LA ESPECIFICACION FUNCIONAL DE UNA TECNOLOGIA HOMOTETICA MULTIPRODUCTO

Elena Escudero

ABSTRACT.—The note proposes a functional form for the homothetic multiproduct technology which generalizes the well known monoproduct case and shows the equivalence between this functional specification and the Hanoch's (1970) and Färe and Shephard's (1977) definitions of the homothetic multiproduct technology. Its cost and distance functions are derived straightforwardly and display the same separability property as in the monoproduct case.

RESUMEN.—El artículo propone una forma funcional para describir una tecnología multiproducto homotética en inputs, que generalice el caso bien conocido de una tecnología monoproducto. Además, se demuestra la equivalencia entre esta especificación funcional y la definición de Hanoch (1970) y Färe y Shephard (1977) de una tecnología homotética multiproducto. Las funciones de coste y distancia asociadas a esa tecnología específica se obtienen directamente y presentan la misma propiedad de separabilidad que en el caso de tecnología monoproducto homotética.

1. INTRODUCCION

Una serie de definiciones de tecnología homotética en el contexto de la producción conjunta han sido propuestas por Hanoch (1970), Färe y Shephard (1977), y Lau (1978) (la última analiza únicamente el caso homogéneo). A diferencia del caso de tecnología monoproducto que tiene una forma funcional clara y fácil de desarrollar, esta cómoda especificación no es disponible para el caso de tecnología multiproducto. Esta falta de especificación funcional no nos ha ayudado a aprender acerca de la naturaleza de la función de costes de una tecnología homotética multiproducto. Este artículo propone una forma funcional para la función de transformación de una tecnología homotética multiproducto equivalente a la definición de Färe y Shephard y a una versión más débil de la definición de Hanoch, y en él se muestra que la función de costes correspondiente es separable de la misma manera que en el caso de tecnología monoproducto.

El concepto de homoteticidad que analizamos se corresponde con el de homoteticidad en 'inputs' de Hanoch y Färe y Shephard. La mayoría de los resultados pasan por encima ajustes menores que tienen que ver con el caso de homoteticidad en 'output'. El interés por la obtención de una forma funcional es muy fructífero, puesto que la obtención de esta forma funcional nos permite derivar de una forma clara tanto la función de costes como la función de distancia asociada a una tecnología homotética multiproducto y hace fácil construir una función de transformación homotética.

2. LA FUNCION DE TRANSFORMACION HOMOTETICA

Sea T un conjunto de producción con una función de transformación bien definida $T(y, x)$, $T: R^n \times R^m -> R$, m y n son números mayores o iguales a uno. En lo que sigue $y \in R^n_+$, y y $x \in R^m_+$, 'y' representa a la producción y 'x' el conjunto de factores productivos. $T = \{(y, x) / T(y,x) > 0\}$. Supongamos lo siguiente:

A.1. $T(y, x)$ es continua en x e y, no decreciente en x, y no creciente en y, y $T(y, x)$ es finito para todo (y, x).
A.2. $T(y, 0) \leq 0$ $\forall y \geq 0$, con estricta desigualdad si $y = 0$.
A.3. $\forall y \geq 0$ $\exists x \geq 0 / T(y, x) \geq 0$.
A.4. $T(\tau y, \lambda x)$ (a) es decreciente en $\tau \geq 0$ *for* $y \neq 0$, y
(b) es creciente en $\lambda \geq 0$ *for* $x \neq 0$.
A.5. $T(y, x)$ es cuasicóncava en x dado y.

Los supuestos A.1 to A.3 determinan que el conjunto de factores utilizados en el proceso productivo es regular, es decir no vacío y cerrado. A.1 implica también libre disposición. A.2 rechaza los bienes 'gratuitos'. A.3 señala que cualquier 'y' puede ser producido. A.4 hace a la función de transformación estrictamente monótona son isocuantas gruesas (A.4.b.),y fronteras de posibilidades de producción gruesas (A.4.a). A.5 hace que el conjunto de 'input' para la obtención de cada 'output' sea un conjunto convexo.

