

# WIENER PROCESS IN MATHEMATICA

JOSE ANTONIO SEIJAS MACIAS

[Antonio.smacias@udc.es](mailto:Antonio.smacias@udc.es)

*Universidade da Coruña / Departamento de Economía Aplicada II  
F. de Economía e Empresa – Campus de Elviña (1571 – A Coruña)*

**RESUMEN:** El proceso de Wiener (movimiento Browniano) se aplica, en la actualidad, en varios campos de la ciencia, especialmente en finanzas y matemáticas financieras. Utilizamos una construcción primaria del proceso de Wiener, basado en una secuencia adecuada de simples caminos aleatorios simétricos. Este método es una simplificación de los de F.B. Knight and P. Révész, citada en [1]. Hemos utilizado el programa de cálculo simbólico Mathematica para proporcionar una implementación de dicho proceso como recursos didáctico que ayuda a comprender dicho fenómeno. Se presentan dos implementaciones de los métodos aplicados para obtener un proceso de Wiener, uno de ellos un modelo de tiempo discreto, y el otro método, el de Lévy.

**Palabras claves:** Proceso de Wiener, Camino Aleatorio, Método de Lévy, Mathematica, Movimiento Browniano.

**ABSTRACT:** The Wiener process (Brownian motion) is commonly applied, nowadays, in several fields of science, especially in finance and financial mathematics. We use an elementary construction of the Wiener process, based on a proper sequence of simple symmetric random walks. This method is a simplification of those of F.B. Knight and P. Révész, cited in [1]. Mathematica software has been useful to provide an implementation of the method proposed. We present two implementations of methods applied to obtain a Wiener process, one being a discrete-time model, and the other, the Lévy's method.

**Keywords:** Wiener Process, Random Walk, Levy's Method, Mathematica, Brownian Motion.

## 1. Introduction.

In 1828, R. Brown published a paper, in which he summarized his observations on the motion of tiny organic and inorganic particles when immersed in fluids move randomly and, tried to find its physical explanation. However, Brown could only speculate on the causes of this phenomenon. His studies were used to, among other things; result in the so-called Brownian motion, which is reproduced as a seemingly chaotic zigzag movement of microscopically small particles in fluids. The physics of this phenomenon was explained satisfactorily only 80 years later, independently by Einstein and Smoluchowski: in suspensions a small solid particle is hit randomly by molecules of liquid from different directions, and unless the crashes are perfectly balanced, the will

cause chaotic migration of the particle through the suspension.

N. Wiener (1918) was the first to present a general mathematical treatment of the Brownian motion and presented a fully rigorous mathematical model describing the physical phenomenon. He defined and analysed a stochastic process, which has served up till now as a stochastic model of Brownian motion. This process is also referred to as the Wiener process. Nowadays the enormous importance of the Brownian motion process is above all due to the fact that it is the basis of the modern approach to financial mathematics. Wiener process plays a crucial role in mathematics of finance, and has fruitful applications in disciplines as time series analysis, operations research, communication theory and reliability theory ([2], pp. 351)

Discrete models are only a crude approximation to the way in which stock markets actually move. A better model would be one in which stock prices can change at any instant ([3], pp. 51). First attempt to evolve these models was in 1900 L. Bachelier. He proposed Brownian motion as a model of the fluctuations of stock prices. Although his proposal was neglected, several authors later resumed their principles and focused his research on the modelling process of Brownian motion or Wiener processes.

Computer algebra systems (like “Mathematica” or “Matlab”) are part of the tools that are available for teaching mathematics. These tools are introducing into courses for different studies (mathematics, engineering, etc.), basically for advanced courses. First year students are more confident into traditional tools like graphical calculators; but for more years courses the usefulness of computer algebra system are more evident.

In this paper we discuss the basis of construction of a Wiener process. The computer algebra system “Mathematica” is used to demonstrate the basic methods for the construction of Wiener process. Our goal in this paper is to provide a representation of the construction of a Wiener process by using the computer algebra system Mathematica. We use several functions and procedures implemented in Mathematica (version 9) and, we show the techniques for constructing a Wiener process (or Brownian motion).

Our first approach will be considered Wiener process as an “infinitesimal” random walk in which smaller and smaller steps are taken at ever more frequent time intervals. Then, we will study two approaches: as a discrete-time model ([4], pp. 26) and a formal construction, due to Lévy ([3], pp. 51).

Mathematica software contains a function to simulate a Wiener process, it is WienerProcess function, and it may be used with RandomFunction function to construct a Wiener process. If we compare with the results of our implementation has better development. The symbolic computation software Mathematica has been widely used in many fields of engineering, mathematics and finance. There are functions that allow calculations of most of the financial functions (deterministic or stochastic). Our aim is to show how you can make the implementation of these functions using the basic functions of calculus and linear algebra.

In the Section 2 of this paper, we present the construction of random walks as a sequence of values of a random variable, then section three presents an approach to the distribution of random walks through the normal distribution and uniform distribution, this approach will define Wiener process as random walks. Section 4 presents the construction of the Wiener process by discrete-time model. Section 5 uses a method of Wiener process construction because Lévy. Finally, in Section 6 collect the conclusions

## 2. Random Walk.

The simplest model of a Wiener process is a symmetric random walk in one dimension, that is, one that represents, for example, the moving of a particle at a moment of  $t, \{t=1, 2, \dots, n\}$ . We have a sequence (a walk)  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  of independent and identically distributed random variables with

$$P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

To simulate a random walk we could use the command `Random[_]`, which is part of Mathematica, to get an integer on  $[0,1]$  and construct the command `RandomWalk[k_integer]`, for a sequence of  $\{1, -1\}$  with  $k$  elements.

First, we construct a random sequence of integer elements between -1 and 1 with the procedure `X[k_integer]`:

```
X[k_Integer]:=Table[2*Random[Integer,{0,1}]-1,{i,1,k}].
```

```
Example1=X[20]
```

```
{1,1,-1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1,-1,1,-1,-1,-1,-1}
```

Now, we check that the mean is zero and the variance is unitary, using a sequence with 10000 elements.

```
Example2=X[10000];
```

```
N[Mean[Example2]]
```

```
0.076
```

```
N[Variance[Example2]]
```

```
1.00004
```

Now, we consider the command `RandomWalk[k_integer]`. A random walk marks the position of the particle at time  $n$  is given by the partial sums

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n. \quad (2)$$

The stochastic process  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  is a simple random walk under the probability measure  $P$  if  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , where  $X_i$  takes the values  $\{-1, +1\}$  and these are independent and identically distributed under  $P$ .

Then, we define the process for simulation of a random walk.

```
RandomWalk[n_]:=NestList[#+(-1)^Random[Integer]&,0,n]
```

We graph two examples: one of them with 50 points, where the movements of the particle are very defined and the other with 2000 points, where the movements are less defined:

```
RandomWalk[50]
```

```
{0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 4}
```

We provide a graphical representation of a random walk.

```
ListPlot[RandomWalk[50],Joined ->True];
```

(See Figure 1)

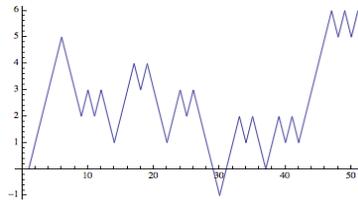


Figure 1: Random Walk 50 points

```
ListPlot[RandomWalk[2000], Joined ->True];
```

(See Figure 2)

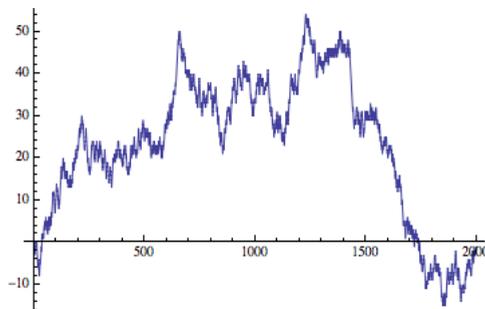


Figure 2: Random Walk 2000 points.

2.1 Construction of Random Walks.

To construct a symmetric random walk, we repeatedly toss a fair coin ([5], p. 119) where variable  $X_i$  represents the different results for every toss. The process  $S_n$  is a symmetric random walk for different values of length  $n=1, 2, \dots$ .

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \tag{3}$$

Considering a group of random walks with  $n$  points, we choose a random number of walks from the first  $k$  points in the walk. In [3], p. 52, this process is compared to a model of the gains from repeated plays of a fair game. For each  $n$ ,  $S_n$  models the net gain after  $n$  plays.

We define a procedure for calculating  $m$  random walks with minus than  $k$  points RandomWalks[m\_Integer, k\_Integer].

```
RandomWalks[m_Integer, k_Integer]:=
Module[{x,s=1,LWalks={}},While[s<=m,A=Walk[k];x=Random[Integer,{1,k}];
AppendTo[LWalks,Table[{i,S[i]},{i,0,x}]];s++;LWalks]
```

```
Example1 = RandomWalks[3, 15]
{{{0, 0}, {1, -1}, {2, -2}, {3, -3}, {4, -2}, {5, -1}, {6, -2}, {7, -3}, {8, -4}, {9, -3}, {10, -2}},
 {{0, 0}, {1, -1}, {2, -2}, {3, -1}, {4, 0}, {5, 1}, {6, 2}, {7, 3}, {8, 2}, {9, 1}, {10, 0}, {11, -1}},
 {{0, 0}, {1, -1}, {2, -2}, {3, -3}, {4, -2}, {5, -3}, {6, -4}, {7, -5}, {8, -4}, {9, -3}, {10, -4}, {11, -3}, {12, -2}}}
```

The example above (Example1) is a group of 3 random walks, with until 15 points. The different random walks are represented graphically using function ListPlot.

```
FramesWalk1 = ListPlot[Example1, Joined -> True]
```

(See Figure 3)

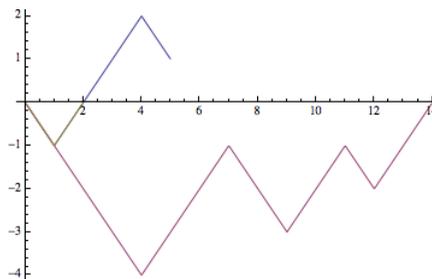


Figure 3: FramesWalk 1 (3 walks, until 15 points)

Another example (Example2), now, it is a group of 5 random walks, with until 90 points. We have 5 random walks with a common origin, the zero point, and different overall lengths.

```
Example2 = RandomWalks[5, 90];
```

```
FramesWalk2 = ListPlot[Example2, Joined -> True]
```

(See Figure 4)

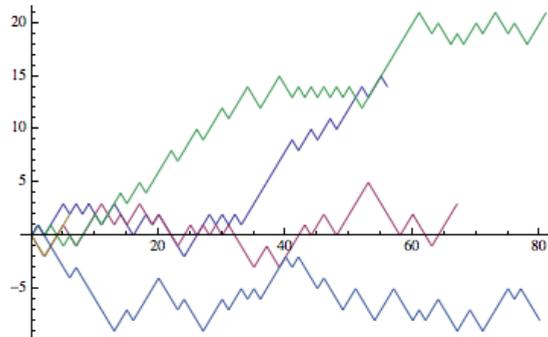


Figure 4: FramesWalk2, (5 walks, until 90 points)

The distribution of  $S_n$  is a linearly transformed symmetric binomial distribution ([1] pp. 251). Consequently,  $E[S_n] = 0$  and  $\text{var}[S_n] = n$ .

First, we use `VectorWalk[n_, m_]` for constructing  $m$  random walks with  $n$  elements, and then, we construct the distribution of  $S_n$  with the `VectorSn[V_, n_]` function.

```
VectorWalk[n_, m_] := Table[X[n], {i, 1, m}]
```

```
V = VectorWalk[800, 10000];
```

```
VectorSn[V_, n_] := Total[Take[#, n]] & /@ V
```

The parameter  $n$  chosen for the function `VectorSn[V, n]` must be less than or equal to the first argument of `V[n, m]`. This function is very fast and we estimate 250 random walks in only 0.10 seconds

```
Timing[vA = VectorSn[V, 250];]
{0.100307, Null}
```

Now, we calculate the mean and the variance for the random walk estimated.

```
N[Mean[vA]]
```

```
-0.0808
N[Variance[vA]]
239.586
```

Another example for 1000 random walks (in 0.23 seconds).

```
Timing [vB = VectorSn2[V, 1000];]
{0.233903, Null}
N[Mean[vB]]
-0.0176
N[Variance[vB]]
1007.28
```

These examples show the speed of the program calculation process of a large number of random walks and confirm the theoretical mean and variance parameters of random walks.

### 3. From random walks to Wiener process.

We could think of a Wiener process as an infinitesimal random walk. In terms of a gambling game, the interval between plays is  $\delta t$  and the stake is  $\delta x$ , and we are thinking of both of these as tending to zero. We use the Central Limit Theorem with

$$\mu = 0, \sigma^2 = 1 \text{ and } \delta t = \frac{1}{n}, \delta x = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Suppose that  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  is a symmetric simple random walk, then  $P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\}$  converges

to  $\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$  as  $n \rightarrow \infty$ , that is, the CDF of the Normal distribution with mean zero and variance 1. Using Mathematica we have expressions for PDF and CDF of normal distribution with mean  $\mu$  and variance  $\sigma$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PDF[NormalDistribution}[\mu, \sigma], x], \text{CDF[NormalDistribution}[\mu, \sigma], x] \\ \left\{ \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu-x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \end{array} \right\}$$

Proba[x] is a procedure for calculating the value of the CDF of a normal distribution with zero mean and variance 1. Then we have represented such distribution on a graph.

```
Proba[x_] := (1/2) * (1 + Erf[x/Sqrt[2]])
Proba[0]
1/2
ListPlot[Table[Proba[x], {x, -1.5, 1.5, 0.1}], Joined -> True]
```

(See Figure 5)

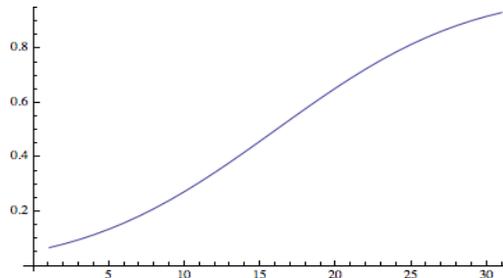


Figure 5: CDF Normal Distribution [0,1]

Now, we considered that the each instance of the random walk is divided in  $t$  periods. Then, suppose that  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  is a symmetric simple random walk, then  $P\left\{\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \leq x\right\}$  converges to  $\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$  as  $n \rightarrow \infty$ , where  $[nt]$  is the integer part of  $nt$ . In order to prove this statement we need to point out that  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  is

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sigma[S_n]} = Z, \text{ the standard normal distribution, which has PDF: } \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}}.$$

Now, the evolution of the random walk coincides with the CDF of a normal distribution with zero mean and variance  $t$ . Procedure `TempProba[x_, t_]` can get the values of the random walk for a given value of  $x$  and a value of  $t$ . The graph shows these random walks for  $t$  values between 0 and 10.

```
TempProba[x_,t_]:=Erf[-∞, x/ Sqrt[2t]]/2
TempProba[0.99,.5]
0.919254
ListPlot[Flatten[Table[TempProba[x,t],{x,-1.5,1.5,0.1},{t,.1,10}],Joined->True];
```

(See Figure 6)

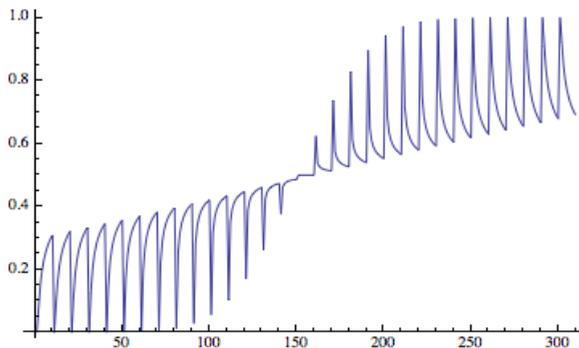


Figure 6: CDF Normal Distributions [0,t], t=0.1,...,10

From the passage to limit in the random walk we could introduce the Wiener process.

A symmetric random walk  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  is a Wiener process, under a probability  $P$ , if for some real constant  $\sigma$  verifies:

1. for each  $s \geq 0$  and  $t > 0$  the random variable  $W_{t+s} - W_s$  has the normal distribution with mean zero and variance  $\sigma^2 t$ ,
2. for each  $n \geq 1$  and any time  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , the random variables  $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}$  are independent,
3.  $W_0 = 0$ ,
4.  $W_t$  is continuous on  $t \geq 0$ .

The parameter  $\sigma^2$  is known as the variance parameter. By scaling of the normal distribution, it is immediate that  $\{W_{t/\sigma}\}_{t \geq 0}$  is a Wiener process with variance parameter one.

The transition probabilities of a Wiener process with variance parameter one are:

$$P[W_{t_n} \leq x_n | W_{t_i} = x_i, 0 \leq i \leq n-1] =$$

$$P[W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \leq x_n - x_{n-1}] = \int_{-\infty}^{x_n - x_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{u^2}{(t_n - t_{n-1})}\right) du \tag{4}$$

This is the probability density function of the random variable  $W_{t+s}$  conditional on  $W_s = x$ . Then, we define procedure `TransitionProb[x_,y_,t_]` that evaluates the PDF of the random variable  $W_{t+s}$  conditional on  $W_s = x$ , where  $t$  is the value of the increment  $\delta t$  and  $\delta x$  is  $x-y$ . In these situation the transition probability follows a normal distribution with mean  $y$  and variance  $t$ . In the graph, an example for several values of  $y$  and  $t$  is representing.

```
TransitionProb[x_,y_,t_]:=1/Sqrt[2π t] Exp[-((x-y)^2)/(2 t)]
TransitionProb[0.1,0.2,.5]
0.558576
```

```
ListPlot[Flatten[Table[TransitionProb[x,y,t],{x,0.01,0.99,0.1},
{y,0.01,0.99,0.1},{t,.1,.5,0.1}],Joined->True]
```

(See Figure 7)

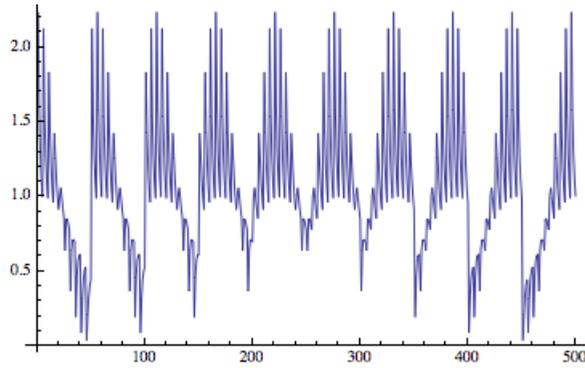


Figure 7: Probability density function random variable conditioned

The joint distributions of  $W_{t_1}, \dots, W_{t_n}$  for each  $n \geq 1$  and all  $t_1, \dots, t_n$  are called the finite dimensional distributions of the process.

Behavioural characteristics of Wiener process are:

1. Although  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  is continuous everywhere, it is differential nowhere.
2. Wiener process will eventually hit any and every real value no matter how large or how negative. No matter how far above the axis, it will be back down to zero at some later time.
3. Once Wiener process hits a value, it immediately hits again infinitely often.
4. It doesn't matter, what scale you examine Wiener process on, it looks just the same.

Two different approaches were taken to construct a Wiener process using the random walk process we have defined before.

#### 4. 4. Construction of a Wiener process as a discrete-time model

For the construction of a Wiener process using a discrete-time model, let  $\Delta t > 0$  be a constant time increment. For the discrete instances  $t_j = j\Delta t$ , the value  $W_{t_j}$  can be written as a sum of increments  $\Delta W_k$ ,

$$W_{j\Delta t} = \sum_{k=1}^j (W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t}) \quad (5)$$

The elements  $\Delta W_k$  are independent and normally distributed with  $\text{var}(\Delta W_k) = \Delta t$ . Increments  $\Delta W$  with such a distribution can be calculated from standard normally distributed random numbers  $Z$ . The implication

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z\sqrt{\Delta t} \sim N(0,\Delta t), \quad (6)$$

leads to the discrete-time model of a Wiener process:

$$\Delta W_k = Z\sqrt{\Delta t} \text{ for } Z \sim N(0,1) \text{ for each } k. \quad (7)$$

The function `Wiener [n]`, builds a Wiener process with  $n+2$  points in the interval  $(0,1)$  following a discrete-time model. The value of  $\Delta t$  will be the value of  $1/n$ . The intermediate values for time between 0 and 1 will be calculated as the sum of a random value of a normally distributed variable with mean 0 and variance 1 times the square root of the increment of time.

```
Wiener[n_] :=
  Flatten[ {FoldList[Plus, 0, Array[1/n &, n] ],
    FoldList[Plus, 0,
      RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], n] Sqrt[1/n]]}, {{2}, {1}}]
```

```
Wiener[3]
{{0, 0}, {1/3, 1.27124}, {2/3, 0.159689}, {1, 0.244396}}
```

```
ListPlot[Wiener[3],Joined->True];
```

(See Figure 8)

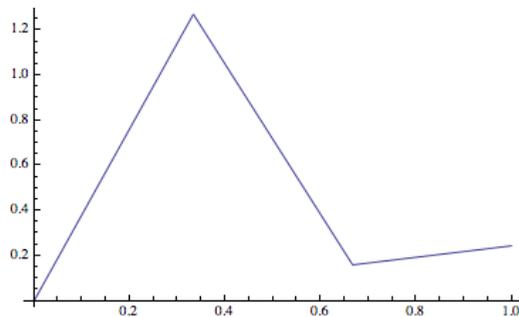


Figure 8: Wiener proces with 3 points

The next figure shows an example of a Wiener process, where the 5000 calculated points  $(t_s, W_s)$  are joined by linear interpolation. This process was executed in 0.016 seconds.

```
ListPlot[Wiener[5000],Joined->True];
```

(See Figure 9)

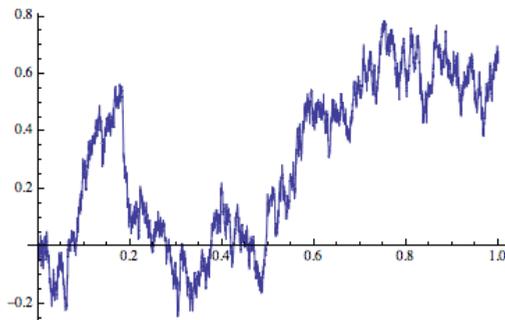


Figure 9: Wiener Process with 5000 points

When we construct a Wiener process following `Wiener[x]`, it is not a mean zero and variance one sequence, but it verifies that,

$$\sum_{i=2}^n (W_i - W_{i-1})^2 \rightarrow 1. \quad (7)$$

```
Timing[A1=Wiener[5000];]
{0.016569, Null}
```

```
A2=Transpose[A1][[2]];
μ=Mean[A2]
-0.12084
σ2=Variance[A2]
0.0517237
```

```
Total[(Rest[A2]-Most[A2])^2]
1.01733
```

## 5. Lévy construction of the Wiener process

The idea here is that we can produce a path for a Wiener process by direct polygonal interpolation.

Without loss of generality we take the range of  $t$  to be  $[0,1]$ . Lévy's construction builds a polygonal approximation to the Wiener process from a countable collection of independent, normally distributed random variables with mean zero and variance one.

We define a random variable for the interval  $[-1,1]$ . To get a mean zero and variance one random variable, we normalize with  $\sqrt{1/3}$ . When we use the Mathematica function `Random`, for a real number on  $[-1,1]$ , we obtain a random variable with mean zero and variance  $1/3$ , as follows from the properties of the Uniform Distribution.

Mean[UniformDistribution[{-1, 1}]], Variance[UniformDistribution[{-1, 1}]]  
 {0, 1/3}

We use an induction process. The induction begins with

$$X_1(t) = t\xi(1), \tag{8}$$

where we index them by the dyadic points of [0,1], a generic variable being denoted by  $\xi(k * 2^{-n})$  where  $n \in N$  and  $k \in \{0,1,\dots,2^n\}$ .

Thus,  $X_1$  is a linear function on [0,1]. The n-th process,  $X_n$ , is linear in each interval  $[(k-1) * 2^{-n}, k * 2^{-n}]$ , is continuous in  $t$  and satisfies  $X_n(0) = 0$ . It is determined by the values  $\{X_n(k * 2^{-n}), k = 1, \dots, 2^n\}$

We take

$$X_{n+1}(2k * 2^{-(n+1)}) = X_n(2k * 2^{-(n+1)}) = X_n(2k * 2^{-n}). \tag{9}$$

We, now, determine the appropriate value for  $X_{n+1}(2(k-1) * 2^{-(n+1)})$ . Conditional on  $X_{n+1}(2k * 2^{-(n+1)}) - X_{n+1}(2(k-1) * 2^{-(n+1)})$  we get it should be normally distributed with mean

$$\frac{1}{2} (X_{n+1}(2k * 2^{-(n+1)}) - X_{n+1}(2(k-1) * 2^{-(n+1)})). \tag{10}$$

and variance  $2^{-(n+2)}$ .

Then make this inductive process in Mathematica to check its operation. Procedure X[1] represents the final value of Wiener process, is a uniform distributed variable with mean 0 and variance 1.

```
X[1] = Random[Real, {-1.0, 1.0}]/Sqrt[1/3]
1.29842
```

The following graph represents a Wiener process with five points: first point is always 0, and the final of the process is indicating for value of X[1].

```
ListPlot[{0, X[1] + 2^(-3/2 + 1)*2^(-2/2 + 1), X[1] + 2^(-2/2 + 1),
X[1] - 2^(-2/2 + 1)*2^(-3/2 + 1), X[1]}, Joined -> True]
```

(See Figure 10)

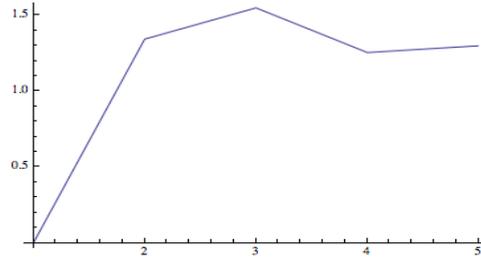


Figure 10: Lévy Process with 5 points

Now, representing a graph for a Wiener process with 7 points.

```
ListPlot[{0, X[1] + 2^-(4/2 + 1)*2^-(3/2 + 1)*2^-(2/2 + 1),
X[1] + 2^-(3/2 + 1)*2^-(2/2 + 1),
X[1] - 2^-(4/2 + 1)*2^-(3/2 + 1)*2^-(2/2 + 1), X[1] + 2^-(2/2 + 1),
X[1] - 2^-(2/2 + 1)*2^-(3/2 + 1), X[1]}, Joined -> True, PlotRange -> All]
```

(See Figure 11)

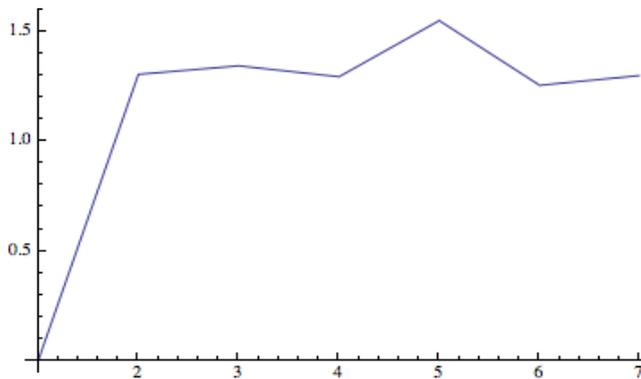


Figure 11: Lévy Process with 8 points

Both processes have the same origin and the same destination point. At each stage we introduce new intermediate points that reproduce new values in the way: a greater number of points; the greater number of turns in the walk alternative.

