datos).

$$\begin{cases} D+G+A=n-k \\ D+E=n-b-c \\ F+H=n-c-a \\ F+I=n-b-l \\ E+G=n-l-j \\ H+I=n-j-k \\ A-D+E-F-G-I+H=c+j-b-k-l \end{cases}$$

Sistema consistente cuya solución es la siguiente:

$$\boxed{G=\frac{N}{4}-J+B} \quad \boxed{I=\frac{3N}{4}-B-K-L+C}$$

$$\boxed{E=\frac{3N}{4}-L-B} \quad \boxed{A=\frac{N}{2}+J-K-B-L+C}$$

$$\boxed{F=\frac{N}{4}+K-C} \quad \boxed{H=\frac{N}{4}-J+B+L-C}$$

$$\boxed{D=\frac{N}{4}-C+L}$$

Se observa que si N es un número múltiplo de 4, todos los resultados serán enteros.

Ejemplo 14. Construir una estrella mágica que contenga en sus elementos los números -3, 5, -10, 8, -7, los elementos de cada segmento sumen 12 y sus vértices sumen igual cantidad que sus cortes.

De antemano podemos afirmar que el total de elementos será 36, los vértices así como los cortes sumaran 18.

Este ejemplo cumple con las condiciones de lo explicado anteriormente, sujetándonos siempre al esquema de la Fig. 39, asignaremos por tanto los valores a las variables de la siguiente forma:

N = 12, C = -3, J = 5, B = -10, K = 8 y L = -7.

Aplicando las formulas indicadas se tendrá como resultado:

G = -12, I = 15, E = 26, A = 17, F = 14, H = -16 y D = -1, valores con los cuales se construye la estrella mágica de la Fig. 44, que cumple con todo lo solicitado.

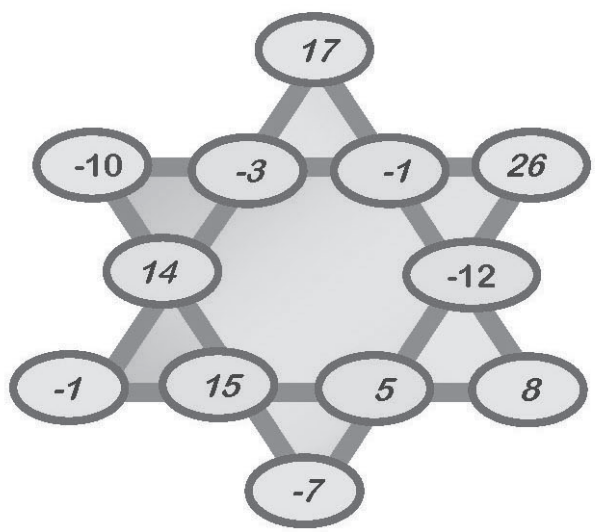

Fig. 44. Estrella Mágica resultante Ejemplo 14

XII. Estrellas mágicas de seis puntas con números que no forman serie aritmética, que la suma de sus vertices sea igual a la suma de los cortes y a la suma de los elementos por segmento

En este caso deberemos recordar que anteriormente se indico que si la suma de los elementos los vértices de una estrella de seis puntas es igual a la suma de los elementos del corte, esta suma será una vez y media el valor de la suma de los elementos de cada segmento, en consecuencia, para que esta igualdad se de será suficiente y necesario que los elementos sumen 0, y esto lo podemos lograr planteando un ejercicio como el anterior donde N = 0.

Ejemplo 15. Construir una estrella mágica que contenga en sus elementos los números -3, 5, -10, 8, -7, sus vértices sumen igual cantidad que sus cortes y este valor sea igual a la suma de los elementos del segmento.

Por tanto asignaremos los siguientes valores a las variables:

N = 0, C = -3, J = 5, B = -10, K = 8 y L = 6.

Aplicando las formulas indicadas se tendrá como resultado:

G = -15, I = -7, E = 4, A = -2, F = 11, H = -6 y D = 9.