Definición D1: Una tecnología multiproducto con una función de transformación $T(y, x)$ que satisfaga al menos A.1 hasta A.3 es homotética (en 'inputs') si para $t \geq 0$, $y \neq 0$ y $T(y, x) = 0$, existe $\delta(t, y) / T(ty, \delta(t, y) \cdot x) = 0$. $\delta(t, y)$ es una función escalar positiva continua y creciente en t, y $\delta(1, y) = 1 \cdot \delta(t, y)$ es denominada la función 'escalar'. Una versión más extendida y flexible de D1 es:

Definición D2: Bajo las condiciones A.1 hasta A.3 una tecnología multiproducto es homotética si para $t \geq 0$, $y \neq 0$ y $T(y, x) > 0$, existe

$\delta(t, y) \,/\, T(ty, \delta(t, y) \cdot x) \geq 0$, $\delta(t, y)$ definido como anteriormente. Un caso específico de definición D2 aparece si se adopta el supuesto de separabilidad escalar. La separabilidad escalar se mantiene si la función 'escalar' muestra la siguiente propiedad: $\delta(\tau t, y) = \delta(\tau, ty) \cdot \delta(t, y)$ for all $\tau, t \geq 0$

Un $\delta(t, y)$ que satisface la propiedad de separabilidad escalar se dice que es escala-separable.

Lema 1. Bajo las condiciones A.1, A.2 y A.4b, D1 implica separabilidad escalar puesto que $T(y, x) = 0$ implica $T(\tau ty, \delta(\tau t, y)x) = 0 = T(\tau ty, \delta(\tau, ty) \cdot \delta(t, y)x)$, lo cual bajo la condición A.4.b debe ser equivalente a $\delta(\tau t, y) = \delta(\tau, ty) \cdot \delta(t, y)$, $\tau, t \geq 0$.

Obsérvese que la separabilidad escalar de $\delta(t, y)$ es equivalente a escribir $\delta(t, y) = S(ty)/S(y)$, donde $S(ty)$ es típicamente no decreciente en y and creciente en t bajo el tipo de supuestos adoptados en este artículo.

Lema 2. Con las condiciones A.1 y A.2 D1 implica D2. *Prueba: si* $T(y, x) \geq 0 \Rightarrow \exists\, \theta \in [0, 1] / T(y, \theta x) = 0 \Rightarrow T(ty, \theta\delta(t, y)x) = 0 \Rightarrow T(ty, \delta(t, y)x) \geq 0$ (el valor θ existe por el teorema del valor intermedio). QED.

Lema 3. Bajo A.1, A.2, A.4.a (o A.4.b), y separabilidad escalar D2 implica D1. *Prueba:* Supongamos que no sea así, es decir, $\exists(y, x) \,/\, \mathit{for}\ t > 0\ T(y, x) = 0 \Rightarrow T(ty, \delta(t, y)) > 0$. Ello implica que $\exists\, \theta \in (0, \delta(t, y)) \,/\, T(ty, \theta \cdot x) = 0$. Tomemos un τ tal que $\delta(\tau, ty) = 1/\theta$. De ello se sigue que $\delta(\tau, t_y) > 1/\delta(t, y) = \delta(1/t, t_y)$, de aquí $\tau > 1/t$. Puesto que $T(ty, \theta x) = 0$, ello implica que $T(\tau ty, x) \geq 0$. Pero por A.4.a $T(\tau ty, x) < T(y, x) = 0$. Contradicción. QED.

D1 es esencialmente la definición de Hanoch (1970) bajo condiciones más débiles puesto que $T(y, x)$ y $\delta(t, y)$ no se requiere que sean diferenciables. Sea $T[y] \equiv [x/t(y, x) \geq 0]$ el conjunto de 'inputs' de 'y'. Färe y Shephard (1977) consideran una tecnología multiproducto 'T' homotética si existe $\delta(t, y)$ escala-separable y no decreciente en t tal que $T[ty] = \delta(t, y) \cdot T[y]$. En la definición de Färe y Shephard (1977) una tecnología homotética es tal que sólo el conjunto de 'output' localizado en un único círculo , sea por ejemplo el círculo unitario (es decir el conjunto 'y' tal que $/y/ = 1$), tiene conjuntos de 'inputs'independientes.El conjunto de 'inputs'de cualquier otro conjunto de 'output' 'y' es igual a los conjuntos de 'input' de $'y'/|y|$, $|y|>0$, escalados por un factor que depende sólo de 'y', es decir $T[y] = \delta(|y|, y/|y|) \cdot T[y] \,/\, |y|]$, donde $\delta(|y|, y \,/\, |y|) = S(y)/S(y \,/\, |y|)$. Está claro que bajo las condiciones A.1 hasta A.3 y A.4.a (o A.4.b.) y la separabilidad-escalar y suponiendo que $\delta(t, y)$ es creciente en t, *La definición de Färe y Shephard es equivalente a D2 y por tanto a D1 (y a la definición de Hanoch).*