We produce several random walks from a Lévy's process into a  $[0,1]$  interval with  $\text{Interv}[n]$ , where the number of points is  $2^n + 1$ , from 0 to 1.

```
Interv[n_]:=Table[k*2^-n,{k,0,2n}]
```

```
Interv[3]
{0,1/8,1/4,3/8,1/2,5/8,3/4,7/8,1}
```

We consider three decomposition of a random walk: first, we consider the direct path without intermediate points in the interval [0,1], then we introduce an intermediate point (1/2), and finally three intermediate points (1/3, 1/2, 2/3).

```
walks :=
{ListPlot[{0, 0}, {1, X[1]}], Joined -> True, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], PlotRange -> All,
DisplayFunction -> Identity],
ListPlot[{0, 0}, {1/2, X[1] + 2^-(2/2 + 1)}, {1, X[1]}], Joined -> True, PlotStyle ->
RGBColor[0, 1, 0], PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity],
ListPlot[{0, 0}, {1/3, X[1] + 2^-(3/2 + 1)*2^-(2/2 + 1)}, {1/2, X[1] + 2^-(2/2 + 1)}, {3/4, X[1] -
2^-(2/2 + 1)*2^-(3/2 + 1)}, {1, X[1]}],
Joined -> True, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1], PlotRange -> All, DisplayFunction -> Identity}]

Show[walks, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

(See Figure 12)

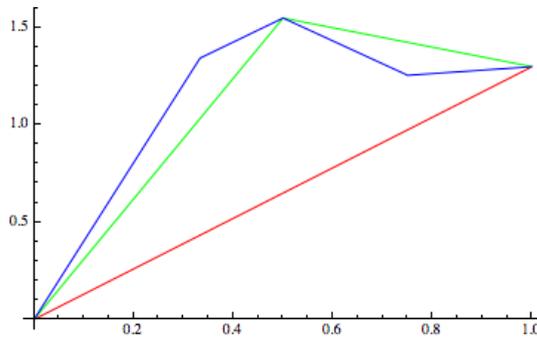


Figure 12: Decomposition for a walk

Now, we present the procedure  $PWL[x]$ , which builds a random walk with  $2^{x-1} + 1$  points in the range [0,1], following Lévy's method. We introduce randomness by defining  $X_1$  and  $X[n]$  for values bigger than 1, as follows:

```
X[1] := (Random[Real, {-1.0, 1.0}])/Sqrt[1/3]

X[n_] :=
If[n <= 3,
Flatten[Table[(X[n-1]*(-1)^n*2^-((1/2)+1))+(-1)^(i-1)*Sum[2^-((j/2)-1)], {j,2,i}], {i,2,n}],
Flatten[Table[(X[n-1]*(-1)^n*Sum[2^-((j/2)+1)], {j,2,i}]+((-1)^(i-1)*Sum[2^-((j/2)+1)],
{j,2,i}])/X[n-1]), {i,n,n+1}]]]
```

Procedure PWL[x]

```
PWL[n_]:=Module[{A={{0,0},{1,X[1]}},s,S,B},Do[S=X[s];
B=Table[{Interv[s-1][[i*2]],S[[i]]},{i,1,Length[X[s]]}];
Do[AppendTo[A,B[[m]]],{m,1,Length[B]}],{s,2,n}];Sort[A]
```

```
A=PWL[5]
{{0, 0}, {1/16, 1.2022}, {1/8, 0.337388}, {3/16, 0.3856}, {1/4, -0.701512}, {5/16, 0.398028},
{3/8, 0.781528}, {7/16, -0.563776}, {1/2, -0.998607}, {9/16, -2.80575}, {5/8, -1.26311}, {11/16,
-1.44902}, {3/4, 1.87926}, {13/16, 1.38383}, {7/8, 1.54441}, {15/16, -1.53238}, {1, 0.263929}}
```

Representing a random walk whit a Lévy's process with  $2^{5-1} + 1 = 17$  intermediate points into range  $[0,1]$ .

```
ListPlot[A,Joined->True];
```

(See Figure 13)

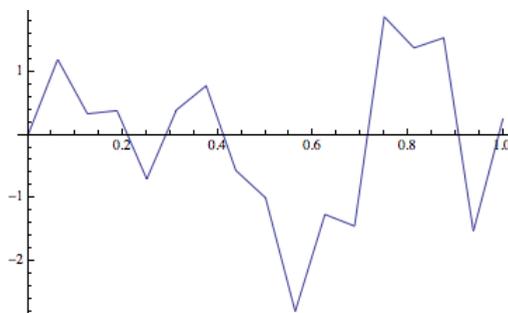


Figure 13: Wiener Process with PWL

The PWL process is very slow and produces unsatisfactory results, hence we test to obtain another function, a little more efficient, allowing us to get a better response. Time to get more than 4000 points over 2 minutes.

To carry out this program, we begin with a countable collection  $\{\xi_k^{(n)}, k \in I(n), n = 0, 1, \dots\}$  of independent, standard (zero mean and unit variance) normal random variables. Here  $I(n)$  is the set of odd integers between 0 and  $2^n$ ; i.e.  $I(0) = \{1\}$ ,  $I(1) = \{1, 3\}$ ,  $I(2) = \{1, 3\}$ .

We introduce the procedure RandomEpsilon:

RandomEpsilon[x], builds a vector of standard normal random variables with  $2^x$  elements.

```
RandomEpsilon[n_]:=Module[{A={Random[Real,{-1.0,1.0}]/Sqrt[1/3]}},
Do[A=Append[A,Table[Random[Real,{-1.0,1.0}]/Sqrt[1/3],{i,1,2j,2}],{j,1,n}];A]
```

```
RandomEpsilon[3]
{-1.42724, {-1.7191}, {-1.44253, 0.34502}, {-0.438418, -0.778514, -1.3552, 0.629436}}
```

The Wiener process associated to the random walk is WienerLevy[x], builds a Wiener process with  $2^x + 1$  points, for  $x > 0$ , in the interval [0,1], following Lévy's method.

```
WienerLevy[n_]:=Module[{B={0,0},A1=RandomEpsilon[n]},
B=Append[B,{1,A1[[1]]}];Do[k=Table[h,{h,0,2i-1}];Ine=Table[h,{h,1,2i,2}];f=Length[Ine];
Do[t=(Ine[[j]]+1)/2i;s=(Ine[[j]]-1)/2i;μ=1/2(B[[j,2]]+B[[j+1,2]]);
σ=;B=Append[B,{Ine[[j]]/2i,μ+σ*A1[[i+1]][[j]]}, {j,1,f}];B=Sort[B,{i,1,n}];B]
```

Two examples of the procedure WienerLevy: first of then, we consider WienerLevy[3] that makes a  $2^3 + 1 = 9$  points into the range [0,1], and second one, we consider a procedure for Wiener process (WienerLevy[7]) with  $2^7 + 1 = 129$  points.

```
WienerLevy [3]
{{0, 0}, {1/8, -0.424782}, {1/4, -0.455172}, {3/8, -0.207726},
{1/2,-0.395019}, {5/8, -0.505499}, {3/4, 0.156079}, {7/8, 0.0333154},
{1, 0.502679}}
```

```
ListPlot[WienerLevy[7], Joined->True]
```

(See Figure 14)

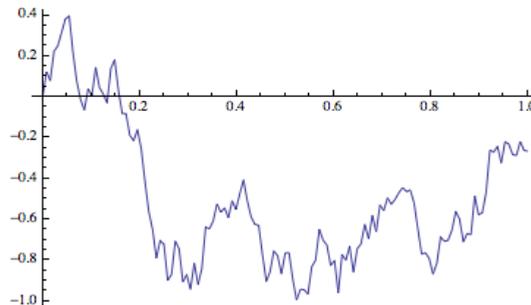


Figure 14: Wiener Process using WienerLevy

In this case, the Wiener process, producing with this method, is not a collection with mean zero and variance one, as in the previous case where we use the discrete time model.

```
Timing[A=WienerLevy[12];]
{0.295630 Second , Null}
```

```
B=Table[A[[i,2]],{i,1,Length[A]}];
```

```
Mean[B]
0.0589245
```

```
Variance[B]
0.231372
```

but rather it verifies that

$$\sum_{i=2}^n (B_i - B_{i-1})^2 \rightarrow 1. \quad (11)$$

We found that process is slower than the one presented in the previous section, now for more than 4000 points exceeds time 0.29 seconds, compared to the previous case where we got 5000 points in less than 0.016 seconds.

```
A1=WienerLevy[14];
```

```
A2=Transpose[A1][[2]];
```

```
Total[(Rest[A2]-Most[A2])^2]
0.989613
```

The sequence of WienerLevy[] is a Wiener Process. It suffices to prove that the increments  $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_{j=1}^n$  are independent, normally distributed, with mean zero and

$$\text{variance } t_j - t_{j-1} = \frac{1}{2^n}.$$

```
WL=WienerLevy[10];
```

```
WL1=Table[WL[[i,2]],{i,1,Length[WL]}];
```

```
WL2=Table[WL1[[i]]-WL1[[i-1]],{i,2,Length[WL1]}];
```

```
Mean[WL2]
0.00041186
```

```
Variance[WL2]
0.000967595
```

```
N[1/(2^10)]
0.000976563
```

Finally, comparing the 3 procedures implemented clear efficiency observed in discrete time model implemented in section 4. Three procedures represent three types of programming: functional programming, procedural programming and recursive programming.

Number of points	Functional Programming Wiener	Procedural Programming WienerLevy	Recursive Programming PWL
4097	0.018 seconds	2.34 seconds	> 1 minute
127	0.000631 seconds	0.013 seconds	0.1762 seconds

## 6. Conclusions.

The study by Robert Brown of the motion of a particle in a fluid medium in the early nineteenth century had significant unintended consequences on numerous fields. The creation of a mathematical model that would allow modelling this movement by Norbert Wiener had an impact in fields as diverse as particle physics or financial mathematics.

In this work we have made an approach to the Wiener process by various techniques from various authors. To do this, we used the new tools at our disposal. In particular, computer algebra systems (Mathematica) have significant potential when using them to show the formation and creation of a Wiener process by a random walk.

The program Mathematica (version 9) has a function to simulate a Wiener process, but in this work we have tried that students not only use the program-implemented method but different methods of approximation of the process.

We have used different programming styles, at the same time; analyze the impact on the performance in computing time each.

The results of all three methods for constructing a Wiener process are similar and our goal was to demonstrate a very basic approach to Wiener process using three programming methods: functional, procedural and recursive with Mathematica.

## 7. References

1. T Szabados, An Elementary Introduction to Wiener Process and Stochastic Integrals, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*. 31 (1996) 249-297.
2. F. Beichelt, *Stochastic Process in Science Engineering and Finance* (Chapman & Hall, London, 2006)

3. A. Etheridge, *A Course in Financial Calculus*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
4. R. Seydel, *Tools for Computational Finance* (Springer, Berlin, 2004).
5. S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I*, (Springer-Verlag, NY, 2003).

# SOBRE LAS PRÁCTICAS DE LABORATORIO EN LA ESTADÍSTICA DE UN GRADO EN TURISMO

J. CASTELLÓ

[castello@uji.es](mailto:castello@uji.es)

*Universitat Jaume I / Departamento de Matemáticas-Castellón*

C. GALINDO

[galindo@uji.es](mailto:galindo@uji.es)

*Universitat Jaume I / Departamento de Matemáticas-Castellón*

V. MARTÍNEZ

[martinez@uji.es](mailto:martinez@uji.es)

*Universitat Jaume I / Departamento de Matemáticas-Castellón*

J. MOMPARDLER

[momparle@uji.es](mailto:momparle@uji.es)

*Universitat Jaume I / Departamento de Matemáticas-Castellón*

**RESUMEN:** El turismo es una actividad económica que representa aproximadamente el 10% del PIB en España. El Grado de Turismo contiene en su primer curso una asignatura de Estadística básica que en la Universitat Jaume I realiza prácticas de laboratorio utilizando el paquete de software estadístico R. En este trabajo, mostramos como pueden realizarse prácticas de laboratorio utilizando, de modo sencillo, un software aparentemente complicado. Para ello realizamos una actividad relacionada con la titulación y de actualidad. Además, mostramos un caso práctico relacionado con el futuro desarrollo profesional del estudiante.

*Palabras claves:* Estadística, Grado en Turismo, software R.

**ABSTRACT:** Tourism is an economic activity that represents approximately 10% of GDP in Spain. The Degree of Tourism in its first course contains a course in basic statistics at the Universitat Jaume I laboratory practice using the statistical software package R. In this paper, we show how labs can be performed using, so simple, seemingly complicated software. We carry out an activity related to the degree and topical. Moreover, we show a case study related to the student's future professional development.

*Keywords:* Statistical. Degree of Tourism. R-Software.

## 1. Introducción

El turismo es una actividad económica de carácter social que busca el desarrollo de actividades que puedan generar momentos especiales para los seres humanos. En

general, los turistas pretenden visitar un lugar atractivo con el objeto de divertirse, negociar o llevar a cabo cualquier otra actividad relacionada con el ocio o la cultura.

En las últimas décadas, el turismo se ha convertido en una actividad habitual de una buena parte de los habitantes de los países industrializados y como consecuencia es una gran fuente de recursos para los países receptores de turistas. En particular en países como España, esta actividad representa una buena parte del producto interior bruto (PIB) del país. Así en el año 2010 el turismo en España alcanzó el 10,23% de su PIB. Cifras análogas pueden darse dentro de la Comunidad Valenciana (lugar dónde ejercen la docencia, los firmantes de este artículo). La actividad turística se concentra especialmente en las provincias de Alicante y Castellón, donde además del tradicional turismo de sol y playa están cobrando fuerza otras modalidades turísticas que contribuyen a generar empleo estable y a reducir la estacionalidad.

No es pues de extrañar la existencia de títulos universitarios cuyo objetivo sea formar profesionales que puedan incrementar la calidad del servicio. Por lo que respecta a España, según datos de la Estadística Universitaria en España (<https://www.ine.es>) los estudiantes matriculados en la Diplomatura de Turismo (16.364), y los matriculados en el Grado de Turismo según la administración (29.532), permiten estimar que en el curso 2010/11 había 45.896 alumnos inscritos en las titulaciones de Turismo. Además, dentro del ámbito de las Ciencias Sociales y Jurídicas los estudios de Turismo ocupaban el tercer lugar, tras Administración y Dirección de Empresas y Derecho.

Es obvio que un Graduado en Turismo debe tener la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes para poder emitir juicios que incluyan una reflexión sobre un tema relevante como éste. A modo de ejemplo, los países receptores de turismo tienen un gran interés en tener información veraz de datos económicos relacionados con el turismo, como pueden ser:

- Los movimientos de los flujos turísticos.
- El gasto promedio que produce.
- Su influencia en la balanza de pagos.
- La inversión que necesita.
- El efecto cambiario de la actividad turística de la que venimos hablando.

A nivel más reducido, cualquier operador turístico necesita también conocer datos similares a los anteriores (con la excepción del último) para que su actividad sea lucrativa y pueda obtener los beneficios esperados mediante la inversión en los lugares óptimos y la oferta de productos que se adecúen a las expectativas de los turistas. Parece pues evidente que éste es un objetivo básico para que el sector crezca y se desarrolle correctamente.

Por consiguiente será obligación de los gobiernos de los estados poner a disposición de los operadores turísticos los datos que les permitan realizar su tarea del mejor modo posible. En este sentido, existen organizaciones nacionales y supranacionales dedicadas a esta tarea. Así a nivel global, la Organización Mundial del Turismo (OMT) es reconocida por las Naciones Unidas como la organización competente para recoger, analizar, publicar, uniformar y mejorar las estadísticas de turismo. La OMT se ha ocupado de liderar iniciativas encaminadas a medir la contribución económica del turismo a las economías nacionales. Destaca entre todas ellas la Cuenta Satélite de Turismo (CST), un marco para reunir estadísticas de turismo y organizar los datos de forma coherente con las cuentas nacionales y, por lo tanto, de manera fiable y comparable en el plano internacional. En particular en 2010 se celebró el Día Mundial de la Estadística, que fue propuesto por la División de Estadística de las Naciones Unidas y proclamado por la Asamblea General de las Naciones Unidas, y tuvo por objeto sensibilizar de los numerosos logros de las estadísticas oficiales. También a nivel español está el Instituto Nacional de Estadística que ofrece, entre otra información, datos referentes a la actividad turística del Reino de España.

Por último, cabe resaltar que durante este año 2013 se está celebrando el Año Internacional de la Estadística, que tiene por objeto el reconocimiento a nivel mundial de la contribución que la Estadística ha realizado a lo largo de los años al progreso de nuestra sociedad. Los principales objetivos de Statistics2013 son:

- Incrementar el conocimiento sobre el impacto que la Estadística tiene en todos los aspectos de la sociedad.
- Promocionar la estadística como profesión, especialmente entre los jóvenes.
- Promover el desarrollo de las Ciencias Estadísticas.

Resulta ya claro a estas alturas que un estudiante de un Grado de Turismo debería poder sacar conclusiones de los datos que se le ofrecen tanto a nivel global como nacional. Esto podrá alcanzarse a través de un conocimiento de los procedimientos y métodos de la Estadística y de la capacidad de entender los grandes números estadísticos que se le pone a su alcance. Así, de poco le servirá entender con razonable profundidad el significado de los diferentes valores y coeficientes numéricos que ofrece la Estadística si no es capaz de tener en sus manos datos fiables para interpretarlos y, recíprocamente, si es capaz de recolectar esos datos e incluso de obtener los valores estadísticos más interesantes pero no es capaz de interpretarlos, tampoco se habrá logrado el objetivo.

En este artículo se pretende explicar cómo se enseña el doble proceso, antes mencionado, a los alumnos de la asignatura *Introducción a la Estadística* (TU0907) del Grado en Turismo de la Universitat Jaume I de Castellón.

## **2. La asignatura Introducción a la Estadística**

Esta es una asignatura de 6 créditos que se imparte en el segundo semestre del primer curso de los futuros Graduados en Turismo. En ella, y según su guía docente, se pretende que el estudiante sepa identificar la necesidad de información estadística que requiere el sector turístico, así como manejar las fuentes estadísticas existentes. Además el alumno también debería ser capaz de analizar, sintetizar y resumir la información estadística mencionada. Aún más, se le pide que sobre ello sea capaz de elaborar y presentar un informe de los resultados obtenidos.

Una lectura detallada de lo anterior, deja bien claro que existe un fuerte desajuste entre los objetivos de la asignatura y el muy escaso tiempo para su desarrollo en el aula. Si acudimos de nuevo a la guía docente, nos encontramos con los siguientes contenidos:

- Descripción de muestras de datos univariantes.
- Descripción de muestras de datos bivariantes.
- Descripción de series de datos temporales.
- Números índices.
- Probabilidad.
- Variable aleatoria.
- Modelos probabilistas de variable aleatoria.
- Inferencia Estadística.

Su desarrollo en cierta profundidad claramente requiere mucho más de 6 créditos. Al final de este artículo aparecen como referencias aquellos textos que se sugiere a los alumnos para seguir la asignatura [1,2,3,4]. No obstante la referencia esencial es [1]. En todos se refleja el objetivo primordial que pretendemos mostrar en este artículo. Se trata de enseñar a los estudiantes a extraer de las fuentes públicas o privadas de que dispongan los datos que necesiten y luego hacer un análisis de ellos. En nuestra opinión es mejor que dominen los cálculos estadísticos sencillos y sepan interpretarlos correctamente. Sabiendo que cuando la magnitud del problema sea muy alta o la interpretación menos clara convendrá acudir a expertos en Estadística que puedan aconsejarle con las muchas y sofisticadas herramientas que se conocen en la actualidad. Con respecto a éstas, al menos el futuro graduado debería saber que existen.

### 3. La herramienta informática: el programa R

R es un lenguaje y un entorno de programación para análisis de datos y gráficos estadísticos. Es un proyecto GNU y se ha desarrollado en los Laboratorios Bell (antes AT&T, ahora Lucent Technologies) por John Chambers principalmente. R ofrece una gran variedad de datos relacionados con la Estadística. Trabaja con modelos lineales y no lineales, realiza tests estadísticos clásicos, análisis de series temporales, clasificación, clustering y un largo etcétera. También trata con técnicas gráficas. Este lenguaje es muy utilizado en el campo estadístico en general y tiene la ventaja de usar código abierto. Puesto que es de uso común por parte de la comunidad universitaria internacional, R recibe mejoras, e implementaciones de las últimas novedades, de modo constante.

Uno de los puntos fuertes de R es que permite producir informes de calidad en los que se puede incluir símbolos y fórmulas matemáticas. Así, si queremos elaborar un documento dinámico o programable que combine texto y resultados estadísticos, tanto numéricos como gráficos, la mejor opción es utilizar LaTeX y R. Con ello, se obtiene un documento con extensión .tex, que contiene el texto original y los resultados, cálculos y gráficos demandados por el código R insertado. Posteriormente, el archivo .tex se procesará como es habitual en LaTeX para obtener el documento definitivo: .ps, .pdf, etc.

Algo importante para nosotros, por la facilidad que da al alumno en su acceso y uso, es que R está disponible como software libre. Se compila y ejecuta en una amplia variedad de plataformas UNIX y sistemas similares (incluyendo FreeBSD y Linux), Windows y MacOS.

Siendo un poco más explícitos, R es un conjunto integrado de servicios de software para la manipulación de datos, cálculo y representación gráfica. En particular, R incluye:

- Datos: un manejo eficaz y cómodo de datos y almacenamiento.
- Análisis de datos: una amplia colección de herramientas para el análisis de datos.
- Matrices: un conjunto de operadores para los cálculos de estructuras ordenadas, en particular de matrices.
- Gráficos: la posibilidad de obtener gráficos tanto en pantalla como en papel para la interpretación de los datos recibidos.
- Programación: un lenguaje de programación simple y eficaz para desarrollar los cálculos necesarios.

Finalmente, R permite a los usuarios añadir nuevos recursos adicionales mediante la adición de nuevas funciones. Para las tareas computacionalmente intensivas, puede vincularse a C, C++ y Fortran acortando el tiempo de ejecución. Los usuarios

avanzados pueden escribir código C para manipular objetos de investigación directamente. Además R se puede extender a través de paquetes. Hay alrededor de ocho paquetes suministrados con la distribución de R y muchos más están disponibles a través de la familia CRAN de sitios de Internet que cubren una gama muy amplia de la Estadística moderna.

## 4. La práctica concreta propuesta: Introducción a la Estadística Descriptiva y al R

### 4.1. La web del INE

Para empezar la práctica, lo primero que se pide al estudiante es que ingrese en Internet y luego a la página web del INE: <http://www.ine.es/>. En ella se accede a algunos contenidos: primero *INEbase*, luego *Servicios* y, finalmente, *Hostelería y Turismo*. En la figura 1 se observa el aspecto de la página.

A continuación observamos que se dispone de los *datos de las Consejerías de Turismo* de cada Comunidad Autónoma. Pasamos pues, por ejemplo, a seleccionar el *año 2008*. Y luego *las plazas estimadas por categoría y meses*. En la figura 2 se pueden observar estos datos.

Operaciones estadísticas relacionadas			Elaboradas por otros organismos			Publicaciones		
Elaboradas por el INE			Elaboradas por otros organismos			Enlaces de interés		
Tablas INEbase	Contenido		Tablas INEbase	Contenido		Este tema en el IOE		
<input type="checkbox"/>	Encuesta de ocupación hotelera	<a href="#">[i]</a>	<input type="checkbox"/>	Turismo receptor	<a href="#">[i]</a>	Legislación estadística de la UE		
<input type="checkbox"/>	Encuesta de ocupación en campings	<a href="#">[i]</a>	<input type="checkbox"/>	Turismo nacional	<a href="#">[i]</a>			
<input type="checkbox"/>	Encuesta de ocupación en apartamentos turísticos	<a href="#">[i]</a>	<input type="checkbox"/>	Ingresos y pagos por turismo	<a href="#">[i]</a>			
<input type="checkbox"/>	Encuesta de ocupación en alojamientos de turismo rural	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Índice de precios hoteleros	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Índice de precios de campings	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Índice de precios de apartamentos turísticos	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Índice de precios de alojamientos de turismo rural	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Indicadores de Rentabilidad del Sector Hotelero	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Encuesta anual de servicios	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Estadística de productos en el sector servicios	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Encuesta sobre la estructura de las empresas hoteleras 1996	<a href="#">[i]</a>						
<input type="checkbox"/>	Encuesta sobre la estructura de empresas de agencias de viajes 1997	<a href="#">[i]</a>						

Figura 1. Aspecto de la web del INE con datos de hostelería y turismo

El siguiente paso es guardar los datos en formato Excel y salir de la página. Los usuarios del sistema operativo *MacOS* deben guardar los datos en formato de texto, ya que R con este sistema no puede leer datos desde Excel.

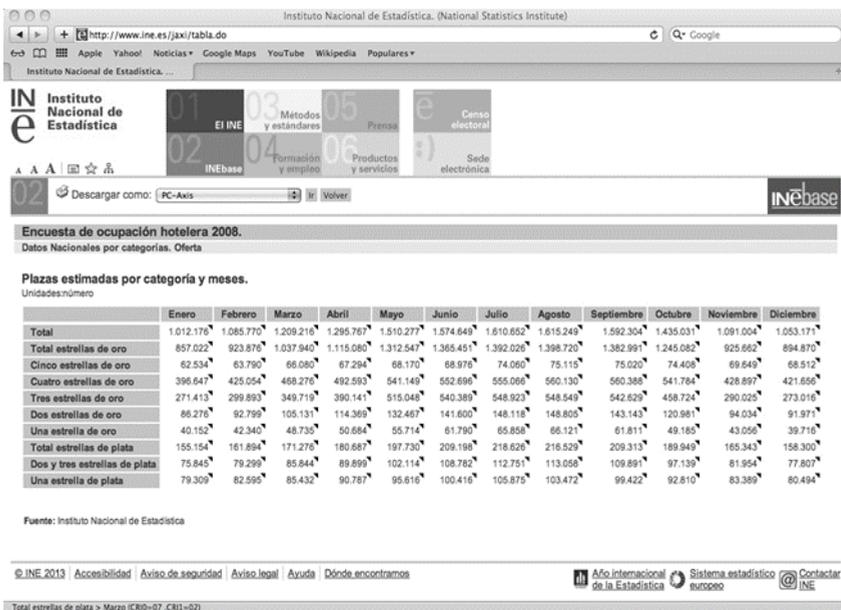


Figura 2. Datos de ocupación hotelera del año 2008 (web INE)

#### 4.2. El paquete R Commander

Nuestra etapa siguiente consistirá en el uso de programa de software R y, en particular, trabajar con el paquete *R Commander* que utiliza ventanas. Consecuentemente cargamos este paquete *Rcmdr*. Mostramos en la figura 3 una imagen de lo que nos debe aparecer.

A partir de ahora, ya podemos trabajar con ventanas. Importamos los datos desde Excel, seleccionando primero *Datos*, para posteriormente acceder a *Importar datos desde Excel* o desde formato de texto si usamos el sistema *MacOS* (en la figura 4 se observa como deben estar cargados los datos para que R los entienda). A partir de aquí, podemos realizar cálculos estadísticos sencillos de la gran cantidad de datos reales que hemos obtenido utilizando, simplemente y de modo sucesivo, las pestañas *Estadísticos*, *Resúmenes* y *Resúmenes numéricos*. La figura 5 muestra lo que debemos ver en la pantalla de nuestro ordenador. En consecuencia, podemos calcular datos estadísticos como: medias, desviaciones, coeficientes de variación, cuartiles, etc. Y lo que es más importante, podemos dedicar nuestro tiempo a interpretar estos datos más que al puro cálculo de los mismos. Para que los estudiantes practiquen por sí mismos, mostramos un ejemplo utilizando los hoteles de 3 estrellas y luego les pedimos a los estudiantes que repitan el proceso de datos.

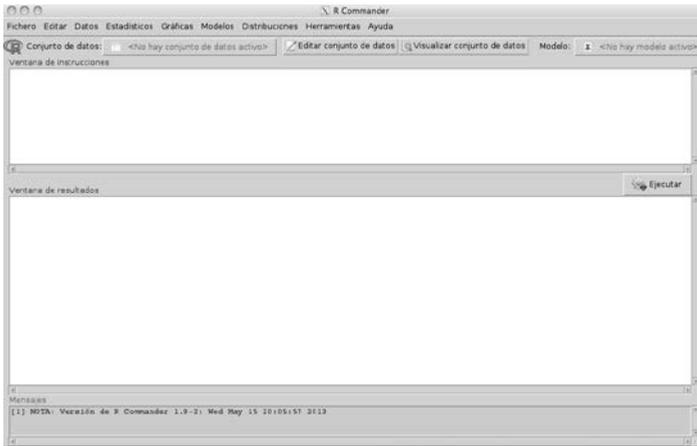


Figura 3. Aspecto del paquete R. Commander

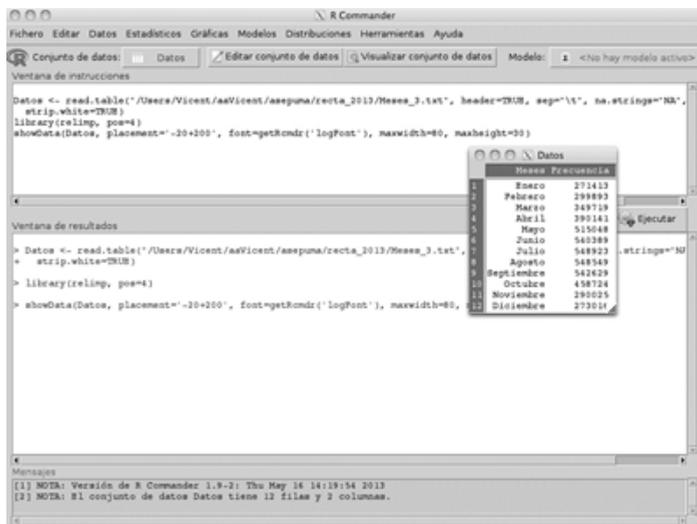
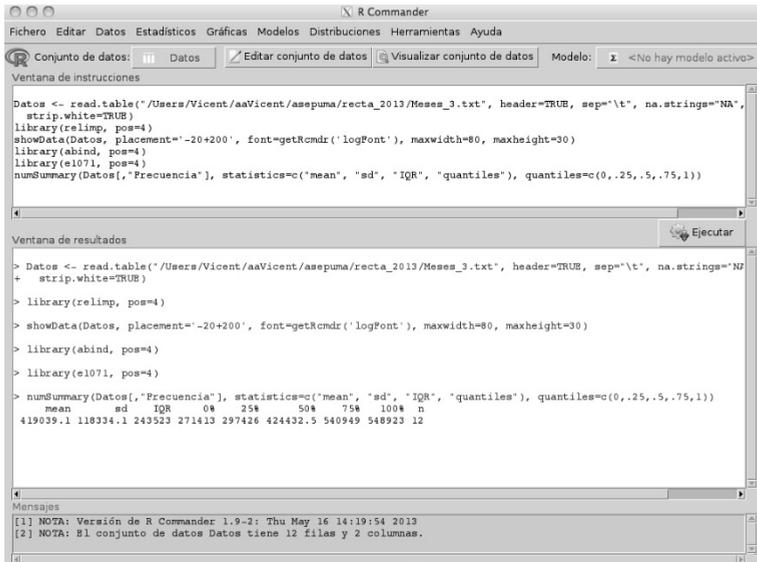


Figura 4. Aspecto de la visualización de datos en R. Commander



The screenshot shows the R Commander interface with the 'Ventana de resultados' (Results Window) active. It displays the execution of several R commands and their output. The commands include reading a table, loading libraries (relimp, abind, e1071), showing data, and calculating summary statistics. The output shows the mean, standard deviation (sd), Interquartile Range (IQR), and quantiles for the 'Frecuencia' variable across 12 categories.