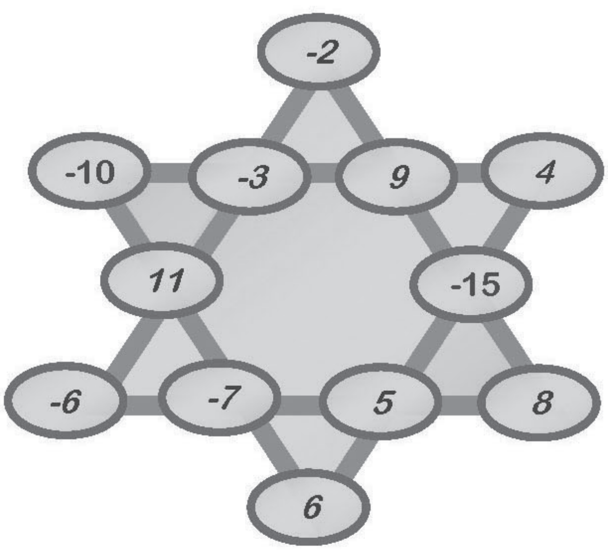

Fig. 45. Estrella Mágica resultante Ejemplo 15

En la Fig. 45 se observa que se han cumplido todas las condiciones requeridas, la suma de cada segmento es 0, consecuentemente la suma total también es cero, al igual que la suma de los elementos de los vértices y los elementos de los cortes.

NOTA: Esta claro que por cada solución presentada, como toda estrella mágica de seis puntas, existen 47 derivadas.

En consecuencia se puede anotar que es posible imponer algunas condiciones más, de forma que sean integradas al sistema de ecuaciones, si este es consistente, podremos encontrar soluciones, que cumplan lo requerido.

XIII. Estrella mágica de seis puntas, indicando el total por segmento; que coincidan la suma de sus vertices y la suma de sus cortes y que ademas coincidan la suma de los vertices de los dos triangulos grandes que forman la estrella

Este es un caso derivado, teniendo en cuenta que al fijar el total por segmento, fijamos también el total de los elementos (triple) y las suma de vértices (una vez y media), y teniendo como referente el esquema de la Fig. 39, planteamos el sistema:

$$\begin{cases} D+G+A+K=N \\ D+E+B+C=N \\ F+H+C+A=N \\ F+I+B+L=N \\ E+G+L+J=N \\ H+I+J+K=N \\ A+E+B+K+L+H=D+F+G+I+C+J \\ A+H+K=E+B+L \end{cases}$$

Sistema de ocho ecuaciones con trece incógnitas, por lo que hay libertad de asignar valores a cinco variables, por condición de ejercicio fijaremos N = n, además cuidando que no se presente contradicción alguna fijaremos valores para:

i = I, j = J, c = C y d= D.

La última ecuación es la que indica que los vértices de los triángulos que forma la estrella coinciden.

Con lo que se tendrá el siguiente sistema, las mayúsculas son incógnitas, las letras minúsculas son datos:

$$\begin{cases} n-d=G+A+K \\ n-d+c=E+B \\ n-c=F+H+A \\ n-i=F+B+L \\ n-j=E+G+L \\ n-i-j=H+K \\ A+E+B+K+L+H-F-G=d+i+c+j \\ A+H+K=E+B+L \end{cases}$$

Sistema que brinda la solución:

$$A = i + j - \frac{n}{4} \qquad G = \frac{n}{2} - d - c$$

$$E = \frac{3n}{4} - j \qquad K = \frac{3n}{4} - j + c - i$$

$$F = n - i - j \qquad L = c + d - \frac{n}{4}$$

$$H = \frac{n}{4} - c \qquad B = \frac{n}{4} - c - d + j$$

Resultado que puede ser aplicado.

Ejemplo 16. Construir una estrella mágica, donde la suma por segmento sea 44, contenga los elementos c= 20, d= -12, i= 12 y j= -8, coincidan la suma de vértices con la suma de cortes y además los vértices de los triángulos grandes suman igual valor.

Aplicando las formulas obtenidas se tiene como resultado: A=-7, G = 14, E=41, K=49, F=40, L=-3, H=-9 y B=-5, que, conforme se observa en la Fig. 46, constituye una estrella mágica de seis puntas que contiene los elementos solicitados, todos sus segmentos contienen elementos que suman 44, además los vértices de los dos triángulos grandes suman 33. En consecuencia la suma total de elementos es 132 (3x44=132), y los vértices y cortes suman un valor igual 66 (44x1.5=66).