Definiendo una función de transformación multiproducto en la forma $T(y, x) = x_m - F(y, x_{-m})$, donde $F: R^{n+m-1} = >R$ que satisface los supuestos estándar similares a A.1 hasta A.4 excepto que $F(y, x_{-m})$ es no decreciente en 'y' y no creciente en x_{-m}, y x_{-m} es el conjunto 'input' sin el último (m^{th})

'input', Lau (1978) ha usado la siguiente definición para una tecnología multiproducto homogénea: $T(y, x) = 0 \Rightarrow \forall t > 0, \exists k > 0 \mid T(t^k y, tx) = 0$. Es claro que la definición de Lau implica que el caso particular de D1 donde $\delta(\tau, y) = \tau^{1/k}$ se satisface. Por otro lado, considerar cualquier función de transformación que satisface D1 y con $\delta(\tau, y) = \tau^{1/k}$ es decir $T(y, x) = 0$ y $\lambda > 0$ implica $T(\lambda y, \lambda^{1/k}x) = 0$. Resolviendo las ecuaciones $T(y, x) = 0$ para $\boldsymbol{x}_m$ y $T(\lambda y, \lambda^{1/k}x) = 0$ para $\lambda^{1/k}\boldsymbol{x}_m$ respectivamente se obtiene que $\boldsymbol{x}_m = F(y, x_{-m})$ lo que implica $\lambda^{1/k}\boldsymbol{x}_m = F(\lambda y, \lambda^{1/k}x_{-m})$, y definiendo $\lambda = t^k$ se obtiene $t\boldsymbol{x}_m = F(t^k y, tx_{-m})$ que es la formulación de Lau. Esta requiere, sin embargo, que estas existan y sean únicas.

Sea $D(y, x) = Max\ \lambda\ s.t.\ \lambda \in [\lambda > 0 \mid T(y, x / \lambda) \geq 0]$ la función-distancia. Puesto que la ecuación $D(y, x) = 1$ es equivalente a $T(y, x) = 0$ y la dunción distancia es linearmente homogénea en x, ello implica que $\boldsymbol{x}_m = g(\boldsymbol{x}_m)$, donde $g(\boldsymbol{x}_m) = [D(y, x_{-m}/\boldsymbol{x}_m, 1)]^{-1}$. Para $\boldsymbol{x}_m \in [0, \infty)$ $g(\boldsymbol{x}_m)$ es no decreciente en $\boldsymbol{x}_m$ y para $\lambda > 1$, $g(\lambda \mathbf{x}_m) \leq \lambda g(\mathbf{x}_m)$. Una condición suficiente para que $g(\boldsymbol{x}_m)$ tenga un punto fijo es que exista un $\boldsymbol{x}^*_m$ tal que $g(\boldsymbol{x}^*_m) < \boldsymbol{x}^*_m$; pero no hay garantía de que dicha solución sea única.

Un caso especial de la condición suficiente anterior es cuando g(.) es diferenciable y g'(.) es continua y decreciente y converge a un escalar k, $0 < k < 1$ cuando $\boldsymbol{x}_m$ tiende a^∞. En este caso el punto fijo no trivial es único. *D1 parece por tanto, más amplia y más concisa que la definición de Lau (1978), debido a las limitaciones técnicas que están asociadas a la forma en que Lau formula la función de transformación* .

El rasgo crítico de D1 y D2 es que si el vector de producción es aumentado o disminuido por un multiplicador t, existe un multiplicador proporcional $\delta(t, y)$ del vector de 'inputs' que no depende de 'x' en sí mismo. Aunque ello singulariza una importante propiedad de una función de transformación multiproducto, desde el punto de vista de la tratabilidad sin embargo no proporciona la más ligera pista para la especificación de una forma funcional de una tecnología multiproducto que cumpla la propiedad anterior y que permita su utilización en aplicaciones empíricas.

3. FORMA FUNCIONAL DE UNA TECNOLOGIA MULTIPRODUCTO HOMOTETICA

Consideremos la siguiente especificación canónica de la forma funcional de una función de transformación:

$$T(y, x) = L(y, H(x)) \qquad [1]$$

donde $L: R^{n+1} \rightarrow R$, $H: R^m \rightarrow R$ y los supuestos A.1 hasta A.4 son aplicables a L(.,.) con los supuestos relativos al vector x en A.1 hasta A.3 y λ en A.4 aplicables esta vez al escalar H. Añadimos los siguientes supuestos:

A.5. $H(x)$ es cuasicóncava en x.
A.6. $\forall y \geq 0, L(y, H) = 0$ tiene una única solución en H dado y
A.7. $H(x)$ es linealmente positiva, homogénea y no decreciente en x y $H(x) > 0$.