```

> Datos <- read.table("/Users/Vicent/aaVicent/asepuma/recta_2013/Meses_3.txt", header=TRUE, sep="\t", na.strings="NA",
+ strip.white=TRUE)
> library(relimp, pos=4)
> showData(Datos, placement="-20+200", font=getRcmdr('logFont'), maxwidth=80, maxheight=30)
> library(abind, pos=4)
> library(e1071, pos=4)
> numSummary(Datos[, "Frecuencia"], statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles"), quantiles=c(0.25, .5, .75, 1))
  mean      sd      IQR      0%      25%      50%      75%     100%  n
419639.1 118334.1 243523 271413 297426 424432.5 540949 548923 12

```

Figura 5. Estadísticos que muestra R. Commander

### 4.3. Los gráficos

Una ventaja del programa R es la facilidad que nos ofrece a la hora de obtener gráficos para interpretar los datos de una manera más cómoda. Para ello, tenemos que darle a R los datos para que pueda trabajar con ellos. Ponemos en la ventana de instrucciones de *R Commander* las expresiones siguientes:

```
Meses<-rep(Datos$Meses,Datos$Frecuencia)
```

```
Datos2<-data.frame(Meses).
```

Con esto obtenemos un nuevo conjunto de datos: *Datos2*. Anteriormente el conjunto de datos *Datos* tenía 12 filas y 12 columnas, mientras que ahora el conjunto de datos *Datos2* tiene 5119553 filas y 1 columna. Este formato de datos es el óptimo para conseguir que R los maneje. Ahora R está preparado para obtener gráficos. Para representar un histograma, procederemos de la manera siguiente: seleccionar *Gráficas* y luego *Diagrama de barras* obteniendo así el histograma que se muestra en la figura 6. Observamos que la variable *Meses* se encuentra en orden alfabético, más tarde indicaremos como se puede obtener el orden cronológico.

Análogamente se podría obtener el diagrama de sectores que se muestra en la figura 7, actuando como sigue: seleccionar *Gráficas* y luego *Diagrama de sectores*.

Finalmente, en la figura 8 se representa la ocupación hotelera por meses ordenados cronológicamente. Para ello hemos procedido así: en primer lugar, hemos reorganizado los datos (*Modificar variables del conjunto de datos activo* y *Reordenar niveles de factor*) y definido así una nueva variable *Meses\_ord*, que habrá aparecido en el desplegable de *Modificar variables del conjunto de datos activo*; y, en segundo lugar, procediendo como anteriormente (*Gráficas* y luego *Diagrama de barras*) pero con la nueva variable *Meses\_ord*.

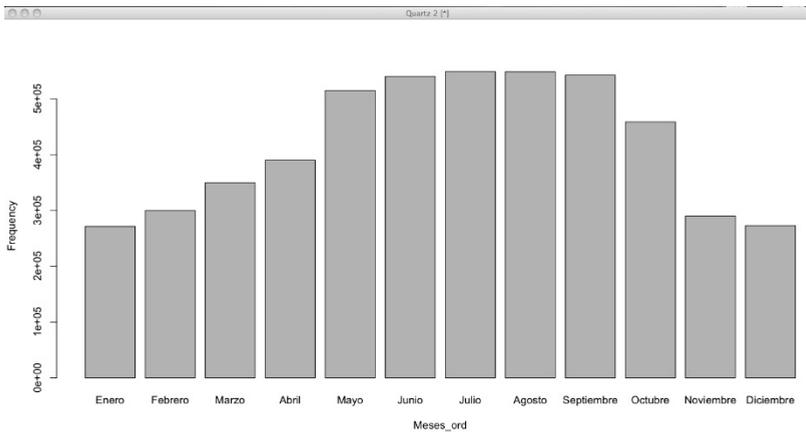


Figura 6. Histograma representando la ocupación hotelera por meses

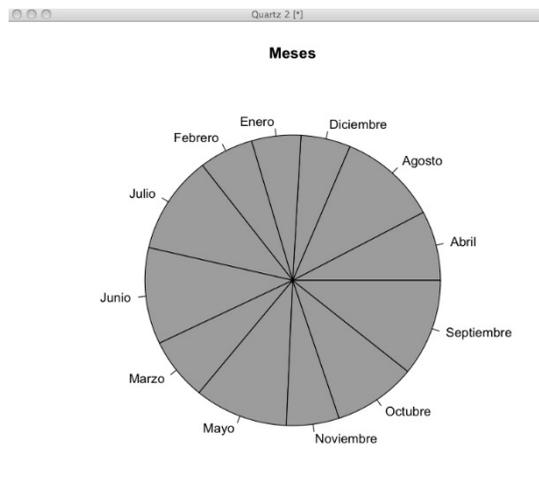


Figura 7. Diagrama de sectores mostrando la ocupación hotelera por meses

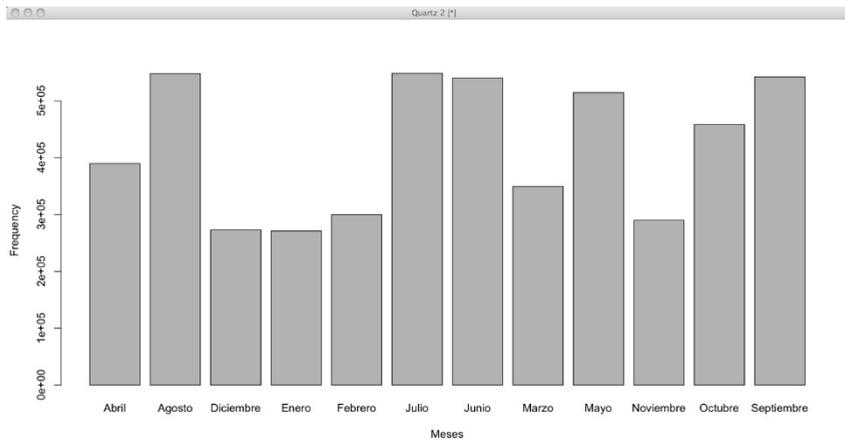


Figura 8. Histograma de ocupación hotelera por meses ordenados cronológicamente

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado, a modo de ejemplo, una de las prácticas que desarrollamos en la asignatura Estadística del grado de Turismo de la Universitat Jaume I de Castellón. El conjunto de estas prácticas utiliza como software el paquete R cuyas ventajas hemos comentado en secciones anteriores. Los aspectos de mejora que hemos introducido, a partir del curso 2010/11, han sido fundamentalmente los siguientes:

- Obtención y manejo de datos, disponibles en fuentes oficiales, y por tanto fiables y útiles en su ámbito profesional.
- Desarrollo de problemas fuertemente relacionados con la titulación.
- Participación en proyectos reales a los cuales tendrán que enfrentarse en su futura vida profesional.

El resultado de este cambio metodológico ha sido muy positivo. La satisfacción de los alumnos se refleja en la valoración del profesorado, la cual ha aumentado en un 18.4%, según la encuesta de evaluación del profesorado. Además, como se deduce de los datos suministrados en la Tabla 1; el número de alumnos que se presenta a las pruebas ha aumentado en 10 puntos porcentuales y lo mismo ocurre con el rendimiento académico de los mismos, cuyo porcentaje de aprobados aumenta en 11 puntos. Por tanto, el rendimiento y el interés de los alumnos en la asignatura ha aumentado considerablemente con la metodología indicada.

Tabla 1. Rendimiento de los alumnos

Resultados de evaluación en porcentajes					
		Aprobados	Suspensos	No presentados	Totales
Curso	2009/10	50.68	15.07	34.25	100
	2010/11	61.63	15.12	23.25	100
	2011/12	61.98	15.71	22.31	100

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Unitat Support Educatiu, Universitat Jaume I, proyecto no.10G136-334.

### Referencias Bibliográficas

1. J. Alegre, M. Cladera, C. Juaneda. *Análisi quantitativa de l'activitat turística* (Piramide, 2003).
2. C. Fernández. Instruccions d'estadística descriptiva aplicada al sector turístic (Síntesi, 2004).
3. J. M. Raya. *Estadística aplicada al turismo* (Pearson 2004).
4. A. Ronquillo. *Estadística aplicada al sector turistic*. (Centro de estudios Ramón Areces, 1997).
5. <http://www.ine.es/inebmenu/mnu\ hosteleria.htm>
6. <http://www.iet.tourspain.es/paginas/PubFrontur.aspx\ ?\option=front\&idioma=es-ES>
7. <http://unwto.org/es>
8. <http://www.comunidad-valenciana.org/opencms/opencms/turisme\es/index.jsp>
9. <http://www.educacion.gob.es/educabase>

## **GIS'F FRACTAL ANALYSIS WITH PIVOTING GRAPHIC**

**MARÍA- RAMOS ESCAMILLA**

[maria\\_ramos@my.unitec.edu.mx](mailto:maria_ramos@my.unitec.edu.mx)

*Universidad Tecnológica de México/Departamento de Posgrado  
Calz Ermita Iztapalapa 557 Granjas Esmeralda, Iztapalapa, 09810 Ciudad de México,*

**OSCAR -RENE VARGAS**

[rene\\_javier60@hotmail.com](mailto:rene_javier60@hotmail.com)

*Universidad de Santiago de Compostela/Departamento de Economía del Desarrollo  
Avda. do Burgo, s/n. Campus Norte, 15782 Santiago de Compostela*

**RESUMEN:** En este trabajo se presentan las estaciones de modelado precios geométricos fractales de Capital Markets en París, Frankfurt, Londres, Tokio, Nueva York y México, nuestro objetivo es lograr una mayor rentabilidad de las inversiones realizadas en el tiempo Ex Ante y que sirvan de referencia en tiempo iterativos Ex post, para ello utiliza la metodología de los sistemas de información geográfica y la aplicación de análisis fractal GIS'F de recurrencia vía armónica, series de Fourier, a diferencia de términos, esfera tridimensional y los campos de difracción de Fresnel de la acción del mercado para su compra y funciones de venta .

*Palabras clave:* Fractal, difracción, el costo, el margen; inversión de títulos.

**ABSTRACT:** In this paper we present geometric modeling fractal stations prices of Capital Markets in Paris, Frankfurt, London, Tokyo, New York and Mexico, our goal is to achieve a better return on investments made in time Ex Ante and to serve as references in time iterative Ex Post, for this we use the methodology of geographic information systems and implement GIS'F fractal analysis of recurrence via Harmonic, Fourier series, Unlike terms, Three-dimensional sphere and Fresnel diffraction fields of action of the market for their buying and selling functions.

*Keywords:* Fractal; diffraction; cost; margin; inversion de titles.

## 1. Introduction.

Fractal analysis is related to chaos theory because it recognizes that not all models studied are linear, as in the case of the models used to analyze financial markets. This is one of the advantages to work with Fractals applied to the financial economy; we can work with broken trends without harmony in market risks, so sticks closer to reality. The assumptions of the fractal-dimensional method, are modeled through 50 sine and cosine functions with logarithms maximum price ranges and minimum price range 100,000 times in three-dimensional scales and fourth (includes Joint leakage points), demonstrating a advantage over the use of quantitative method in which the two elements are bagged study the average Julia set's financial growth in order. Overall we can say that in times of economic boom movement intensifies, the number of participants increases, the money is readily available, the investment is made quickly, allowing growth profitability, companies are capitalized and their instruments tend to rise in price. It also suggests that when markets are efficient, adjustment to the information has to be instantaneous, hence in an efficient market can verify the relevance of information noting whether prices adjust after publication. A discrete dynamical system is a pair  $(x, f)$  where  $x$  is a field and  $f : X \rightarrow X$ . Given a point  $x \in X$ , set  $\{x, f^1(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \dots\}$  will be called the orbit of  $X$ , where  $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$ , therefore consider the classification of fixed points according to their properties in a complex dynamic system  $(C, f)$ , are as follows:

$$z_0 \in C, z_0 \text{ itself is a point attractor } |f'(z_0)| < 1 \quad (1)$$

$$z_0 \in C, z_0 \text{ itself is a repulsor point } |f'(z_0)| > 1 \quad (2)$$

$$z_0 \in C, z_0 \text{ itself is an indifferent point } |f'(z_0)| = 1 \quad (3)$$

$$z_0 \in C, z_0 \text{ is a super point attractor itself } |f'(z_0)| = 0 \quad (4)$$

The dimension<sup>1</sup> is then a quantitative measurement of the fractal properties of self similarity.

---

<sup>1</sup> Is sometimes used with respect to analytical processes have been divided into two parts. One dimension of cash flows could result in the separation of payment of mortgage interest and principal cash flows and direct these to different investors.

### 1.1. Fractal Replication of Market Prices.

The topology of the complex plane<sup>2</sup> can be designed through the equivalence set of Riemann between the sphere and the complex plane, ie the projection of the points of the radio unit sphere with center  $N$ , tangent to the complex plane on it, following a bijection. From the geometric point of view, complex numbers can be identified with the Cartesian plane points by matching the complex  $Z = a + bi$  point  $(a, b)$ , as shown below:

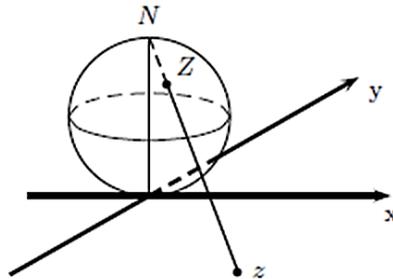


Figure 1: Riemann Sphere.

*Complex numbers can be identified with the points of the Cartesian plane by matching the complex point.*

There are different fractal dimensions, the simplest is the dimension of similarity Auto:  $d = \text{Log}(N) / \text{Log}(M) \rightarrow Md = N$ ; where  $M$  is the number of parts in which the object will be divided,  $d$  is the dimension of the object and  $N$  the number of resulting parts. Is used only in case the object is geometrically similar car, so that the resulting pieces are self-similar to the original object. In the case of a segment divided into three equal parts ;  $d=1, M=3 \rightarrow N=3$ , an area divided into three parts each side ;  $d=2, M=3 \rightarrow N=9$  and a bucket <sup>3</sup>, dividing each side into three parts;  $d=3, M=3 \rightarrow N=27$ .

<sup>2</sup> In a space of a single dimension (as a line), a hyperplane is one point divides a line into two lines. In a two-dimensional space (such as the  $xy$  plane), a hyperplane is a line, divides the plane into two halves. In three dimensional space, a hyperplane is a plane current, divided the space into two halves. This concept may be applied to four-dimensional space and where these objects are simply called splitters hyperplanes, since the purpose of this nomenclature is to link with the plane geometry.

<sup>3</sup> A cube, and is a hexahedron, may also be classified as a parallelepiped rectangle straight because all sides are parallel sides and four pairs, and even as a prism with a square base and height equal to the side of the base.

The capacity dimension allows evaluation of the dimension of geometrically irregular objects. Instead of having similar auto parts resulting (N) will count the number of circles  $N(r)$ ; where the dimension of capacity is the value of  $\text{Log } N(r) / \text{Log } (1/r)$  when  $r$  tends to  $0^4$ . Topological dimension <sup>5</sup> describes the way in which the points of an object are connected to each other. Indicates whether the object is an edge, or a solid surface and its value is always an integer. There are several ways to determine it: i) Size of Coverage: calculate the smallest number of sets needed to cover the object, which may overlap. If each object point is covered by no more than  $G$  sets then the dimension of coverage is  $d = G-1$  ii) Dimension Iterative: Based on the edges of the  $D$ -dimensional space has dimension  $d-1$  as well, all three-dimensional volume can be surrounded by two-dimensional planes. Is calculated by looking for the edges of the edges up to the dimension 0 (*point*). The number of times on the operation ( $H$ ) equals the dimension  $d = H$ .

Finally Underlying Dimension <sup>6</sup> (*embedding*): describes the space containing the fractal object. Indicates whether a line, area or volume. Its value can be an integer or a fraction and it is difficult to identify the appropriate underlying dimension. A Mandelbrot set is built according to the iterative process on a complex dynamic system with  $Z_0 = 0$  and the complex constant  $c$  such that  $\{f^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  is bounded, this follows another complex constant  $|c| < 2$ , otherwise  $c \notin M$  and orbit  $z_0 = 0$  diverges. Note that the point  $Z_0 = 0$  with  $c \in M$  and  $f_c(z) = z^2 + c$ , converted to  $Z_0$  at one point to super attractor, as  $|f'_c(0)| = |2(0)| = 0$ , iterations to construct  $M$  are expressed as:

$$f^1(0) = c, f^2(0) = c^2 + c \text{ with } n = 1, 2, \dots; z_0 = 0 \ \& \ c = |c| < 2 \quad (5)$$

Most of the pictures of the Mandelbrot set usually appear colored depending on the speed <sup>7</sup> with each point converges to infinity, these points can be plotted according to the algorithm called "Escape time algorithm," presented below: For each point  $c$ , calculate its orbit, iterating  $f_c(0)$  a number  $n \infty 100$  times, if it remains bounded by the circle centered at the origin of radius 2, then we can reasonably assume that is

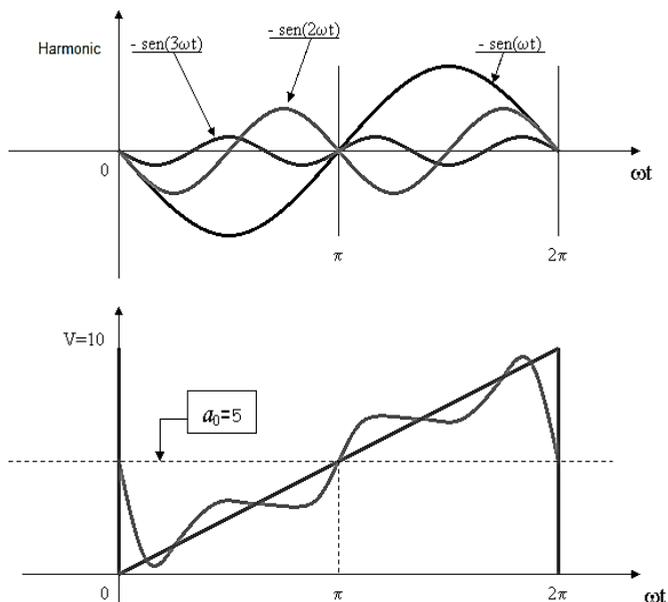
---

<sup>4</sup> Marrero, J.C. Symplectic geometry and science (2002). A walk through the geometry. Department of Mathematics, University of Ohio .Pp.183.

<sup>5</sup> He is interested in concepts such as proximity, number of holes, the kind of consistency (or texture) having an object, compare and classify objects and also other attributes.

<sup>6</sup> It's invisible can not go in a certain factor, plus it has a monotonous process and is not completely finished it may happen that a function is not continuous throughout its domain of definition. If a function is continuous at one point, he said that the function has a discontinuity at that point and that the function is discontinuous.

<sup>7</sup> Speed is a physical quantity expressing vector nature of an object displacement per unit time. She is represented by  $v$ . His unit in the International System is the  $m / s$ . By its vector character, to set the speed to be considered the direction of travel and the module, which is called speed or quickness.



within  $M$  ; if for some iteration  $k < n$  "Escapes" from this circle, it is decided that does not belong to  $M$  and stops for the iteration  $n + 1$ , namely,  $f_c^{n+1}(0)$ . If each number  $0 < k < n$  is assigned a color, and representing each  $C$  by Color  $k$  , for which the orbit  $C$  diverges, we get the beautiful designs that characterize the Mandelbrot sets. For there to be an aperiodic signal in prices can be represented by a harmonic series or Fourier, must respect the Dirichlet conditions:

- Having a finite number of discontinuities in the period  $T$ , in case of discontinuous.
- The average value in the period  $T$ , is finite.
- Have a finite number of positive and negative peaks.

For the case  $p=0$ , we have nothing but the geometric series evaluated  $\frac{1}{2}$ . To  $p > 0$ , what we have is the leading term of the derivative and of this, evaluated at that point.

Figure 2: Playing with Breasts price signals.

To find the sum, we derive  $p$  times to  $1 / (1-z)$ , isolate the leading term so that only depends on series of the same type with lower order powers  $p$  and then evaluate at  $z =$

1/2, the analysis Fourier synthesis is called recombination of trigonometric series terms to reproduce the original signal (in our case the volatility of the price of the shares issued).

Since this signal has discontinuities, the series does not converge quickly. It is verified that with increasing the number of terms in the series, the final wave irregularities decreases and approaches the original signal.

And note that in the interval where the signal is continuous, the wave of the series converges, with some imperfections, the original signal, and places of discontinuities, the wave converges to the mean value or market stability, the series Fourier is as follows:

$$f(x) = 2/\pi (\sin x + 1/2 \sin 2x + 1/3 \sin 3x + 1/4 \sin 4x + 1/5 \sin 5x + \dots + 1/n \sin nx) \quad (6)$$

As in the above description, when determining the components of a vector<sup>8</sup>, we can determine the coefficients  $C_n$  by the inner product. Multiplying the above equation by  $\phi_{m\omega(x)}$ , integrating in the interval  $[a, b]$  Rates of Ex Post and Ex Ante, we obtain:

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x)\phi_n(x)dx \\ = c_0 \int_{-p}^p \phi_0(x)dx + c_1 \int_{-p}^p \phi_1(x)\phi_m(x)dx + \dots \\ + c_n \int_{-p}^p \phi_n(x)\phi_m(x)dx + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Because of the orthogonality, each term of the right side of the last equation is zero except when  $m=n$ . In this case we:

$$\int_{-p}^p f(x)\phi_n(x)dx = c_n \int_{-p}^p \phi_n^2(x)dx \quad (8)$$

Then the coefficients of prices that we seek are the ranges and divide by the number of companies that have:

$$C_n = \frac{\int_{-p}^p f(x)\phi_n(x)dx}{\int_{-p}^p \phi_n^2(x)dx} \quad (9)$$

<sup>8</sup> A vector field is a construction of vector calculus which associates a vector to each point in Euclidean space.

The coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots$  can be determined as described for the generalized Fourier series and integrating both sides, from  $-p$  (cost) to  $p$  (margin), we obtain:

$$\int_{-p}^p f(x) dx \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\omega} (a_n \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi}{p} x dx + b_n \int_{-p}^p \sin \frac{n\pi}{p} x dx) \tag{10}$$

$n > 1$ , is orthogonal to 1 in the range, the right side is reduced to a single term, and therefore:

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} \times \int_{-p}^p 1 = pa_0 \tag{11}$$

Solving  $a_0$  is obtained:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx \tag{12}$$

Now multiply by  $\cos (m\pi x / p)$  and integrate all ranges of stock prices:

$$\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{m\pi}{p} x dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x dx + \sum_{n=1}^{\omega} (a_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx + b_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx) \tag{13}$$

In a similar way when  $f$  is odd in the range  $(-p,p)$ ,

$$n = 0, n=0,1,2,\dots, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n}{p} x dx \tag{14}$$

Considering all the sines and cosines of the behavior of stocks we will mention, its general form for the function:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\omega} [a_n \frac{e^{j.n \omega.t} + e^{-j.n \omega.t}}{2} + b_n \frac{e^{j.n \omega.t} - e^{-j.n \omega.t}}{2j}] \tag{15}$$

We are using on how to form a Fourier series expansion in very simplified:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\omega} [a_n \frac{e^{j.n \omega.t}}{2} + a_n \frac{e^{j.n \omega.t}}{2} + b_n \frac{e^{j.n \omega.t}}{2j} -$$

$$b_n \frac{e^{j.n.\omega.t}}{2^j} \quad (16)$$

If the Fourier series converges to:  $f(x)$  for each point  $x$  where  $f$  is differentiable<sup>9</sup>, and  $b$  have to cost ratio (*negative*) and the function of range (*positive*):

$$f(t) = (a_0)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n [e^{j.n.\omega.t} + (a_n/2 + b_n/(2^j)) + e^{-j.n.\omega.t} + (a_n/2 - b_n/(2^j))] \quad (17)$$

We have seen therefore that the sum of multiple frequencies in the stock price are harmonically related so it gives rise to a periodic waveform having a more or less complex operation is called harmonic synthesis (Ex post or Ex ante). Conversely, a newspaper Price Range complex shape can be decomposed into several sinusoidal vibrations that are harmonically related, operation is called harmonic analysis in the Stock Market.

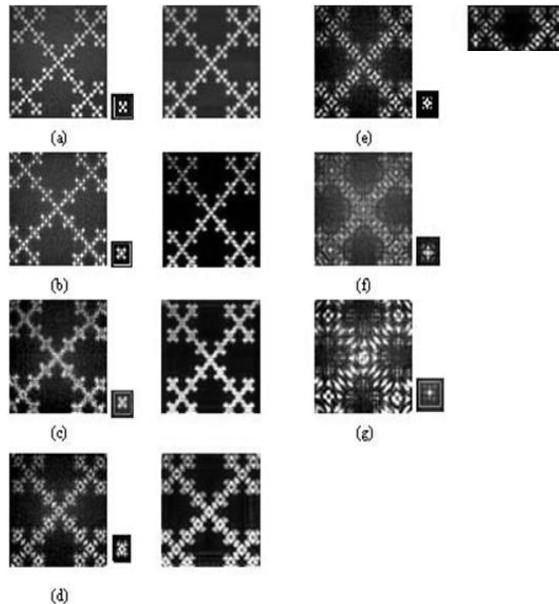


Figure 3: Sequence of the numerical propagation of a Fresnel regime.

*The blade of the store and the logistic map produced some interesting patterns as the flashing if clearly by this method (as in the photo on the left), and excluded combinations can be detected, although more work than driven IFS. IFS and Kelly plots complement each other well with Fresnel regimes.*

<sup>9</sup> Differentiable structure is given by a maximal atlas (an atlas is a collection of cards differentiable coordinate changes). Each atlas is contained in a single maximal atlas. It is said that two maximal atlas  $A$  and  $A_0$  on the same variety  $M$  differentiable structures defined equivalent if there exists a diffeomorphism between  $(M;A)$  and  $(M;A_0)$ .

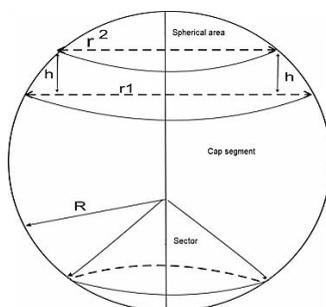
Meanwhile, some long-range correlations may be more easily seen. Furthermore, this method has more flexibility in the number of containers allocated to data. Powered

The evolution of the diffraction patterns produced by a letter Fractal ( $n=4$ ) together with corresponding to the generator (*level fractal  $n=1$* ), have been obtained on the stock exchanges for the same distances  $z$  (*Ranges*), and conclude that at small distances we can reconstruct the image of fractal pivot 1-4 placing the generator providing the different positions of the initial plane.