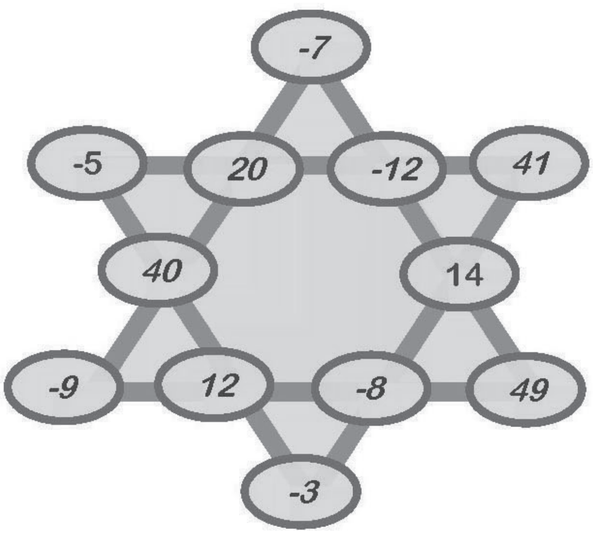

Fig. 46. Estrella Mágica resultante Ejemplo 16

Nota, si además deseamos que coincidan la suma por segmento, la suma de vértices, la suma de cortes y la suma de vértices de los triángulos grandes, deberemos únicamente asignar a N el valor de cero, y obtener nuevamente resultados, ó simplemente disminuiremos 11, ya que este es la cuarta parte de 44, si a cada uno de los cuatro elementos disminuimos 11 en total al segmento se disminuye 44 y se tiene que la suma es cero, que es la condición planteada, con ella generamos los elementos de la Fig. 47.

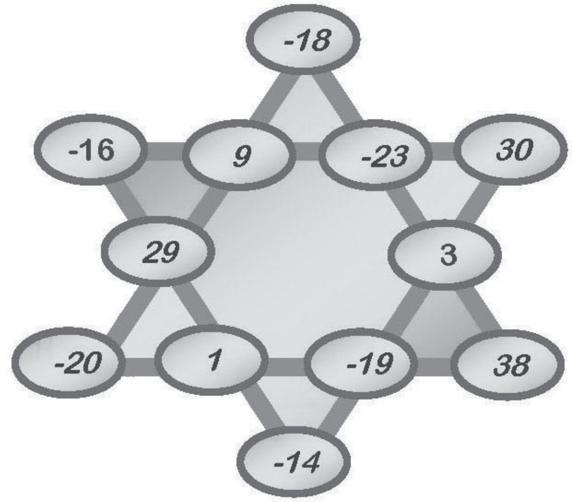

Fig. 47. Estrella Mágica resultante Ejemplo 16 - suma cero

Se observa que tanto los elementos de un segmento, la totalidad de los elementos, todos los vértices, todos los cortes y los vértices de los triángulos grandes suman cero.

Se pueden plantear otras condiciones, mismas que deben traducirse en ecuaciones del sistema, si se logra un sistema consistente, podremos hallar soluciones y en base de estas construir las estrellas mágicas que cumplan con lo requerimientos.

Referencias

[1] M. V. Vásquez, Estrellas mágicas y ecuaciones lineales, Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información, V3 N5, Corporación Universitaria Republicana. 2016

[2] J. L. Adams, Guía y juegos para superar bloqueos mentales, Gredisa, Barcelona. 1999.

[3] M. De Alonso, Los juegos en el aula, Servicio de Publicaciones de CSI-CSIF. 2012.

[4] M. Gardner, Matemática para divertirse, Granica, Barcelona. 1988.

[5] R. Ramírez, «El ingenio no tiene edad», Encuentro de profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria, Castellón 2003.

[6] R. Ramírez y S. Morales, «¿Cuánto de ingenio hay en un problema de ingenio?», Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas, Cardeñoso, J.M. y otros (Eds.), departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES, Granada, pp. 223-228. 2002.

[7] Revista Quo, n.º 95, Agosto 2003, pp.110-111.

[8] I. Stewart, Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática, Gredisa, Barcelona. 2000.

[9] S. Calvo-Fernández, «Estrella mágica de cinco puntas». Ministerio de Educación y Ciencia (España). 2001.