$H(x)$ desempeña el papel de input compuesto. $L(y, H)$ no tiene necesariamente que ser separable en 'y' y H. Un importante rasgo de la especificación [1] es que convierte el diseño de la forma funcional específica para las funciones de transformación en una tarea fácil por cuanto el ejercicio se descompone en dos intervalos: el primero es la especificación de $L(.,.)$ en donde hay que tener cuidado únicamente acerca de la forma de los rendimientos a escala, la determinabilidad de una solución para H, el cumplimiento de A.1 hasta A.4.a y la configuración de la frontera de posibilidades de producción entre 'outputs'; el segundo paso es la especificación de $H(x)$ y tiene que ver con la naturaleza de la relación entre 'inputs' (sustitutivos, complementarios, etc.), el modelo de elasticidades de sustitución y el cumplimiento de A.7 y si se desea A.5'. La forma canónica tiene el monoproducto como un caso particular donde $L(y, H(x)) = F(H(x) - y$, $F(.)$ es una función creciente y continua y $H(x)$ satisface A.5' y A.7.

Consideremos la siguiente ecuación con y=0 y H desconocida

$$L(y, H) = 0 \qquad [2]$$

La solución H^* a la ecuación [2] garantizada por A.6 depende obviamente de 'y' y puede escribirse

$$\Gamma(y) \equiv H^* \text{ for } H^* \text{ such that } L(y, H^*) = 0 \qquad [3]$$

$H(x) - \Gamma(y)$ es la forma reducida de la función de transformación canónica [1]. Obsérvese esto en el caso de tecnología monoproducto donde $L(y, H(x)) = F(H(x) - y$, $\Gamma(y) = F^{-1}(y)$, $F^{-1}(.)$ es la inversa de $F(.)$.

Lema 4: Bajo las condiciones A.1, A.4.b y A.6, $\Gamma(y)$ tal y como está definida en [3] es no decreciente en 'y'.

Prueba: Supongamos que no sea así. Sea $y' \geq y, \Gamma(y') < \Gamma(y); 0 = L(y', \Gamma(y')) < L(y', \Gamma(y)) \leq L(y, \Gamma(y)) = 0 \rightarrow$ contradicción $\Rightarrow \Gamma(y') \geq \Gamma(y)$. QED

Lema 5: Bajo las condiciones A.1 y A.6 tal y como está definida en [3] es continua en 'y'.

Prueba: Consideremos la secuencia $\{y^{(n)}\}$ tal que $lim_{n\to\infty} y^{(n)} = y$ y H^* tal que $L(y, H^*) = 0$. Definamos $\bar{H} = lim_{n\to\infty}\Gamma(y^{(n)})$. Supongamos que $\Gamma(y)$no es continua $\bar{H} \neq H^* \Rightarrow \bar{H} \neq \Gamma(y) \Rightarrow L(y, \bar{H}) \neq 0$. Pero $lim_{n\to\infty}L(y^{(n)}, \bar{H}) = L(y, \bar{H}) = 0$ por la continuidad de L, esto implica una contradicción. Por tanto, $\Gamma(y)$ es continua. QED.

Lema 6: Bajo A.1, A.2 y A.6, $\Gamma(y)$ es positiva para $y = 0$.

Prueba: Supongamos que no sea así y sea $y \neq 0$; $\Gamma(y) \leq 0 \cdot 0 = L(y, \Gamma(y)) \leq L(y, 0) < 0$. Contradicción (la desigualdad estricta se sigue de A.2). QED.

Lema 7: Bajo A.1, A.4.a y A.6, $\Gamma(ty)$ es creciente en t.

Prueba: Supongamos que no sea así, es decir para $t > t > 0, \Gamma(\tau y) \leq \Gamma(ty)$. $0 = L(\tau y, \Gamma(\tau y)) < L(ty, \Gamma(\tau y)) \leq L(ty, \Gamma(ty)) = 0$. Contradicción. QED.

Teorema 1: Bajo A.1 hasta A.4, A.6 y A.7 y para $Y = 0$, $T(y,x)$ satisfaciendo D1 puede ser escrita de forma equivalente en la forma $L(y, H(x))$.