Since what is observed is the total diffracted intensity, the phase information is not observable, and therefore can not identify the evolution of the generator with that of the entire structure, for these particular distances between the price and Ex Ante Ex Post, this indicates it is not always possible to reveal the fractal properties based only on measurements of the intensity distribution of Share Prices<sup>10</sup>.

## 2. Aperiodicity of flashing on the economy hypersphere global financial.

An ordinary sphere, or two-dimensional sphere consists of all points equidistant from a given point in ordinary three-dimensional Euclidean space,  $R^3$ . A three-dimensional sphere consists of all points equidistant from a given point in  $R^4$  (*chaos theory*)<sup>11</sup>. While a two-dimensional sphere is a surface "soft" two dimensions, entirely analogous manner, it is possible to define areas of a higher number of dimensions, called hyperspheres or n-spheres. These objects are n-dimensional varieties and three-dimensional volumen (*or hiperárea*) of a hypersphere of radius  $r$ , while the four-dimensional hypervolume (The volume of the region 4 bounded by the hypersphere dimensions). The nontrivial homology groups of the hypersphere are:  $H_0(S^3, Z)$  y  $H_3(S^3, Z)$  are both infinite cyclic, while  $H_i(S^3, Z) = \{0\}$  for all other index  $i$ .



<sup>10</sup> The distance between two points in Euclidean space is equal to the length of the segment of straight line, expressed numerically. In more complex areas, as defined in non-Euclidean geometry, the "shortest path" between two points is a curve segment.

<sup>11</sup> It is the popular name for the branch of mathematics and physics to treat certain types of unpredictable behavior of dynamic systems.

Figure 4: Three-dimensional Sphere Capital Markets.

*Homotopy groups larger ( $k \geq 4$ ) are all finite (indicators investment margins), but also it does not follow any discernible pattern. Apparently nothing is as simple as the unit sphere in three dimensional space.*

Where:

V= Operating volume.

S= Size of Market (Participation or Cognitive).

L= Size Range in Rates.

$\pi= 3.141592$

h= Maximum Price

r= Minimum Price

The fact that they can identify and R3n R2n spaces results in the odd-dimensional spheres have a fractal geometry that of even dimension. To clarify in what sense geometry is self-similar or related to another we must first introduce some concepts. The Kahler manifolds are the richest among them <sup>12</sup>.

Table 1: Volume and Radius of a Sphere with boundedness of S1 to Sn.

<b>Sphere <math>S_{n-1} \subset R_n</math></b>	<b>Volume</b>	<b>Radio=1</b>	<b>Volume Side</b>
$S_1 \subset R_2$	$(\pi)r^2$	3,1415	$2(\pi)r$
$S_2 \subset R_3$	$4/3(\pi)r^3$	4,1887	$4(\pi)r^2$
$S_3 \subset R_4$	$1/2(\pi)r^4$	4,9348	$2(\pi)2r^3$
$S_4 \subset R_5$	$8/15(\pi)2r^5$	5,2637	$8/3(\pi)2r^4$
$S_5 \subset R_6$	$1/16(\pi)3r^6$	5,1677	$(\pi)3r^5$
$S_6 \subset R_7$	$16/105(\pi)3r^7$	4,7247	$16/15(\pi)3r^6$

*For a circle (filled) of radius r see: P = Perimeter =  $2 \cdot \pi \cdot r$ , A = Area =  $\pi \cdot r^2$ , so that*

<sup>12</sup> The definition of Kahler variety is as follows: it is an almost-complex endowed with a Riemannian metric g such that  $g(J(X); J(Y)) = g(X; Y)$ , for any vector fields X and Y, and so  $rJ = 0$ , be r Levy connection and then said g is a metric seal. The geometric meaning of Kahler manifolds is that the parallel transport associated with the connection of Levy commutes with the action of the almost-complex structure.

$P = 2 \cdot (\sqrt{\pi}) \cdot A^{1/2}$ . Both the square and the circle have perimeters that are 1-dimensional, so that these relationships between area and perimeter.

When the angles of intersection of the circles are rational multiple 180 degrees (average market value), imposing certain relations between investments consequently establish balance in the Operating Volume of shares.

For example, it is difficult to demonstrate  $C_1$  y  $C_2$  intersect at an angle of  $(F/N) 180$ ,  $0 < m < n$ ,  $(I_1 I_2)^n = \text{Identity of a Circle Fractal}$ . To represent the three-dimensional sphere as a topological space and imagine that we can understand easily, using various procedures. Before mentioning some, remember certain elements that are defined in  $S^3$  by analogy with the two-dimensional sphere, as we delimit:

- Fractal Iteration North  $N = (0, 0, 0, 1)$
- Fractal Iteration South  $S = (0, 0, 0, -1)$
- Fractal Iteration East  $E = (0, -1, 0, 0)$
- Fractal Iteration West  $O = (-1, 0, 0, 0)$

It is clear that each iteration fractal Charter is a three-dimensional ball, since:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} = 1 \tag{18}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} = 1 \tag{19}$$

$$-\frac{x^2}{4} \leq 1 \tag{20}$$

One way to avoid the problems that can occur when the points in a circle outside the circle are reversed (as can occur when investment circles overlap) is to prohibit all combinations involving investment from the inside out, and restricted to the limit is the limit of the orbit of a point, with the restriction that if some point in the orbit  $x_i$  disk is limited by  $C_j$ , then the next orbit point,  $x_{i+1}$ , may not  $_j(x, i)$  and get 2 options:

- i) If the circles  $C_i$  bound disjoint disks, then this condition is just the familiar requirement that we have never invested in the same circle on.
- ii) If the circles intersect, this condition can be more interesting.

With this restriction, investments <sup>13</sup> will not expand the maps and the limit is restricted in the discs limited by C.

### 3. Conclusions.

Some instruments such as Fourier Series Harmonic and difference of terms in the Fresnel diffraction adjusting ourselves outside a Hyperspheres geometry in its segment bounded by the ranges of volume operation obtained the following result of market prices in Mexico with respect to the world (is the financial markets self-similar):

Method		Pari s	Fran fuk	Lond res	Toki o	New York	Mex ico
Harmonic	2008-	1.8	36.0	2.32	71.7	252.64	1.00
	2009	1%	0%	%	4%	%	%
	2010-	2.6	74.0	2.31	18.9	251.05	5.00
	2011	1%	0%	%	2%	%	%
Fourier series	2008-	0.7	28.0	4.67	1.73	332.53	0.03
	2009	3%	0%	%	%	%	%
	2010-	0.9	69.0	0.22	0.88	345.66	23.0
	2011	3%	0%	%	%	%	0%
Unlike terms	2008-	3.3	4.00	4.00	1.87	296.73	2.00
	2009	5%	%	%	%	%	%
	2010-	3.9	4.00	2.08	1.29	264.31	3.00
	2011	6%	%	%	%	%	%
Three- dimensional sphere	2008-	1.8	0.04	13.9	0.05	97.37	1.80
	2009	7%	%	3%	%	%	%
	2010-	1.8	0.04	7.73	0.04	87.41	2.03
	2011	3%	%	%	%	%	%
Fresnel diffraction	2008-	1.5	1.00	0.93	0.43	25.68	78.0
	2009	7%	%	%	%	%	0%
	2010-	1.5	1.00	1.03	0.66	23.15	78.2
	2011	3%	%	%	%	%	0%

Regarding the scalar quantization represents each value with an index to a table set consists of a subset of securities called codebook (*A-SF-DF-ET-DF*).

<sup>13</sup> Represent loans of money upon which a company expects to obtain some future performance, either, for the realization of an interest, dividends or by selling to a higher value on acquisition cost. These are loans of money which a company or organization decides to keep for a period exceeding one year or operating cycle, counting from the date of the balance sheet.

With respect to the Harmonic Series Fourier difference Dimensional Sphere Terms and the highest yield is in New York with twice the investment and an acceptance rate of 52.64%-45.66%-64.31% and 7.41% respectively.

With respect to the Fresnel diffraction is generated the highest return our Mexican Stock Exchange with a margin of 78%, syntactic techniques for generating fractals discussed with these five methods are a pleasant and familiar natural almost fractal sets with low  $R^2$ , although its usefulness to larger spaces is almost immediate.

One reason for its popularity is that objects are processed really are symbols related to geometric primitives rather than numerical developments may be less easy to understand (*more so in our field of action*). The idea is to generate certain default rules through a sequence of chains converging to a fractal (*Mandelbrot set*). The study of fractals is transferred in this way, regardless of the initial space dimension, the domain of infinite words.

In every transaction there is a chance that the price changes, and after a certain time horizon, there is a total change in the price. We got the price change (*since the cumulative distribution obeys a cubic law conversely, the probability distribution function for differentiation*) and obeys a law quartic (*fourth time*) reverse.

#### 4. References.

1. Barnsley, M. *Fractals Everywhere*. Academic Press. San Diego. (1993).56-62.
2. Braun E. *Chaos, fractals and strange things*, Collection of Science in Mexico. No. 150 Fondo de Cultura Economica, Mexico. (1994).45-56.
3. Gleick, J. *Chaos*. Making a New Science. Freeman. San Francisco. (1983).12-43.
4. Guzman, M., Martín, M. ángel, Morán, M., Reyes, M. *Fractal structures*. Labor, Barcelona. (1993).32-46 .
5. Mandelbrot B. *Characteristics of Fractals*. Amsterdam. (1982).43-47.
6. Mandelbrot, B. *The behavior of markets, Fractal view of risk, ruin and reward (Basic Books)*. Washington. (2004).45-32.
7. Mantegna R.(1997). *An Introduction to Econophysics, Correlations and Markets*. University Press. Princenton.pp.67.71
8. Petters E. *Chaos and Order in Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility*. Wiley. New York. (1996).57.

9. Ramos, M. *Present Economic Dynamics*. Edit. ECORFAN. Mexico. (2010).45.
10. Talanquer V. *Fractus, Fracta, Fractal, (Fractals of labyrinths and mirrors)*, Economic Culture Fund, Series Science from Mexico /147, Mexico. (1996).37.
11. Bouchaud, J. & Poters, M. The leverage effect in financial markets: retarded volatility and market panic, *Physica*. (2008).13.
12. Calvet, L. Fisher ,A. Mandelbrot, B. *Large deviations and the distribution of price changes. Cowles Foundation Discussion. Paper Núm.1165*.67.
13. Fama, E. *The distribution of daily differences of stockprices, a test of Mandelbrot's stable paretian hypothesis*. (1964) .34-47.
14. Mandelbrot, B. *Multifractal measures, especially for the geophysicist". Pure and Applied Geophysics*. (2004).89-92.
15. Mandelbrot, B. Negative fractal dimensions and multifractals. *Physica*. (2004).67.
16. Bakshi, G. Dilip,M. *What is the probability of a stock market crash?*. NYU Conference on Finance and Accounting. (1998).
17. <http://deutscheboerse.com>
18. <http://www.bmv.com.mx>
19. <http://www.euronext.com>
20. <http://www.londonstockexchange.com>
21. <http://www.worldfederationofexchanges.com>

# ITERACIÓN FRACTAL DE COMPUTO IFS EN LOS MERCADOS FINANCIEROS

**MARÍA- RAMOS ESCAMILLA**

[maria\\_ramos@my.unitec.edu.mx](mailto:maria_ramos@my.unitec.edu.mx)

Universidad Tecnológica de México/Departamento de Posgrado  
Calz Ermita Iztapalapa 557 Granjas Esmeralda, Iztapalapa, 09810 Ciudad de México, Distrito Federal

**MARIA JESUS- SEGOVIA VARGAS**

[mjsegovia@ccee.ucm.es](mailto:mjsegovia@ccee.ucm.es)

Universidad Complutense de Madrid /Departamento de Economía Financiera y Actuarial  
Pabellón de Quinto Curso, Campus de Somosaguas 28223- Madrid

**MARTA- MIRANDA GARCÍA**

[martamiranda@ccee.ucm.es](mailto:martamiranda@ccee.ucm.es)

Universidad Complutense de Madrid /Departamento de Economía Financiera y Actuarial  
Pabellón de Quinto Curso, Campus de Somosaguas 28223- Madrid

**RESUMEN:** En este artículo presentamos un análisis de precios fractal de las acciones emisoras que cotizan en el mercado de capitales, tomamos de herramienta matemática la modelación de sistemas de funciones iteradas, nuestro objetivo es la determinación de los cardiodes de Mandelbrot para la fijación de soportes y resistencias en las tendencias del rango de precios y sostener la hipótesis central que es la maximización del margen estocástico de los precios accionarios de la bolsa de valores en México con sus auto afines internacionales Frankfurt, Londres , Paris , Tokio y New York y representarlas con técnicas chartistas y de mapeo fractal en sus opciones de compra y venta.

*Palabras clave:* Fractal, media dorada, pivoteo, caos, mapeo de IFS.

**ABSTRACT:** In this paper we present a fractal analysis of prices of shares listed stations in the capital market, we take mathematical modeling tool iterated function systems, our goal is the determination of the Mandelbrot cardioid for setting support and resistance trends in the price range and support the central hypothesis that margin maximization is stochastic stock prices of the stock market in Mexico with international related self Frankfurt, London, Paris, Tokyo and New York and represent them with technical chartists and fractal mapping in their purchasing and selling.

*Keywords:* Fractal, golden mean, pivoting, chaos, IFS mapping.

## Introducción.

Nuestro análisis de precios consistirá en describir y aplicar diversas técnicas fractales al mismo tiempo que establecemos las comparaciones pertinentes a los mercados de valores que son afines en cuanto número de emisoras de su actividad bursátil, tal es el caso de Frankfurt (*DAX30*), Londres (*TSE*), París (*CAC-40*), Tokio (*NIKKIE-225*) y New York (*Standar And Poor's*) respecto de México (*IPyC*). Para apreciar el valor y la diversidad del enfoque fractal-tridimensional, tomamos a [Mandelbrot, Benoit, 1982]: “Pienso que la difusión de la teoría del caos y la geometría fractal en las ciencias sociales es esencial para nuestra futura evolución, tal como el arte de contar fue esencial en los orígenes de nuestra cultura”<sup>1</sup>. No existe una definición rigurosa que delimite con precisión matemática si un determinado conjunto es o no un fractal.

El desarrollo de este artículo presenta una alternativa de solución al problema de la determinación del costo y margen de las acciones emisoras respecto de su precio de mercado ahincando sobre el valor máximo del margen de operación estocástico, para eficientar la actividad bursátil de los inversionistas en la bolsa de valores por ello la importancia de la modelación fractal aplicada a los índices bursátiles internacionales respecto de México.

Por ello se acotan dos secciones en la primera se desarrollara la logística fractal de los mercado considerando la diversificación de su tipología en obtención de las memorias cortas y largas para las posibilidades de bifurcación del mercado accionario y en la segunda sección se aplicara el método fractal-tridimensional a las operaciones bursátiles de las acciones de los mercados internacionales, obtendremos los ruidos caóticos de la combinatoria de Mandelbrot y sus grados de anisotropía de iteración IFS Ex ante y Ex Post que parametrizan el cardiode principal además utilizaremos representaciones técnicas y chartistas para la modelación final vía matrices de complejidad del mapeo a los precios.

Finalmente las razones por las que utilizamos esta metodología es porque en el proceso de praxis de mercado, las tendencias no son lineales y las gráficas no representan la totalidad del movimiento de las acciones en teneduría como se ha venido estudiando tradicionalmente, por ello nos surge esta idea de análisis fractal para los índices de precios ya que esta modelación nos da otra alternativa de cambios absolutos y relativos para encapsular en tiempos recurrentes las tendencias de los soportes y resistencias lo que nos arroja una maximización del margen estocástico del precio de las acciones y nos ayuda a darle otra perspectiva al análisis cuantitativo del mercado de capitales.

---

<sup>1</sup> Mandelbrot, Benoit, mostró cómo los fractales pueden aparecer en ámbitos diferentes, tanto en matemáticas como en otros aspectos de la naturaleza y desarrolló no sólo nuevas ideas matemáticas, sino que también tuvo que desarrollar algunos de los primeros programas computacionales para imprimir gráficos.

## 1. Definición, tipología y logística fractal del mercado de capitales.

El término “fractal proviene del latín –fractus- que significa -fragmentado, fracturado, o simplemente roto o quebrado. Se aplica al conjunto de formas generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer similitud en toda escala, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional de  $\frac{3}{4}$ .

El proceso de repetición al que se hace referencia, recibe el nombre de iteración. Para definir a los fractales, consideramos la original de Mandelbrot: Un objeto fractal tiene formas geométricas con una dimensión “fraccional” (*no entero*) con las siguientes características [Mandelbrot, B, 1982]:

- i) Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- ii) Tiene autosimilaridad exacta, ya que posee detalle a cualquier escala de observación.
- iii) Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch<sup>2</sup> no es entera ya que es estrictamente mayor que su Dimensión Topológica [Douketis,Constantine.,Wang,Zhouhang., Haslett,Tom L., Moskovits,Martin: 1995].
- iv) Puede ser definido recursivamente, mediante los siguientes algoritmos:

*IFS (Sistema de Funciones Iteradas)*: Unos conjuntos se reemplazan recursivamente por su imagen bajo un sistema de aplicaciones, ejemplos de esto son ; El conjunto de Cantor, la alfombra de Sierpinski, el triángulo de Sierpinski, la curva de Peano, la curva del Dragón, el copo de nieve de Koch o la esponja de Menger.

*Fractales de tiempo de escape*: Definidos por una relación de recurrencia en cada punto del espacio (*por ejemplo, el plano complejo*): El conjunto de Mandelbrot, conjunto de Julia, y el Fractal de Lyapunov.

*Fractales aleatorios*: Generados por procesos estocásticos, no deterministas; El movimiento Browniano, el vuelo de Lévy, los paisajes Fractales o los árboles Brownianos. Éstos últimos son producidos por procesos de agregación por difusión limitada.

En términos prácticos, un fractal es una estructura que está compuesta por

---

<sup>2</sup> Hausdorff-Besicovitch en 1914, usando el axioma de elección, obtuvo una descomposición "paradójica" de la 2-esfera como la unión disjunta de cuatro conjuntos A, B, C y Q, donde Q es numerable y los conjuntos A, B, C y BC son mutuamente congruentes. Esto inspiró más tarde la descomposición de la esfera en tres dimensiones de Banach-Tarski. Hausdorff introdujo asimismo los conceptos medida de Hausdorff y dimensión de Hausdorff, que son cruciales en el estudio de la teoría de fractales. En Análisis, resolvió lo que llamamos hoy problema del momento de Hausdorff.

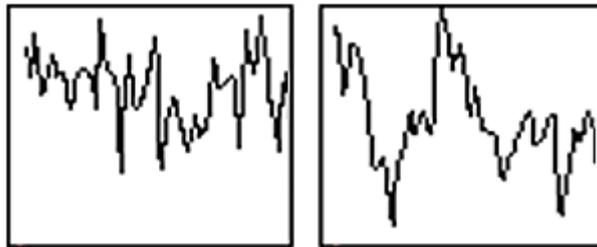
pequeñas partes, las cuales son parecidas a la Figura original, que se repiten en diferentes escalas, desde grandes (*macro*) hasta pequeñas (*micro*) [Matthieu ,W, Philippe B ,J, 2002].

El todo imita a las partes (*y viceversa*), el enfoque fractal revela que el microcosmos es similar al macrocosmos y se constituye en un nuevo campo de las matemáticas e interviene en el cambio de los paradigmas de las ciencias, en nuestro caso de la economía financiera. Las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden crecer en grandes cambios en los valores de las acciones en los mercados. Esta es la sensibilidad a las condiciones iniciales (del precio *Ex post*), es uno de los atributos del caos, su patrón es idéntico al producido por un IFS azar con ciertos pares de precios excluidos [Calvet, Laurent., Fisher, Adlai., Mandelbrot, Benoit: 1997]. Otros requieren combinaciones más excluidas (triples, cuádruples, etc.), el número de combinaciones es excluido de esta medida de la complejidad.

a) Memoria Larga

b) Memoria Corta

Figura 1: Mapa de logística fractal.



El mapa logístico está definido por una parábola, el mapa de la tienda por una línea quebrada, tanto simétrica respecto de  $x = 1/2$ . Para todas nuestras pruebas, utilizamos los puntos de juego del caos fijando los vértices  $(0,0)$ ,  $((\sqrt{3})/2, 1/2)$  y  $(0,1)$  de un triángulo equilátero.

Las funciones de prueba para nuestra investigación de dinámica económica financiera son: el mapa de logística y el mapa de la tienda<sup>3</sup>. La altura da el parámetro del total de la actividad financiera (para nuestra investigación es el número de emisoras bursátiles que existan en el Mercado de Capitales).

<sup>3</sup> Algoritmo de condiciones iniciales que generan un mapa de tienda en R3:

$$T^1(x,y) = (x/2, y/2)$$

$$T^2(x,y) = (x/2, y/2) + (0, 1/2)$$

$$T^3(x,y) = (x/2, y/2) + ((\sqrt{3})/4, 1/4)$$

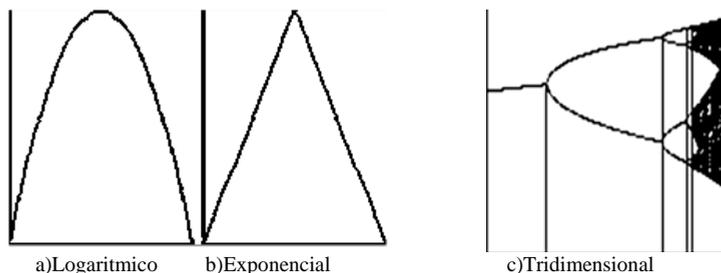


Figura 2: Parámetros de un fractal.

Para la iteración gráfica, los puntos fijos son considerados como las intersecciones de  $y = f(x)$  y  $y = x$ .

Rompiendo el Mapa de la tienda en una función discontinua y la parte de flexión de la gráfica da un diagrama de bifurcación mucho más interesante. El lado izquierdo del diagrama se parece mucho a la de la hoja de tienda de campaña (*curva de Gauss*), pero el lado izquierdo muestra una secuencia de ventanas periódico se entretejen en el mismo orden que los discos conectado todo el cardioide del conjunto de Mandelbrot. La Iteración<sup>4</sup> gráfica de un fractal se produce mediante la órbita de generación de los puntos  $(x_0, x)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,... en un sistema tridimensional:

$$(x, y, z) \tag{1}$$

Donde:

- x = Rango de precios máximos.
- y = Rango de precios mínimos.
- z = Logaritmo de acciones en circulación.

A partir de  $x = x_0$ , con una línea vertical de la gráfica  $y = f(x)$  de la que se reiteramos la función, se cortan en  $(x_0, f(x)) = (x_0, x_1)$ , y volvemos a trazar la línea horizontal (*definiendo las fluctuaciones de mercado*) desde este punto hasta la línea diagonal (*definiendo la tendencia del mercado*)  $y = x$ , pues cortamos en  $(x_1, x_1)$ , para representar el precio real contra el precio logarítmico [Stewart, Ian: 2003].

El diagrama de bifurcación de mercado es un registro de los precios de las acciones de la órbita final (*trazado vertical-Prospectación del Precio*) para cada uno de una secuencia de valores de los parámetros (*trazado horizontal- Estado Ex ante del Precio*). El mapa de retorno es una gráfica de puntos  $(x_0, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_4)$ ,...

Para las órbitas de las funciones de  $x_{i+1} = f(x_i)$ , el mapa de retorno sólo produce los puntos de la gráfica  $y = f(x)$ . A medida que aumenta el precio mínimo de

<sup>4</sup> Iteración real :  $(V + i \cdot w) + (x + i \cdot y) = (v + x) + i \cdot (w + y)$   
 Iteración compleja :  $(v + i \cdot w) \cdot (x + i \cdot y) = (v \cdot x - w \cdot y) + i \cdot (v + w \cdot y \cdot x)$

$f^n(x)$  disminuye hasta que toquen  $y = x$ , los puntos de formación de un nuevo ciclo (es decir su precio máximo). Así bifurcaciones tangente dar lugar a un par de ciclos, uno estable, la inestabilidad de otros, por esto la reivindicación de métodos Fractales.

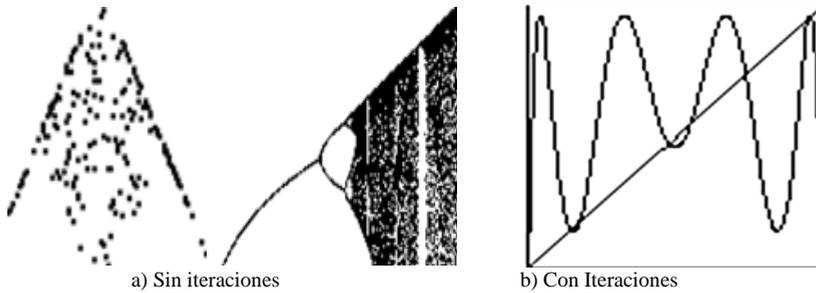


Figura 3: Diagrama de bifurcación.

El mapa de retorno es una gráfica de puntos  $(x_0, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_4)$ , las órbitas de las funciones de  $x_{i+1} = f(x_i)$  el mapa de retorno sólo produce los puntos de la gráfica  $y = f(x)$ .

Las distancias entre el periodo de duplicación de bifurcaciones sucesivas llevaron al descubrimiento de un nuevo tipo de escala, y una nueva constante matemática la media dorada de 0.618 para lo que surge en una gran clase de funciones de prospectación en precios de acciones.

Como un rango de precios (máximo o mínimo) del sistema es muy variado, la dinámica puede llegar a ser más complicada por periodo de duplicación en las bifurcaciones del logaritmo de las acciones. El precio en un  $N$ -ciclo se vuelve inestable, un  $2N$  estable ciclo aparece: cada punto del ciclo da lugar a dos puntos de la  $2N$ -ciclo. Como el precio sigue aumentando, el  $2N$ -ciclo se vuelve inestable, y cada punto da lugar a dos puntos de un estable- $4N$  ciclo, y así sucesivamente (en un plano bidimensional).

## 2. Geometría de la naturaleza en los precios de las acciones.

Uno de los procedimientos para caracterizar e incluso para clasificar los objetos fractales consiste en atribuir a cada uno de ellos una cantidad numérica, la dimensión fractal [Braun, E: 1996]. Por medio de este índice matemático se puede cuantificar la geometría de los objetos o de los fenómenos fractales. Así, cuantificar fractales será definir, por algún procedimiento, la proporción del espacio físico que es llenado por ellos. Encontramos una diferencia fundamental con los objetos euclidianos: si magnificamos sucesivamente un objeto euclidiano "unidimensional", observamos segmentos rectilíneos. Sin embargo, si magnificamos sucesivamente un objeto fractal, encontramos objetos con niveles de complicación comparables a los del conjunto de partida. El punto de partida es una información del mercado de capitales, se procesa y se obtiene una indexación. Éste se procesa de nuevo (se itera) y se obtiene otro rango de precios similar al anterior y se continúa haciendo lo mismo indefinidamente con cada

precio de las acciones.

La dimensión topológica, es la siguiente:

Tabla 1: Dimensión topológica.

Nivel de dimensión	Efecto dimensional
Inexistencia de dimensión	Un punto.
1° Dimensión	Una línea recta.
2° Dimensión	Un plano.
3° Dimensión	El espacio.
4° Dimensión	Un fractal.

*El uso del caos para este fenómeno se busca en los bordes de los bordes hasta alcanzar la dimensión 0 (punto) hasta ir iterando y formar un fractal.*

La transformación de similitud o escalamiento consiste en generar una copia similar de un precio de acción cualquiera en una escala diferente<sup>5</sup>. Para lograr esto, el precio *Ex ante* se debe afectar por un factor de proporcionalidad (*delta del precio = 3*), mismo que se denomina factor de escalamiento [Mantegna, R. N., Stanley, H. E: 1995]. De este modo, dos precios (*Ex ante* y *Ex post*) son similares si poseen la misma geometría, aunque tengan diferente valor nominal y número de acciones emitidas. Esto se puede expresar de una manera general, tal que si tenemos un precio y se elige modelarlo con logaritmos y se amplifica con un factor de escalamiento delta. Se observa una geometría idéntica al rango de precios (*precio máximo-precio mínimo*).

Si se toma este último rango y se amplifica nuevamente por el mismo factor de escalamiento, seguramente se obtendrá una geometría similar al precio *Ex ante*. Esta operación se puede repetir indefinidamente. La propiedad de autosimilitud en un fractal-tridimensional y se presenta en todo el intervalo de escalas. Se dice que el precio de una acción es autoafín cuando permanece invariante bajo una escala de transformación anisotrópica (*diferentes precios en todas las acciones*).

La combinatoria de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales, y nosotros lo presentamos en  $\mathbb{R}^3$ , definiéndolo así, en un plano complejo: Sea  $C$  un número complejo cualquiera, entonces se dice que  $C$  pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo. Por ejemplo, si  $c = 1$  obtenemos la sucesión 0, 1, 2, 5, 26... que diverge. Como no está acotada, 1 no es un elemento del conjunto de Mandelbrot. En cambio, si  $c = -1$  obtenemos la sucesión 0, -1, 0, -1,... que sí es acotada, y por tanto, -1 sí pertenece a la combinatoria de Mandelbrot. A menudo se

<sup>5</sup> El escalamiento en  $\mathbb{R}^4$  se obtiene con los siguientes pivoteos fractales:

$$\begin{aligned}
 1 &= 2 \cdot ((1/2)^d) + 2 \cdot ((1.4)^d) + 2 \cdot ((1/8)^d) + n \\
 &= 2 \cdot ((1/2)^d) + 2 \cdot (((1/2)^d) 2) + 2 \cdot (((1/2)^d) 3) + n \\
 &= 2 \cdot ((1/2)^d) \cdot (1 + (1/2)^d + ((1/2)^d) 2) + n
 \end{aligned}$$

representa la Combinatoria mediante el algoritmo de tiempo de escape [Ramos, María: 2010].

En ese caso, los colores de los puntos que no pertenecen al conjunto indican la velocidad con la que diverge (*tiende a 1000 iteraciones con media 0.618*) la sucesión correspondiente a tener un margen de operación en la acción que itera al precio de la acción en 50 fórmulas y genera 500,000 movimientos en el espacio al iterar 10,000 veces. A pesar de sus diferencias, en una escala de transformación, las direcciones no son completamente independientes. Si al hacer un zoom, uno de los ejes de coordenadas se transforma en un factor  $b$ ,  $x \rightarrow bx$ , el resto de los ejes coordenados deben ser reescalados en un factor  $b^{\alpha_i}$ ,  $x_i \rightarrow b^{\alpha_i}x_i$ , con el objeto de preservar el conjunto invariante [Courtaut, Jean Michel., Kabanov, Yuri., Bru, Bernard., Crépel, Pierre., Lebon and Arnaud Le Marchand, Isabelle :2000].

Los exponentes  $\alpha_i$  son llamados exponentes de Hurst y nos indican cuál es el grado de anisotropía del conjunto. A este tipo de quebrados se les llama fracciones continuas.

Por lo tanto, la media dorada se obtiene también como una fracción continua [Guzmán, M., Martín, M. Ángel, Morán, M., Reyes, M: 1993], y su valor es de 0.618. Es decir, procesos matemáticos de creación de estructuras Fractales son iteraciones de reglas simples de objetos iniciales.

Pequeños cambios crean enorme variedad de patrones tanto a nivel micro como a nivel macro [Weick, K: 1979]. La creatividad de la naturaleza, según parece, viene de este procedimiento iterativo. Hay varias técnicas para determinar la dimensión Fractal-Tridimensional, las técnicas basadas en precios del mercado exhiben correlación temporal (*es decir, las acciones volátiles tienden a ocurrir con una determinada tendencia respecto de su precio*) con distribuciones de precios con cola ancha (*los rangos Ex post podrían ocurrir con mayor frecuencia que la descrita por una distribución normal*).

Por tal motivo, las técnicas tradicionales basadas en los modelos lineales no reflejan correctamente la volatilidad. A continuación detallaremos los mercados de capitales que son fuente de nuestro estudio en geometría de los precios de acciones.

Tabla 2: Perfil de los mercados de capitales.

Mercado de capitales	Índice bursátil	Número de emisoras
Bolsa de Frankfurt	DAX-30	235
Bolsa de Londres	TSE	247
Bolsa de Paris	CAC-40	138
Bolsa de Tokio	NIKKIE-225	104
Bolsa de New York	Standar And Poor's	76
Bolsa de México	IPyC	130

*Estas bolsas de valores son auto afines y auto similares entre si por los valores de inscripción y mantenimiento bursátil.*

Los sistemas complejos en estos mercados de capitales cumplen con la propiedad de mantener en bursatilidad procesos de precios y emisión de acciones con autocorrelación fractal y pueden ser diseñados en gran detalle, variaciones pequeñas o fluctuaciones pueden ser amplificadas mediante procesos iterativos y crean los cambios cualitativos en el nivel macro.

Una de las características más espectaculares de estos fractales, es que son no derivables en todos sus puntos. En lenguaje menos matemático: una curva cualquiera es no derivable en un punto cuando, aun existiendo ese punto, forma un pico o esquina, ya que cualquier otro punto más cercano o lejano, por la derecha o por la izquierda, sí es derivable con la Combinatoria de Mandelbrot ya que uno de nuestros objetivos va a ser modificar esas fórmulas para producir mutaciones que se ajusten a la correlación de precios.

El primer paso es considerar a  $z =$  precio máximo (Ex ante y Ex post), a  $c =$  precio mínimo (Ex ante y Ex post), y dar un enter a nuestro sistema para que nos arroje el resultado de las 500,000 iteraciones en el espacio.

Tabla 3: Iteraciones Ex ante de la emisora WALMEX.

Emisora	WALMEX	Z=	39.11	C=	38.56		
Z <sub>1</sub> =	50.58513742	Z <sub>16</sub> =	26.08760587	Z <sub>31</sub> =	77.64347535	Z <sub>46</sub> =	33.2479089
Z <sub>2</sub> =	78.09506263	Z <sub>17</sub> =	29.13950151	Z <sub>32</sub> =	77.05041994	Z <sub>47</sub> =	10.4805927
Z <sub>3</sub> =	67.95983424	Z <sub>18</sub> =	29.19674603	Z <sub>33</sub> =	78.59983452	Z <sub>48</sub> =	58.4629619
Z <sub>4</sub> =	40.69433695	Z <sub>19</sub> =	23.39856276	Z <sub>34</sub> =	65.52795958	Z <sub>49</sub> =	40.6411476
Z <sub>5</sub> =	31.25345071	Z <sub>20</sub> =	27.80470046	Z <sub>35</sub> =	77.63413358	Z <sub>50</sub> =	39.0734201
Z <sub>6</sub> =	27.19941182	Z <sub>21</sub> =	32.75610994	Z <sub>36</sub> =	39.31394305		
Z <sub>7</sub> =	45.89680474	Z <sub>22</sub> =	45.04906488	Z <sub>37</sub> =	40.66004884		
Z <sub>8</sub> =	68.13814246	Z <sub>23</sub> =	1.424980935	Z <sub>38</sub> =	40.66004884		
Z <sub>9</sub> =	40.69433695	Z <sub>24</sub> =	33.13538462	Z <sub>39</sub> =	35.69270353		
Z <sub>10</sub> =	51.52711699	Z <sub>25</sub> =	11.14210889	Z <sub>40</sub> =	31.73136673		
Z <sub>11</sub> =	79.02599595	Z <sub>26</sub> =	30.30640645	Z <sub>41</sub> =	13.74828976		
Z <sub>12</sub> =	45.16280142	Z <sub>27</sub> =	31.89019777	Z <sub>42</sub> =	38.07663411		
Z <sub>13</sub> =	23.40416147	Z <sub>28</sub> =	33.01048779	Z <sub>43</sub> =	32.90980464		
Z <sub>14</sub> =	23.47771387	Z <sub>29</sub> =	11.88943781	Z <sub>44</sub> =	39.15057903		
Z <sub>15</sub> =	38.06785611	Z <sub>30</sub> =	40.69433695	Z <sub>45</sub> =	12.10352767		

Posteriormente hay que determinar un rango ponderado de las iteraciones, en las 130 emisoras, para la bolsa de México:

$$P = (Z1 - Z50) / 50 \quad (2)$$

Promedio 1.08%

El resultado es 1.08%, lo que nos representa un margen positivo de 1.08-0.618 = 0.382% como utilidad del precio de la acción a nivel micro respecto de su función cognitiva, es decir solo en esta empresa, mientras que a nivel macro tenemos:

Promedio 1.66%

Tenemos 1.66%, lo que nos representa un margen positivo de 1.66-0.618 = 0.982% como utilidad del precio de la acción, pero en todo el mercado mexicano durante el periodo (2007-2010), acorde a su función de participación. Seguido de estos cálculos, vamos a representar a la combinatoria de Mandelbrot, con y sin iteraciones en el espacio, cabe destacar que la asociación con cada disco y cardioide.

Tabla 4: Cardioides y discos Ex ante de la emisora WALMEX.

1.66	Promedio
$1.66^{*2}$	3.32
$1.66^{*3}$	4.98
$1.66^{*4}$	6.64
$1.66^{*5}$	8.32
$1.66^{*6}$	9.96
$1.66^{*7}$	11.62
$1.66^{*8}$	13.28
$1.66^{*9}$	14.94

*La media dorada son sus secuencias de orden jerárquico para que la relación entre el tamaño de las copias sucesivas se aproxima a un valor límite que represente los escapes en los precios de las acciones, para recorrer el proceso, escoja un precio máximo "z" complejo y un precio mínimo "c".*

El límite de la combinatoria de Mandelbrot contiene infinitamente muchas copias del conjunto de Mandelbrot. De hecho, tan cerca cómo se mira a cualquier punto de la frontera, encontrará infinidad de Mandelbrots y su frontera es tan "difusa", que es 3-dimensional, supera la media dorada son sus secuencias de orden jerárquico para que la relación entre el tamaño de las copias sucesivas se aproxima a un valor límite que represente los escapes en los precios de las acciones [Kenneth ,Falconer: 1990], para recorrer el proceso, escoja un precio máximo "z" complejo y un precio mínimo "c". Luego de generar la secuencia de los números complejos  $z_1, z_2, z_3, \dots$  por:

$$\begin{aligned} z_1 &= z^{0-2} + c \\ z_2 &= z^{1-2} + c \\ z_3 &= z^{2-2} + c \end{aligned} \quad (3)$$

Y, en general:  

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{4}$$

El análogo, se pueden definir para cualquier  $z$  ( $n + c$ ), para cualquier entero  $n > 0.618$ . He aquí un ejemplo del efecto del precio máximo de iteraciones en la elaboración de la periferia de un halo de copias pequeñas de toda la combinatoria, cada uno de los cuales está rodeado por su propia aureola de ejemplares que se encuentran escape, y así sucesivamente, en las escalas más pequeñas, sin fin [Kenneth, Falconer: 1990]. Pese a las apariencias, estas pequeñas copias se adjuntan al cuerpo principal de la serie, a través de una secuencia de copias aún más pequeñas, ya que es conectado a los ciclos estables dentro de un comportamiento caótico y su restricción denota atención a sólo números reales.

El régimen de iteración Mandelbrot revela una interesante relación con el conocido esquema logístico mapa bifurcación.

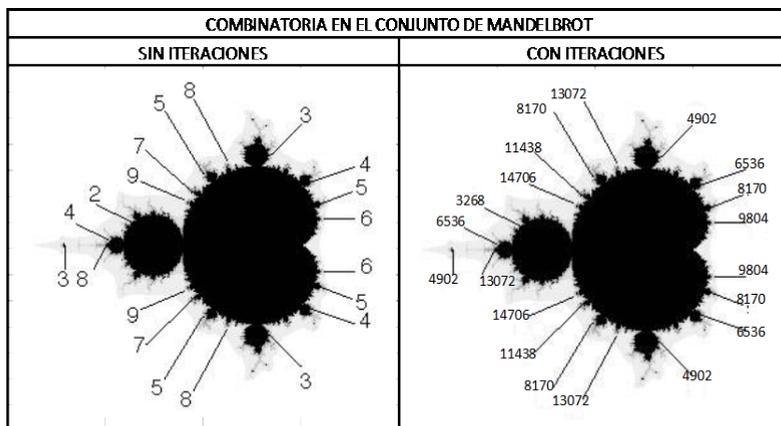


Figura 4: Escalas de la combinatoria de Mandelbrot Ex ante en bolsa mexicana.

Si  $g(x)$  es una función par,  $g(x)=g(-x)$ , los términos  $b_i$  son nulos, si  $g(x)$  es impar  $g(x)=-g(-x)$ , los coeficientes  $a_i$  son nulos, si  $g(x)$  es alternada,  $g(x+p)=-g(-x)$ , la serie solamente consta de términos armónicos impares.

Las series principales del primer patrón de los ciclos de discos conectado a la cardioide principal de Mandelbrot secuencia de búsqueda de los ciclos de todos los discos de otras inherentes a la cardioide principal  $\frac{1}{2}$  regla  $n$  un modelo para los tamaños de los discos adjunta a la cardioide principal, y un mapa de salida de este modelo en los ciclos de discos conectado a los discos y cardioides las normas de discos conectado a los discos y otros cardioides es lo mismo que las normas de discos conectado a la cardioide principal que corresponde a un 2 estable del ciclo, 4 ciclo, ciclo de 8, ..., y así sucesivamente. Se llama el período de duplicación en cascada para medir el diámetro de

los componentes con el fin de descubrir un patrón de cómo los componentes se encogen y sus límites de las proporciones de los diámetros de componentes sucesivas es un ejemplo de la ampliación de Feigenbaum.

El enfoque de fractal-tridimensional a esta extensión del método de Newton es difícil: la gráfica de una función compleja que es de cuatro (*real*) de objetos tridimensionales ( $x,y,z$ ). Aquí la fórmula es útil, porque se puede aplicar a los números complejos, así como a los números reales.

Respecto del análisis técnico para modelación logarítmica de los precios, también llamado “chartismo”, es una técnica que trata de predecir la evolución de los precios basándose en el pasado, consideran que los cambios en la oferta y demanda pueden anticiparse observando las pautas en los movimientos de los precios de las acciones [Madan, Dilip B, Haluk Unal: 1998]. Conviene referir algunas reglas derivadas de este modelo, una básica es la regla del oscilador de la media móvil ( $>0.618$ ) y la regla del filtrado. En la regla del oscilador de la media móvil, las señales de compra y venta se generan con dos medias móviles del índice, una a corto plazo (*Ex ante*) y otra a largo plazo (*Ex post*). Es decir, se recomienda comprar cuando el precio sube un tanto por ciento por encima del último pico y vender cuando baja un tanto por ciento por debajo del último mínimo. La representación de datos es la siguiente:

Tabla 5: Análisis técnico de las variaciones en el precio de CEMEX.

Variación	Máximo Ex post	Mínimo Ex post	Máximo Ex ante	Mínimo Ex ante
-0.73	14.13	13.6	33.06	5.79

*Las estadísticas de operación son los rangos de los precios máximos y mínimos de teneduría e inscripción.*

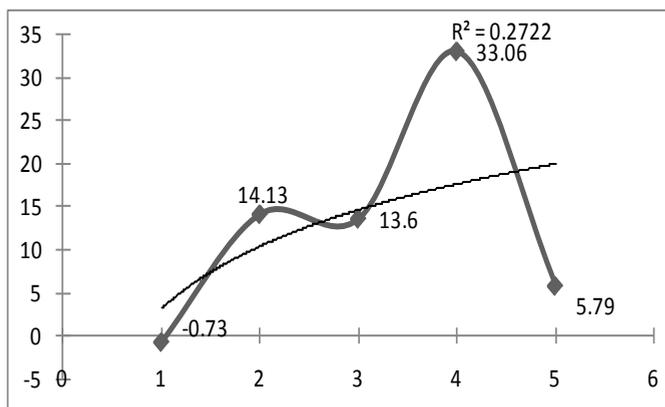
Realizamos la tendencia alcista o bajista real, es decir en términos nominales para después llevarlos al plano logarítmico, el cual nos arroja el costo o margen de aceptación, como lo mostramos en la siguiente tabla:

Tabla 6: Análisis de tendencias en el precio de CEMEX.

CEMEX	Real	Logarítmico
Variación	-0.73	-0.13667714
Máximo Ex post	14.13	1.150142162
Mínimo Ex ante	13.6	1.133538908
Máximo Ex ante	33.06	1.519302849
Mínimo Ex ante	5.79	0.762678564
Real	65.85	4.428985343
Logarítmico	Margen	8.89%

*Para cada  $q$  de la ecuación  $(1 p q) (r 1 \beta (q)) + \dots + (P N q) (r \beta N (q)) = 1$ , si determinamos un único valor de  $\beta (q)$ , para cada  $q$  definir una función  $g (\beta)$  por  $g (\beta) = (p 1 q) (r 1 \beta) + \dots + (P N q) (r N \beta)$  ciertamente,  $g (\beta)$  es una función continua.*

Los valores siguen una pauta de comportamientos reconocibles, identificables y repetitivos en forma de patrones o Figuras [Rolf ,W., Banz, William., J. Breen: 1986]. Por esta razón tiene el valor de resultar predictivas y establecer la base matemática de la evolución del precio en una masa económica[Ramos, María: 2010] que pasa del optimismo al pesimismo en un determinado período de tiempo ya que el mercado sigue un determinado modelo que le permite describir pautas que son repetitivas en cuanto a su forma, pero no en cuanto a su tiempo y amplitud debido a sus movimientos en la dirección de la tendencia principal tienen una estructura de cinco ondas (*Variación, Máximo y Mínimo Ex ante al igual que Máximo y Mínimo Ex post*), como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica 1: Análisis chartista con nivel de confianza al margen en el precio de CEMEX.

*En la regla del oscilador de la media móvil, las señales de compra y venta se generan con dos medias móviles del índice, una a corto plazo (ex ante) y otra a largo plazo (ex post).*

Los movimientos en contra de esa tendencia principal están compuestos por tres ondas, de esta forma podemos determinar cuál es la tendencia subyacente actual del precio. A su vez cada una de estas ondas se subdividen en cinco ondas de grado inferior, es decir, las ondas 1,3 y 5 están compuestas a su vez por cinco ondas 1(*variación*), 2(*máximo Ex post*), 3(*mínimo Ex post*), 4(*máximo Ex ante*) y 5(*mínimo Ex ante*). Las ondas 2 y 4 se denominan ondas correctivas, ya que son movimientos en contra de la tendencia principal. Se subdividen a su vez en tres ondas de grado inferior, denominadas x, y, z, en el método fractal-tridimensional.

#### 4. Mapeo Fractal de las acciones en SIF'S con matices de Kelly y evidencias del MBF.<sup>6</sup>

Comenzamos, describiendo la relación de las variables económicas financieras que en este caso serán los precios de las acciones del mercado accionario mexicano, estos registros comprenden desde el Viernes 01 de Junio del 2007 al día Martes 01 de Junio del 2010 e incorporamos el término de perturbación de una observación no está asociado al término de perturbación asociado a otra observación:

$$E(u_i, u_j) = 0 \quad i \neq j \quad (5)$$

Mientras que la correlación fractal plantea la correlación de rezagos entre dos series diferentes (*una Ex ante y otra Ex post*):

$$(u^1, u^2, \dots, u^{10} \& v^1, v^2, \dots, v^{10}) \quad (6)$$

Cuando se traslada este concepto a precios fractales y con algún criterio geográfico, sus términos de error podrán también estar relacionados entre sí, encontrándonos entonces con el concepto de correlación espacial o autocorrelación espacial, para hablar de aquella correlación en el espacio en vez de la temporal.

Los SFI'S (*Sistemas de Información Fractal Espaciales*), identifican principalmente dos tipos de fenómenos en los precios de las acciones [Dacorogna, Michel M., Ramazan, Gencay., Müller, Ulrich., B.Olsen, Richard ., Pictet, Olivier V:2001], el primer paso es capturar los rangos de precios de las acciones (*Máximo y Mínimo*) del mercado de capitales a analizar (*considerando el mapeo Ex post o Ex ante*), dar el espacio en  $R^3$  (*propiedad geométrica tridimensional*) y posteriormente en  $R^4$  (*propiedad geométrica fractal*) y determinar para todos ejes geográficos la media dorada de 0.618 en x, y & z para que el programa nos arroje nuestra primer carta fractal a 10, 000 iteraciones con un mercado de 130 emisoras para el caso de la bolsa de México.

---

<sup>6</sup> MBF es la señal o proceso con a espectro de la frecuencia tales que densidad espectral de la energía es proporcional al recíproco de la frecuencia. El ruido rosado tiene una cantidad igual de energía por octava. El nombre se presenta de ser intermedio en medio ruido blanco ( $1/f_0$ ) y ruido rojo ( $1/f_2$ ), conocido más comúnmente como Ruido browniano.

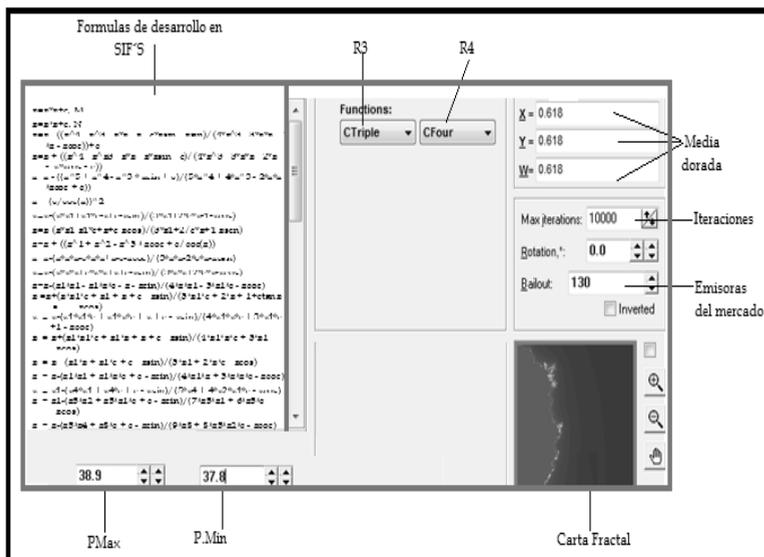


Figura 6: Construcción tecnológica de una Carta fractal de GCARSO.

Este es un prototipo de iteración de datos al software simula los precios máximos y mínimos en la función triple y cuarta en distribución de media dorada con 130 emisoras.

Guardamos la imagen para poder pintar al oleo fractal nuestro mapa, para ello tenemos que tener un esqueleto que nos sirve de guía en el vaciado de nuestras iteraciones fractales, a la que denominaremos matriz de complejidad<sup>7</sup>.

Tabla 7: Matriz de complejidad de 10\*5 en el espacio de 50.

5-E-90'	3-E-56'	4-E-220'	6-N-145'	6-N-34'	3-N-180'	1-N-153'	9-E-45'	4-E-67'	2-E-89'
5-S-90'	3-S-56'	4-S-220'	6-S-145'	6-S-34'	3-S-180'	1-S-153'	9-S-45'	4-O-67'	2-O-89'
1-O-67'	4-O-45'	5-S-45'	7-S-24'	4-N-35'	6-N-67'	8-N-89'	9-E-41'	1-E-67'	4-N-45'
5-E-45'	7-N-90'	2-N-220'	1-E-91'	4-S-35'	6-S-67'	8-S-89'	9-O-41'	6-E-43'	8-E-32'
5-O-45'	7-O-90'	2-O-220'	1-O-91'	2-E-36'	6-E-192'	3-N-79'	9-N-169'	6-O-43'	8-O-32'