Prueba:

1. *Bajo A.1 hasta A.4 D1 implica la especificación canónica [1]:*
(prueba heurística) D1 comprende dos ecuaciones:

$$T(y, x) = 0 \qquad [4]$$

$$T(ty, \delta \cdot x) = 0 \qquad [5]$$

Por D1 existe $\delta > 0$ que satisface [5] la cual es única puesto que por definición $\delta(t, y)$ es una función. Tiene que ser posible recuperar tal δ resolviendo la ecuación [5] para unos valores de *'y'* y *'x'* dados. Escribimos esta solución como $\delta \equiv M(t, y, x)$, $M(.,.,.)$ una función. Puesto que por D1 delta no debería depender de *'x'*, tiene que ser posible sustituir *'x'* en $M(t, y, x)$ por sus valores obtenidos a partir de [4]. Para un no escalar *'x'*, puesto que hay sólo una ecuación [4] tiene que ocurrir que tanto $T(.,.)$ como $M(.,.,.)$ puedan ser escritas como $T(y, x) = \underline{T}(y, g(x))$ y $M(t, y, x) = \underline{M}(t, y, g(x))$, de tal forma que sea posible obtener el valor de $g(x)$ a partir de [4] y sustituir dicho valor en $\underline{M}(.,.,.)$. Resolviendo $\underline{T}(y, g(x)) = 0$ para $g(x)$ obtenemos:

$$g(x) = \Gamma_g(y) \qquad [6]$$

y esta solución tiene que existir puesto que de otra forma el δ que resuelve [5] puede no ser independiente de *'x'* en general. Obsérvese que por los lemas 5 y 6 es positiva y continua en *'y'*. $g(.)$ es también un valor único puesto que de otra manera la unicidad de δ no se cumpliría en general. $g(x)$ es continua de acuerdo con A.1. $g(\lambda x)$ es también estrictamente monótona en λ y monótona en *'x'* de acuerdo con A.1 y A.4 y puede ser escrita de nuevo de tal forma que sea creciente en λ y no decreciente en *'x'*. Además $T(ty, \delta \cdot x) = 0$ implica que $T(ty, \delta \cdot x) = T(ty, g(\delta \cdot x))$ y

$$g(\delta \cdot x) = \Gamma_g(ty) \qquad [7]$$

Definamos $s \mid \underline{T}(ty, s \,.\, g(x)) = 0$. Ello lleva a que $s \cdot g(x) = \Gamma_g(ty)$ y por tanto $s = \Gamma_g(ty) \,/\, \Gamma_g(y)$. Combinando esto con [6] y [7] se obtiene

$$g(\delta(t, y) \cdot x) = s(t, y) \cdot g(x) \qquad [8]$$

Fijemos 'y' · $\delta(t, y)$ tiene una inversa $\delta^{-1}(\cdot, y)$ para un valor dado de 'y' puesto que es creciente en t por D1. $\Gamma_g(ty)$ es creciente en t por el lema 7.

Definamos $f(\delta) \equiv s(\delta^{-1}(\delta, y), y) \cdot f(\cdot)$ es una función continua y creciente de δ. [8] se puede reescribir por tanto como

$$g(\delta \cdot x) = f(\delta) \cdot g(x) \qquad [9]$$

La solución no trivial de la ecuación funcional [9] es $f(\delta) = \delta^h$, [1, 4, 6] y h dependen de 'y' (es decir, $h = h(y)$) y $h > 0$ puesto que $f(\delta)$ es creciente. De aquí $g(x)$ es semi-homogénea de grado $h(y) > 0$. Definiendo $H(x) = [g(x)]^{1/h(y)}$ obtenemos $T(y, x)=\underline{T}(y, H(x)^{h(y)}) = L(y, H(x))$. Está claro que desde A.1 hasta A.4, A.6 y A.7 se cumplen para $L(y, H(x))$. QED.

2. Bajo A.1 hasta A.4, A.6 y A.7 la especificación canónica [1] implica D1 y la versión escala-separable de D2.

Prueba:

Sea $T(y, x) = L(y, H(x)) > 0$. Por A.6, $L(y, H) = 0$ tiene siempre una solución positiva $H^* = \Gamma(y)$ para cualquier $y = 0$. Por tanto $L(y, H(x)) \geq 0 \Rightarrow H(x)) \geq \Gamma(y)$ (usando la forma reducida), $\Rightarrow \delta(t, y) \cdot H(x) \geq \Gamma(ty)$ para $t > 0$, donde $\delta(t, y) \equiv \Gamma(ty)/\Gamma(y)$, $\Rightarrow H\delta(t, y) \cdot x) \geq \Gamma(ty) \Rightarrow \exists\delta(t, y) | \ 0 \leq L(ty, H(\delta(t, y) \cdot x)) = T(ty, \delta(t, y) \cdot x)$, $\delta(t, y)$ es una función continua y creciente de t puesto que $\Gamma(\cdot)$ es continua, $\Gamma(y)$ es positiva y $\Gamma(ty)$ es creciente en t por los lemas 5 a 7, and $\delta(1, y) = 1$. Por tanto D2 con escala-separabilidad se satisface. Sustituyendo las desigualdades por igualdades obtenemos directamente que D1 se cumple también. Queda claro nuevamente que desde A.1 hasta A.4 se cumplirán para $T(y, x)$. QED.

$L(y, H(x))$ puede por tanto ser considerada la forma canónica de la función de transformación de una tecnología multiproducto homotética con $T^R(y, x) \equiv H(x) - \Gamma(y)$ como su forma reducida. El teorema 1 nos permite obtener de una manera muy simple la función de distancia de una tecnología multiproducto homotética.

$$L(y, H(x/D(y, x)) = 0 \Rightarrow D(y, x) = H(x) / \Gamma(y) \qquad [10]$$

que es separable y muy similar al caso de una tecnología monoproducto homotética y relacionada muy cercanamente con la forma reducida.

4. LA FUNCION DE COSTES DE UNA TECNOLOGIA MULTIPRODUCTO HOMOTETICA

Teorema 2.1: Sea T una tecnología homotética multiproducto con una función de transformación $L(y, H(x))$ que cumple desde A.1 hasta A.4, A.6 y A.7. Su función de costes $C^T(y, p)$ es separable en la forma $C^T(y, p) =$

$V(p) \cdot \Gamma(y)$; donde $p \in \Omega - [0]$ es el vector de precios $\Omega \subseteq R^m_+$ y es un cono convexo en el que la función de costes es finita.

Prueba: Para cualquier $y = 0$

$$
\begin{aligned}
C^T(y, x) = C_L(y, p) &= Inf_x\, p'x \text{ s.t. } L(y, H(x)) > 0 \\
&= Inf_x\, p'x \text{ s.t. } H(x) / \Gamma(y) \geq 1 \text{ usando la función distancia.} \\
&= Inf_x\, p'x \text{ s.t. } H(x) / \Gamma(y)) \geq 1 \\
&= \Gamma(y) \cdot Inf_z\, p'z \text{ s.t. } H(z) \geq 1, \text{ donde } z \equiv x / \Gamma(y) \\
&= \Gamma(y) \cdot C^H(1, p). \\
&= V(p) \cdot \Gamma(y), \text{ where } V(p) \equiv C^H(1, y)\ .\ QED.
\end{aligned}
$$

donde $\Gamma(ty)$ es continua, positiva para $t > 0$, $y = 0$, no decreciente en 'y' y creciente en t (por los lemas 4 a 7).

El resultado de arriba acerca de la separabilidad de las funciones de costes de tecnologías de producción conjuntas homotéticas es una generalización del conocido resultado para el caso multiproducto obtenido por Shephard. Obsérvese que $x(y, p) = z(p) \cdot \Gamma(Y)$. Hay que señalar también que la forma analítica de $\Gamma(y)$ no es disponible para cualquier $L(y, H^*)$ que no pueda resolverse analíticamente. Para conseguir el valor numérico de los costes en este último caso, para valores dados de 'y' y 'p', $V(p)$ necesita ser obtenido y resuelta la siguiente ecuación numericamente:

$$L(y, C^T(y, p) / V(p)) = 0 \qquad [11]$$

El resultado de arriba puede ser obtenido usando técnicas de cálculo técnico cuando además $H(x)$ es diferenciable en 'x'. Obsérvese que la diferenciabilidad de $L(.,.)$ no es necesaria en cuanto que la forma reducida puede ser usada directamente. Las condiciones de minimización de primer orden sujetas a $L(y, H(x)) = 0$ (la restricción acota puesto que la función objetivo es lineal) implica:

$$H_i(x) / H_s(x) = p_i / p_s, \quad \forall i = 1, \dots s - 1, s + 1, \dots m \qquad [12]$$