Un mapa fractal, en que cada pixel, corresponde a un valor del parámetro en precios.

Donde:

<sup>7</sup> Para definir una matriz A m × n con cada entrada en la matriz A[i,j] llamada aij para todo 1 ≤ i ≤ m y 1 ≤ j ≤ n. Sin embargo, la convención del inicio de los índices i y j en 1 no es universal: algunos lenguajes de programación comienzan en cero, en cuál caso se tiene 0 ≤ i ≤ m - 1 y 0 ≤ j ≤ n - 1.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,.....50,n	Indican el uso en espacio de la carta fractal en la Matriz.
45',25',37',280',.....360'	Indican el uso en grados de la carta fractal en la Matriz.
N	Indica desplazamiento hacia el Norte
S	Indica desplazamiento hacia el Sur
E	Indica desplazamiento hacia el Este
O	Indica desplazamiento hacia el Oeste

Se tendrá especial relevancia al quedar parametrizada en un Mapa Fractal, en que cada pixel, correspondiente a un valor del parámetro en precios, y se colorea de modo que refleje una propiedad básica del conjunto de Mandelbrot en el espacio [Barnsley, Michael: 1993].

Se ilustra el resultado de aplicar diversas transformaciones sobre la carta fractal<sup>8</sup> representada en similitud con un factor de escala  $r= 0.618$  y una transformación de afinidad con  $r= 0.5$  y desplazamiento  $x_n = x + h$ ,  $y_n = y + k$  &  $z_n = x+i$ , como lo mostramos a continuación:

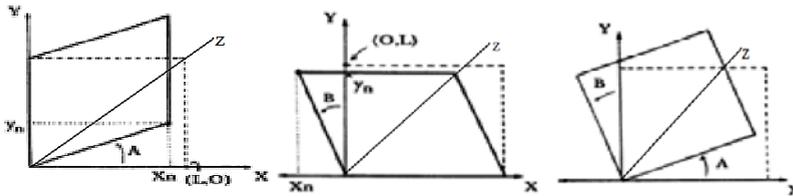


Figura 7: Movimiento estocástico de una carta fractal.

La ecuación funcional  $s_1X^1+s_2X^2=sX$ , junto con la relación subsidiaria.  $(s1)a+(s2)a=sa$

Para ilustrarlo basta, por ejemplo, aplicar la receta anterior a las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado inicial:

$$\begin{aligned} (0,0) & \text{---> } (0.5*0, 0.5*0) \text{ ---> } (0, 0) \\ (0,L) & \text{---> } (0.5*0, 0.5*L) \text{ ---> } (0, L/2) \end{aligned}$$

<sup>8</sup> El término Carta Fractal frecuentemente se considera que significa que los valores analíticos utilizados son de propiedad privada y, por lo tanto, no están a disposición del usuario o que los valores y códigos analíticos están más allá de la capacidad de comprensión del usuario y obedece a que las transformaciones o reacciones experimentadas por los Rangos de precios en su interior son desconocidos por su carácter de iterativo.

$$\begin{aligned}
 (L,0) & \rightarrow (0.5*L, 0.5*0) \rightarrow (L/2, 0) \\
 (L, L) & \rightarrow (0.5*L, 0.5*L) \rightarrow (L/2, L/2)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Se dice que la transformación<sup>9</sup> de todos los índices auto afines con el de México han introducido un factor de escala r=0.618, si bien la estructura de reglas geométricas como éstas se enriquece si además de reescalar la figura permite trasladarla a otro sitio o rotarla para observarla a escalas de tiempo discreto.

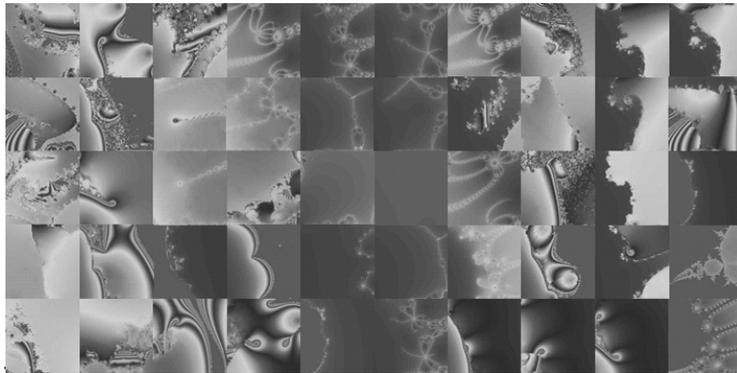


Figura 8: Mapa Fractal de GFINTER.

<sup>9</sup> Realizando el mapeo de la transformación de todos las bolsas respecto al mercado de capitales mexicano, tenemos:

$$\begin{aligned}
 M_\beta &= \beta_0 + \beta_1(\text{DAX30}) + \beta_2(\text{TSE}) + \beta_3(\text{CAC40}) \\
 &\quad + \beta_4(\text{NIKKIE225}) + \beta_5(\text{S\&P}) + \xi^2 \\
 \partial M_\beta &= \beta_0 + \frac{\partial(\text{DAX30})}{\beta_1} + \frac{\partial(\text{TSE})}{\beta_2} + \frac{\partial(\text{CAC40})}{\beta_3} + \frac{\partial(\text{NIKKIE225})}{\beta_4} + \frac{\partial(\text{S\&P})}{\beta_5} \xi^2 \\
 dM &= d\beta_0 + \frac{d\beta_1(\text{DAX30})}{dx} + \frac{d\beta_2(\text{TSE})}{dx} + \frac{d\beta_3(\text{CAC40})}{dx} \\
 &\quad + \frac{d\beta_4(\text{NIKKIE225})}{dx} + \frac{d\beta_5(\text{S\&P})}{dx} + \frac{d\beta_6(\text{pc})}{dx} + \xi^2 \\
 M & \\
 M & \\
 M &= \int \begin{matrix} -1\beta_0^{360} & \left[ \frac{\beta_2(\text{TSE})^{190}}{\beta_3(\text{CAC40})^{-1180}} \right] \\ -1\beta_1(\text{DAX30})^{270} & \left[ \frac{\beta_6(\text{N})^{190}}{\beta_n(n)^{-1180}} \right] \\ -1\beta_4(\text{NIKKIE225})^{360} & \\ -1\beta_5(\text{S\&P})^{270} & \end{matrix}
 \end{aligned}$$

*El mapa fractal es el resultado de iterar 10, 000 veces el precio de los rangos de acciones en la bolsa por emisora ejecutada en teneduría.*

La trama Kelly [Coward, J: 1992] es un método de representación de datos inspirado por algunas de las pinturas de Ellsworth Kelly por el método de granulación gruesa, una secuencia de valores de datos se convierte en una secuencia de números. Y cada número se le asigna un color, que en nuestro caso el rosa-morado es un equilibrio browniano, el verde es un atractor de costos y el azul es un atractor de márgenes que nos ayudan a la construcción de una matriz cuadrada de unos cuadrados pequeños, una para cada punto de datos.

De acuerdo a nuestro mapa podemos observar que en corto plazo existen ganancias con tendencia de crecimiento y en el largo plazo existen igual ganancias pero sin crecimiento ya que pintan algunos costos en el Noroeste. Se dice en equilibrio browniano (*Ruido Kelly*) cuando los precios fijos señalan de previsibilidad a largo plazo. Si los precios del sistema hasta bastante cerca del precio Ex post, su comportamiento futuro es fácil de predecir: se acercará cada vez más cerca del precio Ex ante que en esencia de la estabilidad: las pequeñas perturbaciones desaparecen. Se dice atractor de costos (*Ruido verde*) cuando los precios fijos se comportan de la manera opuesta y situado exactamente en el rango de precios, allí se quedará. Pero pérdida en el mínimo cambio en precios (*rango*) de distancia y se sale rápidamente. Se dice atractor de márgenes (*Ruido azul*) cuando los precios fijos son los que ninguno de los casos anteriores, precios Ex post cercanos, o bien no se mueven en absoluto, o algunos se acercan, mientras que otros se mueven más lejos, asegurándonos un entorno de utilidad o ganancia absoluta. En lo que se refiere a movimientos y tendencias, el índice de una Bolsa de Valores muestra la sensibilidad, ya que refleja en gran medida lo que ocurre en el mundo económico, y es el parámetro más sensible de los hechos económicos: su sensibilidad los capta antes que sean visibles al público inversionista [Embrechts, Paul., Klüppelberg, Claudia., Mikosch, Thomas:1997].

Todos los índices son portafolios teóricos que pretenden capturar, con cierta representatividad, la evolución de un mercado específico, o lo que es lo mismo, como "benchmark" de un tipo de activo en un determinado mercado [Weick K.E: 1979]. Su fama es producto de la representatividad que tienen sobre el comportamiento de las acciones. Reflejan fielmente el comportamiento de cada acción y suelen ser los más estudiados.

### **3. Conclusiones.**

Obtuvimos los resultados de las aplicaciones del método fractal-tridimensional y modelamos los precios con geometría fractal a escala logarítmica con  $\ln$  para las acciones que tenían peso muy grande, es decir un mayor número de emisoras en teneduría (Frankfurt y Londres) y con  $\log$  para la de peso pequeño, es decir un menor número de emisoras en teneduría (New York).

De acuerdo con la Tabla 3, el soporte quedo en 50.58% y la resistencia de los precios cerro en 39.07% por lo que la tendencia de los precios ira sobre 11.51% en nuestro método fractal-tridimensional, respecto de 10.95% del método chartista , y obtenemos un nivel de confianza aceptable de 0.56% por tanto se acepta esta tendencia para el estudio de los precios en los tiempos recurrentes de nuestro estudio pues tiene un margen de 0.06% de la media gaussiana tradicional.

Respecto de la correlación de funciones , obtuvimos que la función cognitiva (de la emisora hacia el mercado) , para todas las bolsas se mostró menor con un comportamiento del 1.08% , respecto de la función participativa (del mercado hacia la emisora) la cual obtuvo un comportamiento de 1.66% para definirse como un margen general , lo que nos demuestra que hay un sesgo de error del 0.58% y por ende que existen problemas de número de accionistas programas de mejora corporativa en su índice de actividad bursátil ó bien no tengan el porcentaje de acciones inscritas para poder participar en bolsa (resaltando , pues la amplia gama de instrumentos financieros , recordándoles que nuestro articulo solo es para mercado de capitales).

En la parte lógica definimos algunos algoritmos como los fractales de tiempo de escape, con nuestro conjunto de Mandelbrot para la fijación del soporte y la resistencia en el eje principal de la tendencia del mercado en el espacio en  $R^3$  (*propiedad geométrica tridimensional*) y posteriormente en  $R^4$  (*propiedad geométrica fractal*) pues los modelamos para todos ejes geográficos la media dorada de 0.618 en x, y & z que nos da el entorno perfecto de geometría no clásica en los fractales aleatorios con el movimiento browniano fraccional de ahí que no es de suma importancia el número de emisoras en el mercado , pues en la bolsa de Londres existe el mayor número de emisoras mientras que en la Bolsa de New York el mínimo de emisoras , que en representación de mercado la obtenemos en  $c_n = \frac{\int_2^0 f(x)\phi_n(x)dx}{\int_2^0 \phi_n(x)dx}$  , porque el Precio Ex ante está separado del Precio Ex post en el espacio libre (0.5) y nos representa otra posibilidad de maximización del margen estocástico del rango de precios según la tabla 4.

La emisora WALMEX que es la de precios más altos el promedio ponderado es de 9.13% y sigue representando otra opción más al margen sobre 10.95% de lo esperado con maximización de 1.82%.

Así mismo las Acciones en circulación de cualquier acción del mercado de capitales tiene una tendencia positiva h y con un ancho infinito se encuentra a una distancia d1 (14.3%-13.6%) Precio Ex ante y a d2 (33.06%-5.79%) Precio Ex post, otra ventaja más del método fractal-tridimensional pues para el tiempo A priori 2011-2012 tiene las diferencia al costo de 7.81% y al margen de 18.76% , lo que nos arroja como resultado la maximización del margen en 10.95%.

Ya en la tendencia la más fuerte de México la obtuvimos en la Emisora CEMEX , que se evalúa en la tabla 5 y 6 donde se arroja un margen de 8.89%. La volatilidad a la que viaja nuestro precio de la acción por arriba del promedio o rango a una distancia mayor de  $R^2$  de 0.27% de aceptación fractal (en la gráfica 1), a 0.23% por

debajo del tradicional gaussiano de 0.5% en margen de operación.

Asumiendo que  $h \ll d1$ ,  $d2$  y  $h \gg$  tendencia del Precio  $\lambda$ , entonces la diferencia entre la línea de tendencia y el camino difractado llamado precio prospectado ( $\Delta$ ), considerando en todo momento un margen de aceptación en nuestra operación bursátil, reivindicando que existe una evidencia fractal en los precios del mercado de capitales mexicano con autoafinidad y autosimilitud con el resto de las bolsas internacionales.

#### 4. Bibliografía.

1. Alligood, Kathleen T., Sauer, Tom., Yorke, James. *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, (1996).
2. Barnsley, Michael. *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press. (1993)
3. Battena, Jonathan., Ellis, Craig. *Fractal structures and naive trading systems: Evidence from the spot US dollar/Japanese yen, Japan and the World Economy*, 8 (4), (1996). 411–421.
4. Braun, E. *Caos, fractales y cosas raras*. México. Colección la Ciencia en México. N° 150: Fondo de Cultura Económica. (1996).
5. Calvet, Laurent., Fisher, Adlai., Mandelbrot, Benoit. *Large deviations and the distribution of price changes*. *Cowles Foundation Discussion*. 1165.1(1), (1997). 237-253.
6. Courtault, Jean Michel., Kabanov, Yuri., Bru, Bernard., Crépel, Pierre., Lebon and Arnaud Le Marchand, Isabelle. *Louis Bachelier on the centenary of théorie de la speculation*. *Mathematical Finance*, 10(3), (2000). 341–353.
7. Cowart, J. *Method and motif: Ellsworth Kelly's Chance grids and his development of color panel painting by period: 1948-1951*, New York: Museum of Modern Art. (1992).
8. Dacorogna, Michel M., Ramazan, Gencay., Müller, Ulrich., B. Olsen, Richard., Pictet, Olivier V. *An Introduction to High-Frequency Finance*. San Diego, California: Academic Press. (2001)
9. Douketis, Constantine., Wang, Zhouhang., Haslett, Tom L., Moskovits, Martin. *Fractal character of cold-deposited silver films determined by low-temperature scanning tunneling microscopy*, *Physical Review*, 51 (16), (1995). 2-3.
10. Embrechts, Paul., Klüppelberg, Claudia., Mikosch, Thomas. *Modelling external events for insurance and finance*, New York: Springer-Verlag. (1997).

11. Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. England: John Wiley & Sons Ltd. (1990).
12. Madan, Dilip B, Haluk Unal. "Pricing the Risks of Default", *Review of Derivatives Research*. (2), (1998).121-160.
13. Mandelbrot, Benoit. *La geometría fractal de la naturaleza*. San Francisco: WH Freeman. (1982)
14. Mantegna, R. N., Stanley, H. E.. *Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index*. *Nature* , 376, (1995). 46-49.
15. Ramos, María. *Dinámica Económica Actual*. México: ECORFAN. (2010).
16. Ramos, María. *DEFA (Dinámica Económica Financiera Actual)*, México: ECORFAN. (2010)
17. Ramos, María. *Invencción-Versión: 1.n -RNPC:03-2010-051112281100-01*, México: ECORFAN. (2010)
18. Rolf ,W., Banz, William., J. Breen. *Sample dependent results using accounting and market data some evidence*. *Journal of Finance*. 41 (4), (1986).779-793.
19. Sidney, Alexander. *Price movements in speculative markets: trends or random walks*, *Industrial Management Review*, 2 (2), (1961). 7-26.
20. Stewart, Ian. *From here to infinity: A guide to today's mathematics*. New York: Oxford University Press. (2003).
21. Weick K.E. *The social psychology of organization*. United States of America: Mc Graw-Hill, Inc. (1979).
22. Wyart , Matthieu ,Bouchaud ,Jean , Philippe. *Statistical Models for Company Growth*, *Service de Physique del Etat Condens* . [en línea] Recuperado el 16 de abril de 2012, de: <http://ssrn.com/abstract=391860> (2), (2002). 1-4.
23. <http://www.bmv.com.mx>
24. <http://www.worldfederationofexchanges.com>



# **ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA APOYADA EN LAS TICs. UNA VISIÓN DESDE EL OCW DE ESTADÍSTICA EN EL GRADO EN MARKETING DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA**

**ÚRSULA FAURA MARTÍNEZ**

[faura@um.es](mailto:faura@um.es)

*Universidad de Murcia. Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa  
Campus de Espinardo, 30100 Murcia*

**FUENSANTA ARNALDOS GARCÍA**

[arnaldos@um.es](mailto:arnaldos@um.es)

*Universidad de Murcia. Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa  
Campus de Espinardo, 30100 Murcia*

**RESUMEN:** Son muchos los recursos que se utilizan habitualmente para cumplir los objetivos propuestos y conseguir las competencias establecidas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística. En la actualidad el acceso a la red permite emplear estrategias y herramientas nuevas que mejoran o complementan las utilizadas tradicionalmente.

Entre los muchos recursos que hay en la red (libros online, calculadoras estadísticas, programas de software libre, ...) destaca la presencia de las denominadas simulaciones interactivas, que ofrecen al estudiante la oportunidad de visualizar conceptos estadísticos que les puedan resultar complejos e interactuar con ellos y aprender de la propia experiencia.

Las simulaciones interactivas pueden utilizarse en los tres grandes bloques considerados normalmente en la docencia en Estadística en las titulaciones de ciencias sociales: Descriptiva, Probabilidad e Inferencia. Dada la gran variedad y cantidad de simulaciones existentes, es aconsejable hacer una selección de las mismas y motivar su uso. Un ejemplo de integración de este tipo de recursos está disponible a través del portal OCW de la Universidad de Murcia para la asignatura Estadística del Grado en Marketing.

A lo largo del curso 2012-2013 este material ha sido utilizado por los alumnos de la asignatura, y hemos podido constatar que ha contribuido a mejorar su interés, ya que les resulta más atractiva.

*Palabras claves:* Estadística, OCW, TICs, Simulaciones interactivas.

**ABSTRACT:** Many different resources are commonly used to get the objectives and competences in the process of teaching and learning in Statistics. Nowadays the access to the web allows the use of new strategies and tools to enhance and complement the traditional ones.

Between the resources available on the web (online books, calculators statistics, free software,...) the so-called interactive simulations deserve special

recognition, for giving students the chance to visualize statistical concepts and interact with them and learn from their own experience.

Interactive simulations can be used in the three main parts normally considered when teaching Statistics in Social Sciences: Descriptive, Probability and Inference. Given the quantity and variety of existing simulations, it is advisable to make a selection of them and encourage their use. An example of the integration of these resources is available through the portal OCW of the University of Murcia for the subject "Statistics" in the degree of Marketing.

This material has been used during the academic year 2012-2013 by students of the subject, and we have found that has helped to improve their interest on it, making it more attractive for students.

*Keywords:* Statistics, OCW, TICs, Interactive simulations.

## 1. Introducción

La adaptación al nuevo Espacio Europeo de Educación Superior ha modificado el rol del profesor, de forma que debe no sólo transmitir conocimientos, sino actuar como motivador y guía del alumno en su descubrimiento de nuevas formas de aprendizaje. Esta adaptación ha supuesto también un cambio de rol para el alumno, que debe, más que nunca, gestionar su proceso de aprendizaje y adquirir no sólo conocimientos, sino competencias de diverso tipo relacionadas con la asignatura.

Las nuevas tecnologías juegan un papel importante en todo este proceso, tal y como analizan Gisbert et al. (2010). A través de la red se puede acceder a numerosos recursos, proporcionando al alumno experiencias formativas de naturaleza muy diversa que complementan a las más tradicionales. La tecnología actual permite, además, diseñar los materiales de forma interactiva, de manera que los estudiantes accedan a cada uno en el momento adecuado, y en situaciones sincrónicas o asincrónicas según se considere conveniente, haciendo las asignaturas más atractivas.

En el caso de las asignaturas de Estadística, son muchos los recursos virtuales que se pueden utilizar con esta intención. Debe destacarse, además, que el acceso libre a recursos de calidad facilita su incorporación al material de las asignaturas, acentuando el papel del profesor como discriminador de los recursos existentes y guía del alumno en su uso.

A la hora de seleccionar posibles recursos para el diseño de actividades, son muchas las opciones disponibles:

- Los libros online y las revistas docentes sobre la materia permiten solicitar a nuestros alumnos que completen cualquiera de los contenidos de las asignaturas.
- La disponibilidad de información estadística, tanto en fuentes oficiales, como en páginas donde los conjuntos de datos se agrupan por métodos de análisis, permite que se les pueda encargar su estudio.
- El acceso a software libre de análisis de datos posibilita la comparación con el software comercial de uso tradicional.
- La disponibilidad de calculadoras estadísticas ayuda a la comprobación de resultados en la resolución de ejercicios de manera tradicional.
- Los videotutoriales proporcionan acceso a las explicaciones acerca de un tema tantas veces como se considere necesario y bajo tantas versiones diferentes de explicación como autores de los mismos.
- Las simulaciones interactivas facilitan la visualización de conceptos complicados de entender, y favorecen la experimentación con el fenómeno y el aprendizaje a partir de la propia experiencia.

La lista de posibilidades es larga, teniendo en cuenta, además, que su integración en las actividades puede ser también variada, a partir de las herramientas de la Web 2.0 (Blogs, Wikies, videoconferencias, redes sociales,...), que posibilitan intercambios de naturaleza diversa con el estudiante y entre estudiantes.

En este trabajo mostramos una experiencia docente en la que hemos integrado diferentes tipos de recursos disponibles en la red de una forma interactiva. Esta experiencia se ha publicado como contenido abierto y bajo licencia Creative Commons en el portal OpenCourseWare de la Universidad de Murcia. La asignatura para la que se ha desarrollado esta experiencia docente es “Estadística”, asignatura de 6 créditos del Grado en Marketing, cuyos contenidos incluyen los bloques de Estadística Descriptiva, Probabilidad e Inferencia Estadística.

## 2. OCW

OpenCourseWare (OCW) es una forma de publicar contenidos docentes en abierto en la red que tienen las universidades e instituciones académicas. Aunque estos materiales están diseñados para cubrir los objetivos de alguna materia en concreto, y están pensados para los alumnos matriculados en esa materia, cualquier persona interesada puede acceder a los mismos, sin necesidad de registrarse ni matricularse.

Aunque fue una iniciativa en abril de 2001 del Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT) <sup>1</sup> se han adherido con posterioridad muchas otras

---

<sup>1</sup> <http://ocw.mit.edu/index.html>

universidades. En 2005 se creó el Consorcio OpenCourseWare<sup>2</sup>, del que forman parte universidades y organizaciones de todo el mundo, y a partir de cuya creación se ha producido un crecimiento importante en el número de OCW publicados.

En España, Universia<sup>3</sup> comenzó realizando traducciones de los OCWs del MIT, para pasar después a tener una participación más activa junto con la Universidad Politécnica de Madrid en el desarrollo de estos cursos, siendo miembros de apoyo del Consorcio OpenCourseWare. Dentro de la red de OCW-Universia<sup>4</sup>, hay 117 universidades, 47 españolas, siendo la Universidad de Murcia una de ellas.