$$L(y, x_s \cdot H(x/x_s)) = 0 \qquad [13]$$

Donde $H_i(x)$ es la derivada parcial con respecto a x_i. Las m-1 ecuaciones [12] son homogéneas de grado cero en 'x'. Así, dividiendo en cada ecuación cada x_i por x_s el sistema no se ve afectado. Resolviendo las $m-1$ ecuaciones para las $m-1$ incógnitas $x_i/x_s, \dots x_{s-1}/x_s$, $x_{s+1}/x_s \dots x_m/x_s$ conseguimos

$$x_i / x_s = h_{is}(p) \qquad [14]$$

sustituyendo [14] en [13] obtenemos

$$L(y, x_s \cdot H(h_s(p)) = 0 \qquad [15]$$

donde $h_s(p) = (h_{1s}(p),...h_{s-1,s}(p),1,h_{s+1,s}(p),...h_{m,s}(p))$. Definamos $z_s(p) = (H(h_s(p)))^{-1}$; [15] se puede reescribir como:

$$L(y, x_s/z_s(p)) = 0 \qquad [16]$$

Usando la forma reducida obtenemos $x_s/z_s(p) = \Gamma(y)$ para todo s, de ello se sigue que $x_s(y, p) = z_s(p)\Gamma(y)$ y $C(y, p) = p'z(p)\Gamma(y) = V(p) \cdot \Gamma(y)$ donde $z(p) = (z_1(p),...z_m(p))$ y $V(p) = p'z(p)$.

Teorema 2.2: Sea T una tecnología que cumple desde A.1 hasta A.5. Si T tiene una función de costes de la forma $V(p) \cdot S(y)$, $S(y)$ positiva, continua, no decreciente y homogénea linealmente positiva en p, T cumple alternativamente D1 y D2 y permite obtener la forma reducida y la función distancia asociada con la forma canónica [1].

Prueba: Sea $y = 0$ tal que $C(y, p) = V(p)\, S(y) > 0$. Consideremos $(y, x) > 0 \,/\, T(y, x) > 0$. Por la definición de la función de costes para todo p, $p' \cdot x > C(y, p) = V(p) \cdot S(y)$. Para $t > 0$ definamos $d(t, y) \equiv S(ty)/S(y)$. Obsérvese que $\delta(t,y)$ es una función positiva y continua, no decreciente en t y $\delta(1, y) = 1$. Multiplicando ambos lados de la última desigualdad por $\delta(t, y)$ se obtiene $p' \cdot \delta(t, y) \cdot x \geq \delta(t, y) \cdot V(p) \cdot S(y) = V(p) \cdot S(ty) = C(ty, p)$ para todo p. Puesto que $T[ty]$ es convexo por A.5, el teorema de dualidad implica que $d(t, y) \cdot x \in T[ty] \Rightarrow T(ty, \delta(t, y) \cdot x) \geq 0$

i) Para mostrar que D2 con escala separabilidad se cumple necesitamos probar primero que $S(ty)$ es creciente en t.

Supongamos que no sea así, es decir para algún $\tau > t > 0$ e 'y', $S(\tau y) = S(ty)$ *y de* aquí $\delta(\tau/t, ty) = 1$. Sea $x^*(\tau y, p) \equiv \delta(\tau/t, ty) \cdot x(ty, p)$, x(.,.) un vector eficiente. Sabemos por lo visto anteriormente que para cualquier τ, $t > 0$, 'y' y p, $x(ty, p)$ implica que $\delta(\tau/t, ty) \cdot x(ty, p) \in T[\tau y]$. Además, bajo las condiciones A.1 hasta A.4.a $x(ty, p)$ implica que $p'\delta(\tau/t, ty) \cdot x(ty, p) = (S(\tau y)/S(ty)) \cdot p'x(ty, p) = (S(\tau y)) / S(ty))\, C(ty, p) = C(\tau y, p)$. También, bajo las condiciones A.1 hasta A.3 para cualquier $x(y, p)$, $T(y, x(y, p)) = 0$. Por tanto $0 = T(ty, x(ty, p)) > T(\tau y, x(ty, p)) = T(\tau y, x^*(\tau y, p)) = 0$. Lo que es una contradicción. $S(ty)$ y por tanto $\delta(ty)$ son crecientes in t. D2 se cumple.

ii) Consideremos un 'x' tal que $T(y, x) = 0$ y puesto que por A.5 el conjunto $T[y]$ es convexo y por A.4.b 'x' no es un punto interior de $T[y]$, por un teorema de separación estándar existe un p no negativo tal que p'x < p'z para todo $z \in T[y]$, por tanto $p'x = C(y, p) = V(p) \cdot S(y)$, de aquí se sigue que $p'\delta(t, y)x = V(p) \cdot S(ty) = C(ty, p)$, *i.e.* $\delta(t, y) \cdot x$ que pertenece a $T[ty]$ como hemos visto arriba es también eficiente para '$t \cdot y$' al precio p, es decir $T(ty, \delta(t, y)x) = 0$. D1 se cumple puesto que $\delta(t, y)$ es creciente en t como mostramos en (i).

iii) Definamos el output pseudo-escalar $\gamma \equiv S(y)$, $C(\gamma, p) = V(p)\gamma$ es una función de costes regular.

Sea $F(x)$ la función de producción de γ, con $F(x)$ cumpliendo desde A.1 hasta A.5 con respecto a 'x'. Sea 'x' tal que $\gamma = F(x)$ *i.e.* $(1/\gamma)F(x) = 1$. Como en (ii) para cualquier 'x' existe un 'p' tal que $p'x = C(\gamma, p) = V(p)\gamma$. De aquí se sigue que $p'(x/\gamma) = V(p) = C(1, p)$ y por tanto $F((1/\gamma) \cdot x) = 1 = (1/\gamma) \cdot F(x)$, es decir $F(x)$ es linealmente homogénea en 'x'. $T^R(y, x) = F(x) - \gamma \equiv H(x) - S(y)$ lo que es la forma reducida de la forma canónica forma [1]. QED. (Obsérvese que puede no ser siempre posible recuperar una forma canónica a partir de su forma reducida).

Hay que valorar considerablemente el papel unificador desempeñado por A.4.a y b, un supuesto que es habitualmente, o bien olvidado, especialmente cuando se supone la libre disposición de una manera débil,o bien exagerado, especialmente cuando la función de transformación se supone creciente en todos los componentes de x e 'y', rechazando en este último caso tecnologías como la función de producción de Leontief.

Eliminando A.4.a obtenemos que $\Gamma(ty)$ y $S(ty)$ no tienen por qué ser estrictamente crecientes en t. Consecuentemente la especificactión canónica es más débil que D1 puesto que $\Gamma(ty)/\Gamma(y)$ no es decreciente en t. Los teoremas 2.1 y 2.2 se cumplen también para la forma canónica y la función de costes separable.

Eliminando A.4.b. limita adicionalmente los resultados puesto que D1 $\rightarrow$ forma canónica $\rightarrow$ función de costes separable $\rightarrow$ D2, pero la relación a la inversa no puede establecerse. Además, las partes (ii) e (iii) de la prueba del teorema 2.2 no se cumplirían. La escala-separabilidad en D1 no se determinaría nunca más.

Eliminando A.4 completamente supondría además que D2 y la definición de Färe y Shephard (1977) no serían equivalentes a D1 (la definición de Hanoch). Obsérvese sin embargo que A.4 se construye en la especificación estándar de la tecnología homotética monoproducto $T(y,x) = F(H(x)) - y$.

5. CONCLUSIONES

El artículo propone una forma funcional para la tecnología homotética multiproducto que generaliza el caso monoproducto bien conocido y muestra la equivalencia entre esta especificación funcional y las definiciones de Hanoch (1970) y Färe y Shephard (1977) de tecnología homotética multiproducto.

El Teorema 1 nos permite obtener de una forma muy simple la función-distancia de una tecnología homotética multiproducto. Los Teoremas 2.1 y 2.2 nos permiten obtener la equivalencia entre la forma funcional propuesta y la propiedad de separabilidad de la función de costes.

REFERENCIAS

1. Aczel, J. (1966): *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York.
2. Färe, R. and Shephard, R. (1977): «Ray-Homothetic Production Functions», *Econometrica*, 45, pp. 133-146.
3. Hanoch, G. (1970): «Homotheticity in Joint Production», *Journal of Economic Theory*, 2, pp. 423-426.
4. Kats, A. (1970): «Comments on the Definition of Homogeneous and Homothetic functions», *Journal of Economic Theory*, 2, pp. 310-313.
5. Lau, J. L. (1978): «Appications of Profit Functions», in *Production Economics: A dual approach to theory and applications*, Fuss, M. and McFadden, D. (eds),North Holland, Amsterdam, pp. 133-215.
6. Samuelson, P. (1986): «Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontieff Models» en Ira Son Ed. *Readings in Input-Output Analysis: Theory and Applications,* New York, Oxford University Press, pp. 192-195.
7. Shephard, R. W. (1972): «Comments on Homogeneous Production Functions» *Journal of Economic Theory*, 4, pp 101-102.