La Universidad de Murcia cuenta en la actualidad en su portal OCW<sup>5</sup> con 170 asignaturas distribuidas en 8 áreas temáticas (Artes, Ciencias de la Salud, Ciencias Jurídicas, Ciencias Sociales, Ciencias, Humanidades, Ingenierías y Transversales). La elaboración del material de estos cursos está adaptado al portal institucional que ofrece la Universidad de Murcia y todos ellos tienen en principio una estructura común, que consta de una presentación de la asignatura con sus objetivos, y pestañas de “Programa”, “Guía de aprendizaje”, “Material de clase”, “Bibliografía” y “Evaluación”, aunque se permite cierta flexibilidad para añadir todas aquellas opciones que se consideren necesarias para el adecuado seguimiento de la asignatura, tal y como se puede observar en la figura 1, en el que se han añadido las pestañas de “Prácticas” y “Otros recursos”.



Figura 1. Página de inicio del OCW de Estadística en el Grado en Marketing (Universidad de Murcia)

<sup>2</sup> <http://www.ocwconsortium.org/>

<sup>3</sup> <http://www.universia.es/index.htm>

<sup>4</sup> <http://ocw.universia.net/es/>

<sup>5</sup> <http://ocw.um.es/>

### 3. OCW de Estadística en el Grado en Marketing<sup>6</sup>

La asignatura de Estadística en el Grado en Marketing se caracteriza porque en sólo 6 créditos realiza una revisión de los tres bloques de la Estadística (Descriptiva, Probabilidad e Inferencia). Se trata de una materia muy amplia que se imparte en poco tiempo, por lo que nos planteamos la creación del OCW como una guía de apoyo en el estudio autónomo de esta materia por parte de los alumnos. Este recurso didáctico puede, no obstante, ser utilizado por cualquier persona interesada en la materia.

Contiene material teórico con actividades variadas de aplicación de conceptos, actividades prácticas tanto de resolución de problemas como de análisis de datos con SPSS, un apartado de selección de recursos virtuales de naturaleza diversa que complementan a los materiales más tradicionales, y una sección de autoevaluación que incluye tanto cuestiones de selección múltiple como ejercicios de desarrollo. Las distintas estrategias adoptadas dependen de la ubicación de los materiales.

#### 3.1. Material teórico

En “Material de clase” se puede acceder a un material teórico sencillo, que incluye ejemplos de aplicación y recursos de visualización y experimentación con los conceptos más complejos. Los materiales teóricos están publicados en formato HTML, lo que, además de mejorar el acceso pautado al material, posibilita la inclusión de distintas actividades interactivas:

- ejercicios resueltos que presentan la resolución a demanda del usuario, permitiendo que éste intente primero resolverlos.
- actividades de aplicación y experimentación con conceptos, en algunos casos complejos, en el momento en que estos conceptos se explican, mediante el uso de recursos interactivos procedentes de distintos proyectos de visualización disponibles en la red.

El material teórico tiene incorporados numerosos ejercicios de aplicación de conceptos. Cada uno de ellos está planteado ofreciendo al alumno la posibilidad de elegir entre trabajar con la resolución del problema desde el inicio, o resolverlo primero por su cuenta y comprobar luego dicha resolución. Por ejemplo, en el ejercicio mostrado en la figura 2, correspondiente al tema 1 (distribuciones de frecuencias unidimensionales) se estudian las distribuciones de frecuencias y, entre otros, se plantean ejercicios para practicar con los distintos tipos de frecuencia.

---

<sup>6</sup> <http://ocw.um.es/cc.-sociales/estadistica-en-el-grado-de-marketing>

**Ejercicio 1.2** A partir de los datos sobre la edad de 20 personas, complete la siguiente tabla de frecuencias:

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
50			4	
51		0,2		0,65
52	2			
53		0,15		0,9
54				
55				

**SOLUCIÓN**

Figura 2. Ejemplo de ejercicio propuesto

El ejercicio se ofrece sin que la resolución sea visible, pudiendo acceder a ella con el botón **SOLUCIÓN**, como se puede ver en la figura 3.

**Ejercicio 1.2** A partir de los datos sobre la edad de 20 personas, complete la siguiente tabla de frecuencias:

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
50			4	
51		0,2		0,65
52	2			
53		0,15		0,9
54				
55				

**SOLUCIÓN**

Si  $N_1 = 4$ , se tiene que  $n_1 = 4$ , y como  $N = 20$ ,  $f_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{4}{20} = 0,2$  y  $F_1 = 0,2$ .

Al ser  $f_2 = 0,2$ , se tiene  $n_2 = 4$ ,  $N_2 = N_1 + n_2 = 8$  y  $F_2 = 0,4$ .

Si  $F_3 = 0,65 \Rightarrow F_3 = \frac{N_3}{N} = 0,65 \Rightarrow N_3 = 0,65N = 0,65 \cdot 20 = 13$  y  $n_3 = N_3 - N_2 = 5$  con  $f_3 = 0,25$ .

El resto de los datos se obtienen de forma similar y en la última línea hay que tener en cuenta que  $N_5 = 20$ .

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
50	4	0,2	4	0,2
51	4	0,2	8	0,4
52	5	0,25	13	0,65
53	2	0,1	15	0,75
54	3	0,15	18	0,9
55	2	0,1	20	1
	20			

Figura 3. Ejemplo de ejercicio propuesto y resuelto

Muchos de los conceptos estudiados en la asignatura se pueden visualizar, lo que mejora su comprensión al tiempo que lo hace más atractivo. Por este motivo, hemos incorporado la visualización en el material teórico en varias ocasiones. En muchas de ellas, la herramienta empleada para visualizar el concepto es también interactiva, lo que permite experimentar con él y aprender de la propia experiencia.

La proliferación en la red de este tipo de recursos facilita su incorporación a la docencia, aunque deben seleccionarse con precaución pensando en sus beneficios potenciales (Romero et al., 2000). Existen numerosas simulaciones disponibles para su uso, en la mayoría de los casos gratuitas y bajo licencias de uso Creative Commons. También es de destacar la existencia de proyectos de potenciación de la visualización desde grandes empresas como el caso de Wolfram Research o desde instituciones sin ánimo de lucro como las responsables del desarrollo de Geogebra. Una revisión de proyectos desarrollados que incorporan la visualización y que pueden servir de fuente de información y punto de partida para su consideración en la docencia de Estadística puede encontrarse en Arnaldos y Faura (2012).

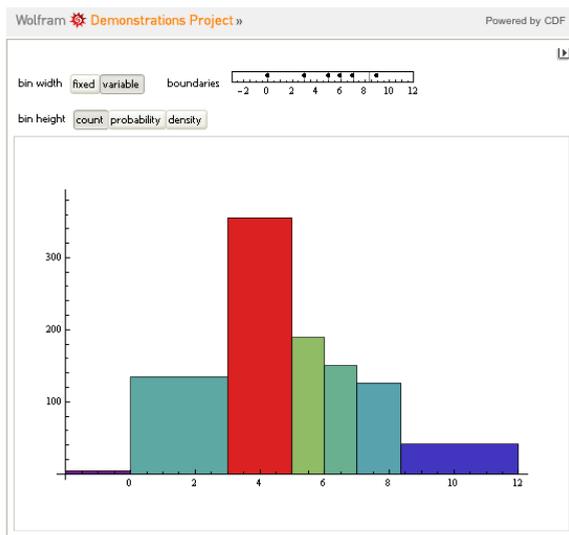
En la selección de las simulaciones empleadas para el material teórico<sup>7</sup>, se ha primado, a igualdad de objetivos cubiertos, la posibilidad de insertarlas en el propio texto, frente a proporcionar un enlace externo para su uso. El Wolfram Demonstration Project posibilita insertar las simulaciones en el código HTML, lo que también ocurre con las construcciones de Geogebra, por lo que han sido ampliamente utilizadas en el curso. Las simulaciones interactivas se han empleado con diferentes intenciones. Se han usado para hacer al alumno reflexionar sobre las implicaciones de la toma de algunas decisiones, como en el ejemplo de la figura 4, relacionado con los efectos de la selección de un número concreto de intervalos en la representación gráfica de las observaciones a través de un histograma.

---

<sup>7</sup> El uso de las simulaciones incluidas en el OCW precisa de ciertos requisitos de software. Es necesario que esté instalada la máquina virtual Java. En <http://www.java.com/es/download/index.jsp> se puede comprobar si está instalada y, en caso contrario, descargar una copia gratuita. Para trabajar con los ficheros del proyecto de demostración Wolfram es necesario tener instalado el Wolfram CDF Player. En <http://demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html> se puede descargar una copia gratuita. Para utilizar una escena del Proyecto Descartes es necesario tener instalado el plug-in de Descartes Web2.0: <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/DescartesWeb2.0/>

**Actividad de apoyo...**

¿Afecta la modificación del número de intervalos en la agrupación de los datos al histograma? Plantee una pregunta y utilice el siguiente recurso del Proyecto de Demostración Wolfram para comprobar si su respuesta es acertada.



Effects of Bin Width and Height in a Histogram from the Wolfram Demonstrations Project by Brett Champion

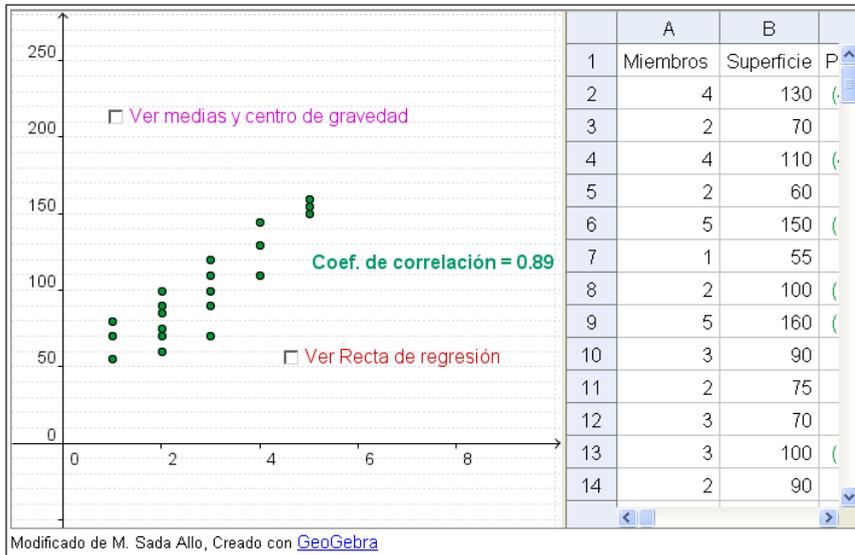
Figura 4. Ejemplo de experimentación con los efectos de la modificación del número de intervalos

También se han empleado para apoyar a ejercicios propuestos, como en la figura 5, en la que se observa una construcción de Geogebra con la que se representa la recta de regresión de mínimos cuadrados que los alumnos han calculado previamente en un ejercicio propuesto. Este applet permite, además, estudiar los efectos de la modificación de observaciones sobre la recta de regresión.

Cuando hemos considerado que otra simulación puede complementar a alguna ya incluida, hemos propuesto al alumno que la utilice también, de forma que, bajo diferentes visiones del mismo problema le permita mejorar la comprensión del problema, como se recoge también en la figura 5.

**Actividad de apoyo...**

En el siguiente applet de Geogebra puede visualizar la nube de puntos del ejercicio 2.7. Utilice el applet para insertar la recta de regresión, realizar y visualizar predicciones y para observar los cambios que se producen cuando modifica, añade o borra algún punto.



Puede seguir trabajando con estos conceptos en el siguiente recurso. Observe que en él puede también visualizar las sumas de los cuadrados de los residuos (diferencia entre el valor observado y el valor estimado según la recta).

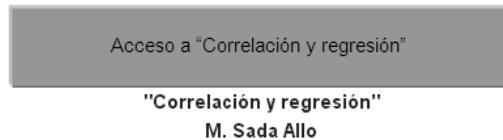


Figura 5. Ejemplo de simulaciones interactivas para apoyar ejercicios propuestos de regresión

Otro ejemplo de combinación de ejercicios tradicionales con simulaciones interactivas puede verse en la figura 6, en la que tras la resolución de ejercicios de cálculo de probabilidades con sucesos, se sugiere al alumno que compruebe los resultados acudiendo a una simulación que permite la reproducción del ejercicio, de forma que una vez el alumno conoce estos nuevos recursos, puede utilizarlos en situaciones diferentes para mejorar su comprensión de este tipo de problemas.

**Ejercicio 3.3** Un alumno se examina de dos asignaturas, A y B. La probabilidad de que apruebe la asignatura A es 0,568 y la probabilidad de que apruebe la asignatura B es 0,4023. Teniendo en cuenta que la probabilidad de que apruebe alguna de las dos asignaturas es 0,7613, calcule la probabilidad de que el alumno:

- a) Apruebe las dos asignaturas.
- b) No apruebe ninguna asignatura.
- c) Sólo apruebe la asignatura A.
- d) Sólo apruebe la asignatura B.
- e) Sólo apruebe una asignatura.

**SOLUCIÓN**

#### Actividad de apoyo...

Puede utilizar el siguiente applet del Aula Virtual de Estadística de la Universidad de Córdoba para realiza este ejercicio. Elija un tamaño de los sucesos A, B y  $A \cup B$  proporcional a su probabilidad y visualice los sucesos de los distintos apartados y sus probabilidades.

Acceso a "Diagrama de Venn"

"Diagrama de Venn"

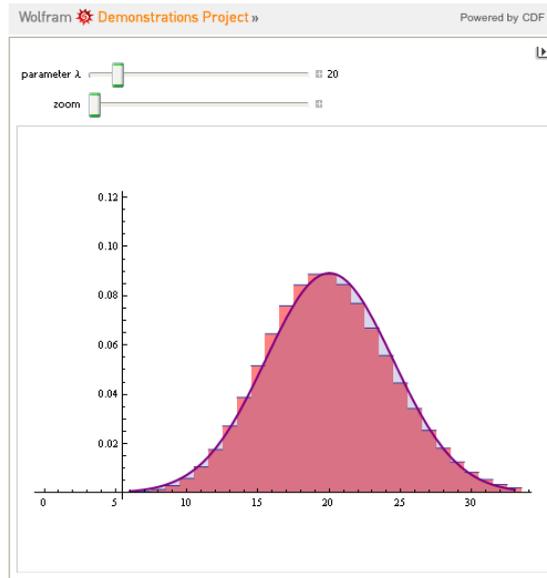
J. Borrego. Aula Virtual de Estadística (Universidad de Córdoba)

Figura 6. Ejemplo de simulación interactiva para apoyar a ejercicios propuestos de probabilidad de sucesos

Existen conceptos teóricos difíciles de transmitir y complicados de entender, en los que la experimentación puede ser de gran utilidad. Un ejemplo es la convergencia entre modelos. En la figura 7 se observa uno de los applets seleccionados en el material de clase para que los alumnos comprendan el concepto de convergencia y experimenten con las condiciones bajo las que se produce.

**Actividad de apoyo...**

En el siguiente recurso del Wolfram Demonstration Project puede observar la convergencia de distribución de Poisson a la Normal cuando aumenta el parámetro  $\lambda$ .



Normal Approximation to a Poisson Random Variable from the Wolfram Demonstrations Project by Chris Boucher

Figura 7. Ejemplo de simulación interactiva para experimentar con conceptos complejos

Estos son sólo algunas de las aplicaciones de las simulaciones interactivas consideradas en el material teórico. En la tabla 1 se muestra un listado de todas las simulaciones incluidas, con indicación del bloque de la materia para el que se han utilizado y el tema al que corresponden.

Tabla 1. Simulaciones interactivas utilizadas en el material teórico.

<b>BLOQUE I: ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA</b>	
Distribuciones de frecuencias unidimensionales	“Effects of Bin Width and Height in a Histogram”. B. Champion. Wolfram Demonstrations Project. “Idea gráfica de la media”. M. Sada. Geogebra. “Medidas descriptivas”. R. Gómez. Aula Virtual de Estadística (Universidad de

	<p>Córdoba).</p> <p>“Índice de Gini” en CaEst 1.5. J.M. Lejarza</p> <p>“Income distribution by country”. VisualEconomics.</p>
Distribuciones de frecuencias bidimensionales	<p>“Understanding correlation”. R. W. West.</p> <p>“Correlations”. J. Marden. CUWU.</p> <p>“Regresion by eye”. R. W. West. StatCrunch.</p> <p>“Correlación y regresión”. M. Sada. Geogebra.</p>
<b>BLOQUE II: PROBABILIDAD</b>	
Fundamentos de probabilidad	<p>“Interactive Venn Diagrams”. M. Brodie. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Lanzamiento de dados”. Calvo Llorca et al. Statmedia (Universidad de Barcelona).</p> <p>“Gamblers fallacy”. D. Lane. OnlineStatbook.</p> <p>“Diagrama de Venn”. J. Borrego. Aula Virtual de Estadística (Universidad de Córdoba).</p> <p>“Conditional Probability”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Teorema de la probabilidad total”. J.A. Argote. Proyecto Descartes.</p> <p>“Teorema de Bayes”. J.A. Argote. Proyecto Descartes.</p> <p>“Combinación de dados y urnas”. Calvo Llorca et al. Statmedia (Universidad de Barcelona).</p>
Variables aleatorias unidimensionales y bidimensionales	<p>“Variable discreta y continua”. A. Bogarín. Aula Virtual de Estadística (Universidad de Córdoba).</p> <p>“Fonction de repartition (French)”. J. Zizi. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Lotería primitiva”. Calvo Llorca et al. Statmedia (Universidad de Barcelona).</p> <p>“Percentiles of Certain Probability Distributions”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Trinomial Distribution”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Bivariate Normal Distribution”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p>
Modelos de variables aleatorias	<p>“Binomial-Poisson”. P. Lacoste. CDNIS Math.</p> <p>“Continous Uniform Distribution”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p>

	<p>“Area of a Normal Distribution”. E Schulz. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Distribución Normal”. P. Bujosa. GeoGebra.</p> <p>“Funciones de distribución y cuantiles”. Aula Virtual de Bioestadística (U. Complutense de Madrid).</p> <p>“SOCR Distributions”. Statistics Online Computational Resource (UCLA).</p>
<b>BLOQUE III: INFERENCIA ESTADÍSTICA</b>	
Teoría de muestras	<p>“Normal Approximation to a Poisson Random Variable”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Normal Approximation to a Binomial Random Variable”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Chi-Squared Distribution and the Central Limit Theorem”. P. Falloon. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Sampling Distribution of the Mean and Standard Deviation in Various Populations”. I. McLeod. Wolfram Demonstrations Project.</p>
Métodos de estimación	<p>“Sampling Distribution of the Sample Mean”. J.R. Larkin. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Confidence Intervals for a Mean”. C. Boucher. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Estimación por intervalos”. Aula Virtual de Bioestadística (U. Complutense de Madrid).</p> <p>VESTAC. University Center for Statistics. Katholieke Universiteit Leuven.</p> <p>“Confidence Intervals: Confidence Level, Sample Size, and Margin of Error”. E. Schulz. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“Confidence, Significance and Critical Values”. D. Gurney. Southeastern Louisiana University.</p> <p>“Decisions Bases on p-Values and Significance Levels”. E. Schulz. Wolfram Demonstrations Project.</p> <p>“P-Value and Critical Value Comparison”. D. Gurney. Southeastern Louisiana University.</p> <p>“Chi-squared worksheet”. PurpleMonkeyMath.com.</p>

El acceso a todas las simulaciones interactivas que aparecen en la tabla 1 está disponible en el material teórico, con distintas aplicaciones, y de forma directa a



presentación y navegación en los ficheros pdf utilizados en esta parte, se les ha dado un efecto que permite pasar páginas del documento digital como si fuese un documento físico; es decir, simula el efecto natural de pasar página. Además, facilita la búsqueda a lo largo del documento, permite saltar a una página concreta e incluye una tabla de contenido de acceso rápido a los puntos principales. Este mismo efecto se ha empleado para el material de apoyo de las prácticas de análisis de datos con SPSS, que se han incluido, también para cada uno de los bloques, y para todo el material complementario incorporado en esta pestaña. En la figura 9 puede verse un ejemplo de este tipo de material.

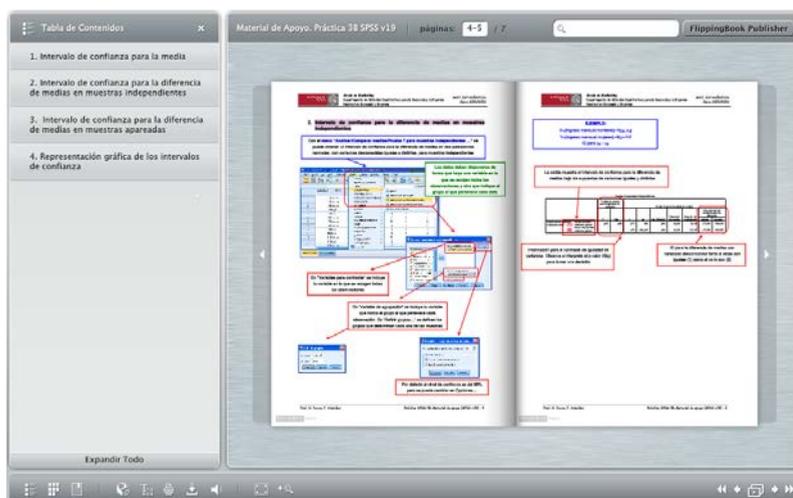


Figura 9. Ejemplo de material de apoyo para las prácticas de análisis de datos con SPSS

En el caso de las prácticas de análisis de datos, se incluyen, además, videotutoriales elaborados con Camtasia Studio (figura 10).

Material de apoyo SPSS

1. IC para la media
2. IC para la diferencia d
3. IC para la diferencia d
4. Representación gráfi
5. CH para la media
6. CH para la diferencia
7. CH para la diferencia
8. CH de bondad de ajust
9. CH de bondad de ajust

**EJEMPLO:**  
 $X = \{\text{Ingreso mensual}\}$ , Contraste con  $\alpha = 5\%$   
 $H_0: X$  se distribuye  $N(\mu, \sigma)$  frente a  $H_1: \text{no } H_0$

Figura 10. Ejemplo de videotutorial de apoyo para las prácticas de análisis de datos con SPSS.

### 3.3. Pruebas de evaluación

En “Evaluación” hemos incluido distintos tipos de cuestiones clasificadas según los bloques de la asignatura, que permiten al alumno comprobar su progreso en la comprensión de la materia. Separadas en cuestiones tipo test y cuestiones abiertas, se ha procurado dotarlas también de un carácter interactivo.

Como se muestra en la figura 11, en el caso de las cuestiones tipo test, al marcar unas de las opciones aparece un comentario acerca de su corrección.

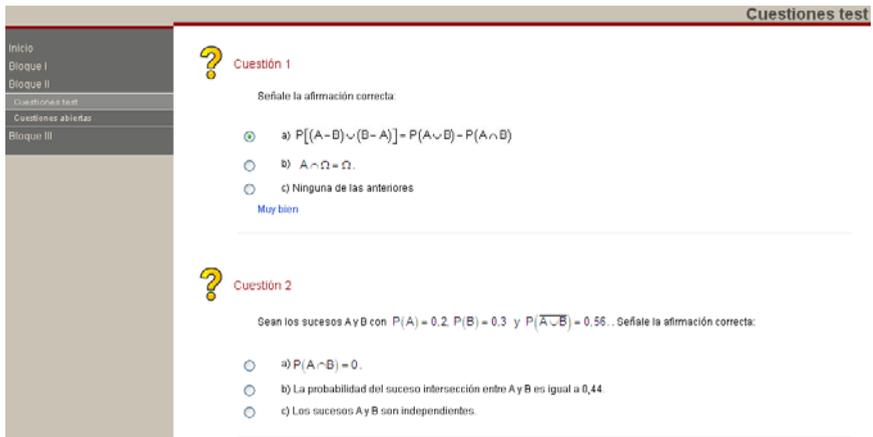


Figura 11. Ejemplo de autoevaluación empleando cuestiones test

Por su parte, en las cuestiones abiertas, la resolución se mantiene oculta hasta que el usuario decide comprobarla, tal y como se puede observar en la figura 12.

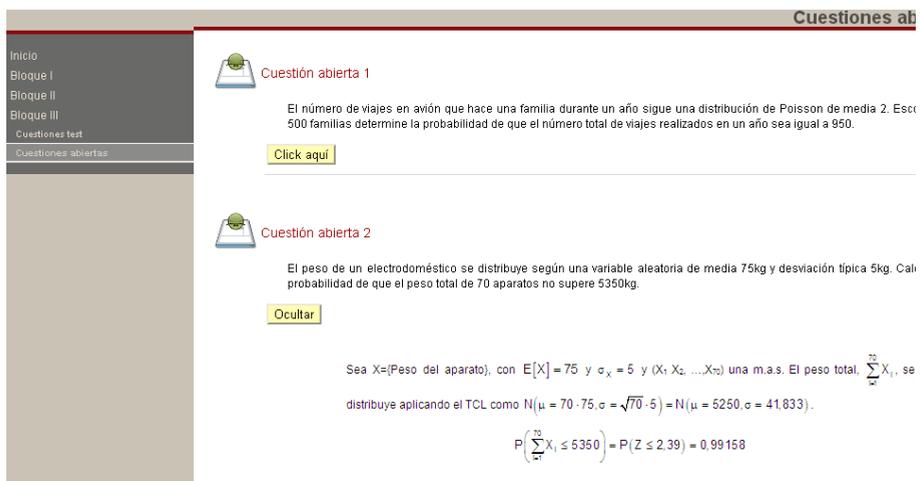


Figura 12. Ejemplo de autoevaluación empleando cuestiones abiertas

#### 4. Conclusiones

El proyecto OCW posibilita llegar a un gran número de personas interesadas en una materia. La participación en el mismo, a través del portal institucional de una Universidad, se ciñe a una estructura predeterminada, pero dentro de ella se tiene libertad para decidir la presentación de los materiales. En el caso del OCW comentado, hemos optado por la elaboración de unos materiales interactivos, en la medida de lo posible, favorecido por el gran avance de las herramientas informáticas en la actualidad, que permite, con un esfuerzo relativo, lograr esta interactividad.

Para el desarrollo del proyecto hemos analizado numerosos recursos disponibles en la red, debiendo destacar la elevada calidad de muchos de ellos. Es labor del profesor seleccionar los recursos, planificar de forma adecuada su uso y proporcionarlos en el momento más idóneo. Esta ha sido nuestra intención en la elaboración del material de clase.

El tiempo y esfuerzo dedicado a un proyecto de este tipo se ve recompensado por la opinión de los alumnos que lo utilizan, y la actitud con la que afrontan la asignatura, en comparación a experiencias anteriores utilizando metodologías y materiales más tradicionales.

El alumno afronta la asignatura de una forma más autónoma, ya que puede decidir por su cuenta qué estudiar y cómo hacerlo. La visualización y la experimentación consiguen que los conceptos le queden más claros y tiene la posibilidad de contrastar a través de la autoevaluación el progreso en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

#### Referencias Bibliográficas

1. M. Gisbert, J. Cela-Ranilla, y S. Isus, Las simulaciones en entornos TIC como herramientas para la formación en competencias transversales de los estudiantes universitarios, *TESI*, 11, 3 (2010) 352-370.
2. <http://ocw.mit.edu/index.html> (Fecha de consulta, junio 2013).
3. <http://www.ocwconsortium.org/> (Fecha de consulta, junio 2013).
4. <http://www.universia.es/index.htm> (Fecha de consulta, junio 2013).
5. <http://ocw.universia.net/es/> (Fecha de consulta, junio 2013).
6. <http://ocw.um.es/> (Fecha de consulta, junio 2013).

7. <http://ocw.um.es/cc.-sociales/estadistica-en-el-grado-de-marketing> (Fecha de consulta, junio 2013).
8. V. Romero, D. Berger, M. Healy y C. Aberson, Using cognitive learning theory to design effective on-line statistics tutorials, *Behaviour Research Methods, Instruments & Computers*, 32, 2 (2000) 246-249.
9. F. Arnaldos y Ú. Faura, Aprendizaje de los fundamentos de la probabilidad apoyado en las TICs, *@tic. revista d'innovació educativa*, 9 (2012) 131-139, <http://ojs.uv.es/index.php/attic/article/view/943/1464> (Fecha de consulta, junio 2013).
10. <http://www.java.com/es/download/index.jsp> (Fecha de consulta, junio 2013).
11. <http://demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html> (Fecha de consulta, junio 2013).
12. <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/DescartesWeb2.0/> (Fecha de consulta, junio 2013).



# INFLUENCIA DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN SOBRE EL RENDIMIENTO EN LAS PRUEBAS DE MATEMÁTICAS PISA-2009

**GONZALO SANZ-MAGALLÓN REZUSTA**

[sanmag@ceu.es](mailto:sanmag@ceu.es)

*Universidad San Pablo CEU / Departamento de Economía  
C/Julián Romea 23*

**MANUEL M. MOLINA LÓPEZ**

[manuelmaria.molinalopez@ceu.es](mailto:manuelmaria.molinalopez@ceu.es)

*Universidad San Pablo CEU / Instituto de Estudios de la Familia  
C/Julián Romea 23*

**M. CRISTINA AGUIRRE ARRABAL**

[aguiarr@ceu.es](mailto:aguiarr@ceu.es)

*Universidad San Pablo CEU / Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
C/Julián Romea 23*

**RESUMEN:** El artículo estudia la posible influencia de la disponibilidad de Tecnologías de la Información o TIC (ordenadores personales, software educativo y conexión a internet en el hogar) sobre los resultados del aprendizaje de matemáticas de los alumnos españoles. Para ello se explotan los microdatos del proyecto PISA (*Programme for International Student Assessment*) de la OCDE correspondientes a 2009, que cuantifica el nivel de conocimientos de alumnos de 15 años en matemáticas, lengua y ciencias. El análisis efectuado ha consistido en estimar una función de producción educativa en la que una de las variables explicativas es la presencia o no de TIC en el hogar. Las conclusiones del trabajo permiten afirmar que existe un considerable efecto negativo a raíz de la no disponibilidad de TIC, por lo que las políticas que faciliten estas tecnologías a las familias desfavorecidas permitirán una mejora del rendimiento educativo.

*Palabras claves:* Nuevas tecnologías; TIC; Eficiencia; Educación; Política educativa; Matemáticas; PISA-OCDE

**ABSTRACT:** The article examines the possible influence of the availability of Information Technology or ICT (personal computers, educational software and internet access at home) on mathematics learning outcomes of Spanish students. For this purpose microdata PISA (Programme for International Student Assessment) of the OECD for 2009 has been exploited. PISA quantifies the level of knowledge of pupils aged 15 in math, language and science. The analysis has estimated an educational production function in which one of the explanatory variables is the presence or absence of ICT in the

home. The conclusions of the study support the hypothesis that there is a considerable negative effect due to the unavailability of ICT at home, so policies that facilitate these technologies for disadvantaged families will improve educational performance.

*Keywords:* New technologies; TIC; Efficiency; Education; Educational policy; Mathematics; PISA-OECD

## Introducción

A la hora de medir el rendimiento del sistema educativo se suelen tratar diversos factores como el efecto de los compañeros sobre el alumno, sus capacidades innatas, los recursos del centro y las características socioeconómicas del propio estudiante. Un recurso que no suele ser considerado en los distintos estudios que tratan de medir el output educativo es el empleo de las nuevas tecnologías (TIC) en el hogar como parte del proceso educativo.

Los trabajos realizados sobre el empleo de las TIC en el aula determinan que la contribución de este tipo de instrumentos está condicionada fundamentalmente por la actitud del profesorado hacia el uso de las mismas (Sosin et al. 2004; Webb y Cox 2004; Assar et al. 2010). Para el caso de España, destaca la ausencia de estudios que avalen de forma empírica las potencialidades o limitaciones de algunas de las nuevas tecnologías aplicadas en las aulas (Gandol et al. 2012).

En la literatura de ámbito internacional hay diversidad de opiniones en cuanto a la relación existente entre factores como el sexo y el nivel socioeconómico con el correcto aprovechamiento de las TIC. Heemskerk et al. (2009) establecen una relación positiva entre ser mujer y el mejor aprovechamiento de las TIC, así como un mayor aprovechamiento de las clases menos favorecidas de este tipo de tecnologías. Por su parte, Biagi y Loi (2012), analizando la totalidad de países participantes en el Informe PISA no encuentran una relación significativa entre el rendimiento académico y el uso de nuevas tecnologías por parte del alumno, independientemente de la clase socioeconómica a la que pertenezca.

La ausencia de este tipo de estudios aplicados al caso de España hace que sea de interés investigar la relación entre el empleo de las TIC y el rendimiento académico. Las conclusiones de esta línea de investigación podrán servir para orientar las políticas educativas emprendidas por algunas regiones españolas, y evaluar la conveniencia de subvencionar las TIC a las familias desfavorecidas como vía para la mejora del rendimiento educativo.

Tras esta introducción, el apartado segundo revisa la literatura acerca del rendimiento de

la educación y el uso de las TIC; el tercero especifica los objetivos y datos empleados; en el cuarto se muestran los resultados del análisis y el apartado 5 presenta las principales conclusiones.

### 1. Eficiencia en la educación y el uso de las TIC

El ámbito de la economía de la educación ha experimentado un notable avance en los últimos años, siendo las cuestiones relacionadas con los factores que miden la eficiencia los que más han sido tratados (Cordero et al. 2013). Cada vez es más habitual encontrarse con literatura acerca de la eficiencia del sistema educativo que trata de identificar las distintas variables que la explican. Una de las formas más habituales de medir la citada eficiencia sería mediante la función de producción de la educación definida por Hanushek (1979), en donde se mide el *output* del proceso educativo de un alumno en una escuela determinada ( $A_{ij}$ ) en base a una serie de *inputs* escolares ( $S_{ij}$ ), las características socioeconómicas del alumno ( $B_{ij}$ ), la influencia de los compañeros ( $P_{ij}$ ) y las capacidades innatas del alumno ( $I_{ij}$ ). La función de producción es la siguiente:

$$A_{ij}=f(S_{ij}, B_{ij}, P_{ij}, I_{ij}) \quad (1)$$

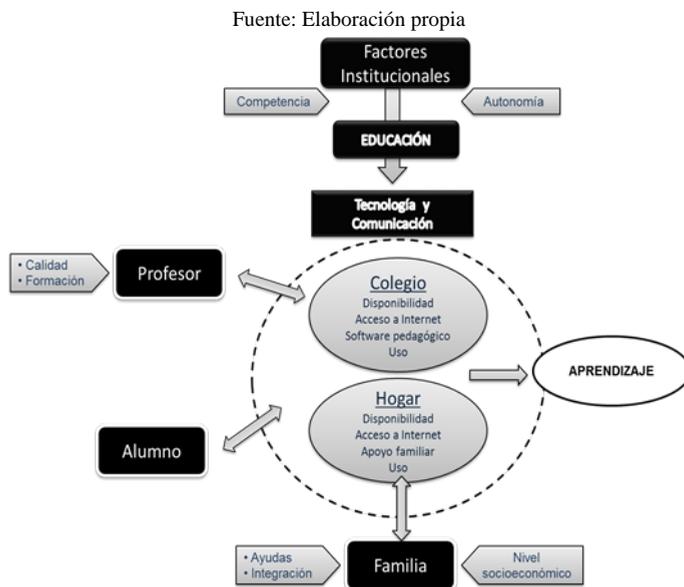
Doncel et al. (2012) analizan, para el período 2005-2009, los resultados obtenidos en las pruebas de Conocimientos y Pruebas Indispensables (CDI)<sup>1</sup> de sexto de primaria en 1.208 colegios de la Comunidad de Madrid, entre los que se encuentran tanto los de titularidad pública, como privada y concertada. El estudio demuestra que los centros privados y concertados obtienen un mejor resultado académico. A su vez, determina que un factor significativo de la eficiencia es el nivel socioeconómico de los padres. Este puede ser un motivo que condicione la posible tendencia de los centros privados y concertados a tener unos mejores resultados académicos (Hanushek et al. 2005). Otros estudios, controlando el posible efecto que puede tener el proceder de un entorno socioeconómico más elevado, determinan que el *output* educativo de los centros concertados es mayor que el de los públicos (Böhlmark y Lindhl, 2008).

En el rendimiento académico del alumno influyen, pues, diversos factores tanto de índoles familiar (nivel socioeconómico), institucional (existencia de competencia, política educativa de las administraciones) o personal (factores cognitivos del individuo). A continuación se muestra un gráfico que trata de relacionar los factores determinantes del rendimiento académico, incluyendo el papel que juegan las TIC en el proceso.

---

<sup>1</sup> Las pruebas CDI son realizadas a los alumnos de la Comunidad de Madrid que cursan sexto de primaria. Se llevan a cabo desde el año 2005.

Gráfico 1. Principales factores condicionantes del rendimiento académico



En cuanto al impacto de las TIC en el rendimiento académico hay divergencia de opiniones. Algunos estudios sostienen que el uso de estas nuevas tecnologías tiene un efecto positivo sobre el output educativo, estando este fundamentalmente condicionado por la actitud del profesorado hacia el uso de las mismas (Sosin et al. 2004; Webb y Cox 2004; Assar et al. 2010). Otros en cambio destacan la ausencia de tal efecto (CECE, 2011).

Gandol et al. (2012) analizan, a través de una revisión de las publicaciones más recientes, las limitaciones y potencialidades de las Pizarras Digitales Interactivas(PDI), concluyendo que el uso por sí mismo de este tipo de tecnologías no garantiza una mejora en la calidad educativa, teniendo que ir acompañado el empleo de TIC en los centros educativos de una estrategia global de todos los agentes del colegio implicados, en donde la formación del profesorado tiene un papel fundamental. Así pues, la forma mediante la cual el docente las empleó propiciará que estas puedan contribuir o no al rendimiento académico del alumno (Webb y Cox, 2004; Glover y Miller 2006).

En general, aunque el profesorado tenga medios tecnológicos a su disposición para impartir docencia, suele ser poco innovador y tiende a utilizar siempre los mismos

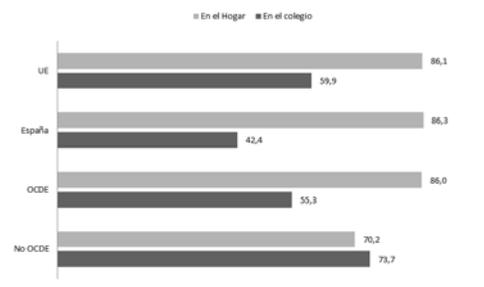
programas (Glover y Miller 2006). Esta actitud suele estar justificada en la mayoría de los casos por una posible tecnofobia del personal docente (Sáez y Jiménez, 2011). El Estudio de la Fundación Telefónica (2011) revela que gran parte del profesorado tiende a usar siempre los mismos materiales educativos, usando los de fácil ejecución frente a los que puedan ser considerados más complejos y eficaces. A su vez determina que el profesorado que emplea TIC en la docencia suele valorar de forma positiva el uso de la misma.

Por su parte, Law et al. (2008) determinan que el uso de las TIC tiene un impacto positivo en el rendimiento académico, estando sujeto a la forma de implantarse y la visión que el equipo directivo del centro tenga de las mismas. Así pues, el pleno apoyo de la dirección será necesario para que ésta tenga una repercusión positiva en el profesorado y alumnado (Eickelmann, 2011).

Otro factor condicionante del buen aprovechamiento de las nuevas tecnologías en el rendimiento académico es el sexo. Heemskerk et al. (2009) determinan que las chicas tienden a conseguir mayores beneficios que los chicos, siendo el efecto positivo para ambos sexos. Este mayor aprovechamiento por parte de las chicas, que en la mayoría de los casos parten con unos niveles de conocimiento en TIC algo inferiores, estaría motivado por una mayor concentración y proactividad en su uso.

Cabe destacar el hecho de que los estudiantes tienden a usar los ordenadores en casa con más frecuencia en comparación con los centros educativos, pese al esfuerzo económico que éstos realizan en este tipo de inversiones (Molina, 2013). Los alumnos españoles, pese a encontrarse al mismo nivel de la OCDE en cuanto a la utilización de computadoras en casa, están por debajo de muchos países en donde su uso roza la totalidad de la población. Destaca que los que más emplean el ordenador en casa tienden a hacerlo para chatear o buscar cosas en internet, siendo el uso de software una de las prácticas menos habituales (OCDE, 2010).

**Gráfico 2. Alumnos de 15 años que emplean el ordenador en casa y en el hogar (En porcentaje)**



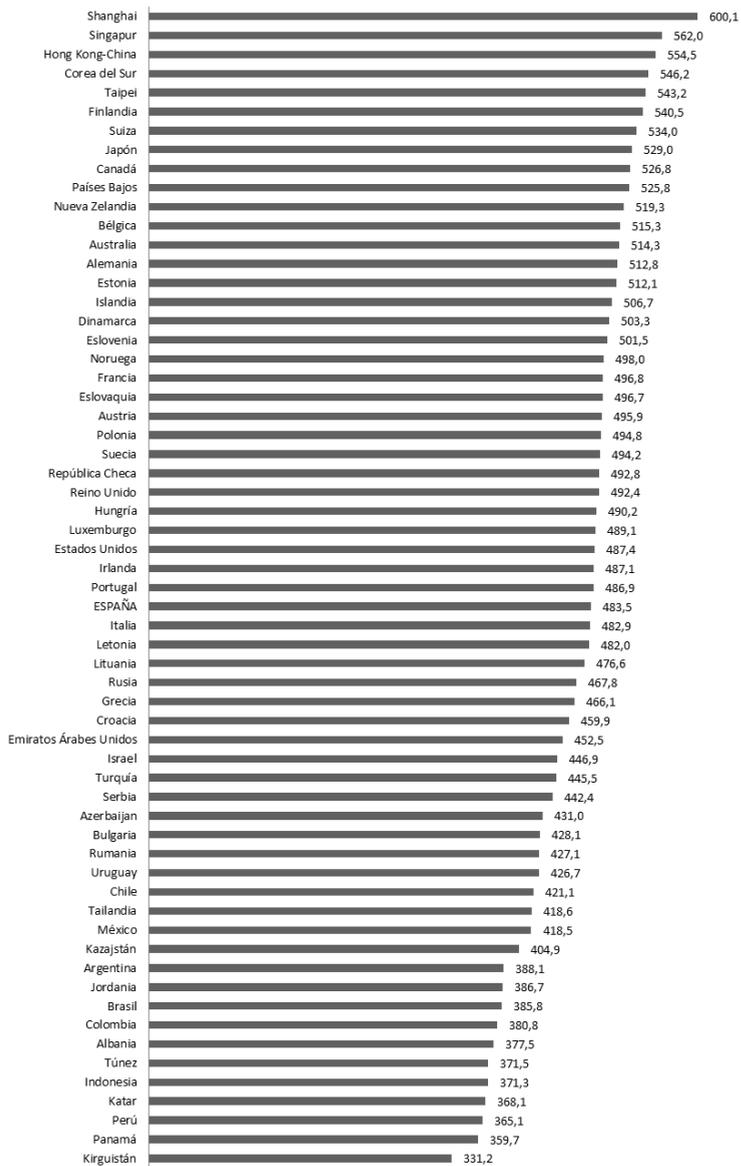
En cuanto al uso de las TIC en la escuela destaca el hecho que, pese a que en un gran

número de escuelas dispone de TICs para el proceso de aprendizaje, son pocas las que realmente las utilizan eficazmente (OCDE, 2010)

Biagi y Loi (2012) estudian el impacto de las nuevas tecnologías en los países participantes en el Informe PISA 2009 de forma agregada. Para ello explotan el cuestionario realizado a las familias por PISA 2009, tratando de relacionar el uso de las TIC con el resultado en las pruebas de matemáticas, ciencias y lectura. En su trabajo se distingue la distinta aportación de las nuevas tecnologías en función del estrato socioeconómico del alumno, determinando una ausencia de relación entre uso de TIC y mejora en las pruebas realizadas, incluso después de considerar el factor socioeconómico. Cabe destacar que el anterior estudio emplea como muestra la totalidad de países participantes en el Proyecto PISA 2009, sin tener en cuenta las divergencias entre estos en lo que al uso de nuevas tecnologías se refiere.

El Gráfico 3 muestra la puntuación obtenida en las pruebas de matemáticas en los distintos países participantes en las pruebas PISA, poniéndose de manifiesto el bajo resultado obtenido por los alumnos españoles (483 puntos) en comparación con el resto. A la cabeza se encuentra Shangai con 600 puntos, seguido de otros países asiáticos como Singapur (562 puntos), China-HongKong (555 puntos) y Corea del Sur (546 puntos). El primer país europeo en la lista es Finlandia (541), seguido de Suiza (534), Países Bajos (536) y Bélgica (515).

---



**Gráfico 3. Puntuación obtenida por alumnos de 15 años en las pruebas PISA-2009 de matemáticas según país**

Fuente: PISA 2009

## 2. Objetivos y metodología

Nuestro objetivo es estudiar la relación entre disponibilidad en el hogar de las TIC (ordenadores, software educativo y la conexión a internet) con los resultados académicos obtenidos en las pruebas de matemáticas del proyecto PISA-2009. A partir de los factores expuestos en la revisión de la literatura realizada, planteamos las siguientes hipótesis:

H<sub>1</sub>0: Los alumnos que carezcan del acceso a las TIC en su hogar se verán penalizados en sus resultados académicos.

H<sub>2</sub>0: Las alumnas obtienen mayores ventajas de las TIC que los alumnos.

H<sub>3</sub>0: Para alumnos con menor nivel socioeconómicos el coste de no disponer de TIC en el hogar es mayor.

El proyecto PISA 2009, cuya muestra en España comprende 25.887 alumnos, incluye distintas variables que pueden afectar al rendimiento académico del alumno. Las competencias evaluadas son conocimientos de matemáticas, ciencias y lectura a los 15 años, caracterizándose la oleada del año 2009 por ser la de mayor participación internacional (74 países frente a los 32 del año 2000) y con mayor consolidación de los análisis regionales, permitiendo una amplia comparativa dentro del país. Así, en la oleada del año 2000 España participó como una sola muestra estatal, mientras que en el año 2009 se han analizado todas las comunidades autónomas a excepción de tres.

Nuestro análisis se realizará para el conjunto nacional, estimándose el impacto de la disponibilidad de TIC en los resultados de las pruebas de matemáticas. Para ello se incluirán como posibles variables independientes la disponibilidad de ordenador, software y conexión a internet en casa; la titularidad del centro educativo; el ratio ordenador/alumnos en el colegio; la lengua materna del alumno; y su sexo. Para estimar los resultados se han utilizado las técnicas recomendadas en el *PISA Data Analysis Manual* (2009) de la OCDE, que implica realizar las estimaciones a partir de cinco valores plausibles y ochenta réplicas de cada alumno.

### 3. Resultados

#### 3.1. Descripción de la muestra

De la muestra utilizada el 60,4% de los alumnos asiste a escuelas públicas y el 39,6% a privadas. Atendiendo al sexo, la distribución es bastante similar: un 49,2% son alumnas y un 50,8% alumnos. Respecto a la lengua materna, para el 84,5% de los estudiantes coincide con la utilizada en el examen PISA, frente al 15,5% de alumnos que hablan en su casa otro idioma.

**Tabla 1. Distribución de los alumnos de la muestra según sexo, lengua materna y titularidad del colegio**

	Nº	%
Alumnas	12.746	49,2
Alumnos	13.141	50,8
Lengua del examen es la lengua materna	21.560	84,5
Lengua del examen distinta de la materna	3.953	15,5
En escuela pública	15.336	60,4
En escuela privada	10.034	39,6

Fuente: PISA 2009

El uso de las nuevas tecnologías en los hogares es superior al que se hace en las escuelas: un 86% frente a un 42%. En la Tabla 2 se muestra la disponibilidad de recursos en el hogar: ordenador, acceso a internet y disponibilidad de software educativo, destacando la alta disponibilidad de ordenadores en los hogares, seguida de internet y software educativo.

**Tabla 2. Disponibilidad de recursos en casa del alumno**

	Sí		No	
	Nº	%	Nº	%
Ordenador	24.107	94,0	1.535	6,0
Internet	22.394	87,4	3.223	12,6
Software educativo	13.149	52,0	12.114	48,0

Fuente: PISA 2009

Por su parte el nivel socioeconómico, medido en PISA a través del indicador sintético ESCS, que engloba nivel educativo, cultural y económico de la familia del alumno, toma un valor promedio en los centros públicos del -0,5, frente a 0,1 en los privados,

siendo el valor 0 la media de la OCDE. Esta distancia de 0,6 puntos entre centros privados y públicos es ligeramente inferior al promedio de países participantes en PISA. Cabe señalar, a su vez, que el estatus socioeconómico de las familias de alumnos en centros privados y concertados en España es inferior al promedio de la OCDE: 0,1 de ESCS en España, frente a 0,4 en el conjunto de países.

### 3.2. Resultados econométricos

A continuación se muestra el efecto de disponer en el hogar de ordenador, software educativo e internet en la puntuación obtenida en las pruebas de matemáticas de PISA. Se han realizado tres regresiones lineales para cada tipo de tecnología, tratando de contrastar el impacto de las tecnologías mencionadas en el resultado obtenido considerando el efecto de diversos factores. Las tres regresiones vienen representadas por las siguientes tres ecuaciones respectivamente,

$$A_i = C + \beta_1 \text{TIC} \quad (2)$$

$$A_i = C + \beta_1 \text{TIC} + \beta_2 \text{ESCS} \quad (3)$$

$$A_i = C + \beta_1 \text{TIC} + \beta_2 \text{ESCS} + \beta_3 \text{PRIV} + \beta_4 \text{LENGUA} \quad (4)$$

donde  $A_i$  es el resultado obtenido en matemáticas por el alumno  $i$ ,  $\beta_{\text{TIC}}$  la no disponibilidad de una tecnología en cuestión (ordenador, internet o software educativo),  $\beta_{\text{ESCS}}$  el factor socioeconómico,  $\beta_{\text{PRIV}}$  estudiar en un centro privado y  $\beta_{\text{LENGUA}}$  tener una lengua materna distinta a la oficial. Las variables  $\beta_{\text{TIC}}$ ,  $\beta_{\text{PRIV}}$  y  $\beta_{\text{LENGUA}}$  se han codificado como una dummy.

**Tabla 3. Importancia de los recursos disponibles en casa en las pruebas de matemáticas**

	Variable Independiente	Beta	Intervalo de confianza al 95%	
			Mínimo	Máximo
<b>Ec.1</b>	Constante	547,26	531,41	563,12
	<b>No tener ordenador</b>	<b>-57,67</b>	<b>-71,63</b>	<b>-43,71</b>
<b>Ec.2</b>	Constante	527,66	513,24	542,09
	ESCS	28,4	25,38	31,43
	<b>No tener ordenador</b>	<b>-31,06</b>	<b>-43,88</b>	<b>-18,23</b>
<b>Ec.3</b>	Constante	518,13	498,57	537,69
	ESCS	26,84	23,95	29,74
	Estudiar en centro privado	12,18	5,45	18,91

	Lengua materna distinta	-6,73	-12,69	-0,76
	<b>No tener ordenador</b>	<b>-30,6</b>	<b>-43,45</b>	<b>-17,74</b>
<b>Variable Independiente</b>		<b>Beta</b>	<b>Intervalo de confianza al 95%</b>	
			<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>
<b>Ec.1</b>	Constante	507,38	499,70	515,06
	<b>No disponer Software educativo</b>	<b>-14,56</b>	<b>-19,13</b>	<b>-9,99</b>
<b>Ec.2</b>	Constante	500,32	493,51	507,13
	ESCS	29,61	26,89	32,33
	<b>No disponer Software educativo</b>	<b>-3,63</b>	<b>-7,57</b>	<b>0,32</b>
<b>Ec.3</b>	Constante	490,45	476,88	504,01
	ESCS	28	25,37	30,63
	Estudiar en centro privado	12,47	5,85	19,1
	Lengua materna distinta	-6,51	-12,48	-0,54
	<b>No disponer de Software educativo</b>	<b>-3,51</b>	<b>-7,4</b>	<b>0,38</b>
<b>Variable Independiente</b>		<b>Beta</b>	<b>Intervalo de confianza al 95%</b>	
			<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>
<b>Ec.1</b>	Constante	536,97	527,40	546,54
	<b>No disponer conexión a internet</b>	<b>-44,4</b>	<b>-51,3</b>	<b>-37,49</b>
<b>Ec.2</b>	Constante	512,66	503,90	521,43
	ESCS	28,16	25,27	31,05
	<b>No disponer conexión a internet</b>	<b>-15,77</b>	<b>-22,7</b>	<b>-8,84</b>
<b>Ec.3</b>	Constante	504,58	489,58	519,59
	ESCS	26,8	24,08	29,51
	Estudiar en centro privado	11,07	4,11	18,04
	Lengua materna distinta	-7,22	-13,21	-1,24
	<b>No tener conexión a internet</b>	<b>-15,04</b>	<b>-21,93</b>	<b>-8,15</b>

Fuente: Elaboración propia con datos de PISA 2009

En primer lugar, sin incluir ninguna variable de control, el efecto de no tener ordenador en el hogar supone 57,7 puntos menos en las pruebas PISA (con un intervalo de confianza a nivel de significación del 95% que oscila entre 71,6 y 43,71). Controlando la disponibilidad de ordenador con el nivel socioeconómico (ESCS), la influencia sigue siendo notable, de 31,1 puntos. Similar es el efecto si añadimos en la ecuación el factor estudiar en un centro privado o el hecho de que la lengua materna sea

distinta de la oficial.

La influencia de la disponibilidad de software educativo en el hogar es bastante menor, produciendo su ausencia 14,6 puntos menos en las pruebas de matemáticas si no consideramos otros factores y reduciéndose en 3,6 al incluir el ESCS. Al igual que ocurre con el ordenador, otros factores como estudiar en un centro privado o que la lengua materna sea distinta de la oficial no modifica la contribución del software al resultado académico.

Por último, no disponer de conexión a internet en el hogar propicia obtener 44,4 puntos menos en las pruebas de matemáticas, descendiendo a 15,8 puntos al incluir el efecto del ESCS y manteniéndose similar este efecto al incluir otras variables como la titularidad del centro o la lengua materna del estudiante.

Por lo tanto, la disponibilidad de ordenador en el hogar es el elemento que potencia en mayor medida obtener mejores resultados en matemáticas, seguido de la disponibilidad de conexión a internet y del software educativo.

La Tabla 4 muestra la influencia de la disponibilidad de ordenador y del resto de variables independientes distinguiendo entre dos grupos de alumnos según el nivel socioeconómico de la familia: el más alto y el más bajo, tras dividir a los alumnos en tres niveles, atendiendo a su ESCS. Puede comprobarse que no disponer de ordenador en el hogar afecta por igual a alumnos de clase social alta y baja, mientras que el efecto positivo de estudiar en un centro de titularidad privada es mayor entre los alumnos de un nivel socioeconómico inferior.

**Tabla 4. Impacto del ordenador en las pruebas de matemáticas según el estrato socioeconómico**

	Nivel socioeconómico bajo			Nivel socioeconómico alto		
	Coef.	Intervalo de confianza al 95%		Coef.	Intervalo de confianza al 95%	
		Mínimo	Máximo		Mínimo	Máximo
R-Cuadrado	0,06	0,04	0,08	0,05	0,03	0,07
Constante	509,38	486,67	532,09	532,15	494,16	570,14
ESCS	25,23	17,29	33,17	28,87	21,91	35,82
Ser privado	15,53	7,30	23,76	8,16	-0,59	16,91
Lengua materna distinta a la oficial	-4,57	-12,21	3,07	-14,63	-25,00	-4,26
<b>No tener ordenador</b>	<b>-30,05</b>	<b>-46,95</b>	<b>-13,16</b>	<b>-30,86</b>	<b>-58,28</b>	<b>-3,44</b>

Fuente: Elaboración propia con datos de PISA 2009

Finalmente, en la Tabla 5 se muestra el impacto diferenciado sobre las pruebas de matemáticas en hombres y mujeres de las variables estudiadas: titularidad del centro, disponibilidad de TIC en casa y disponibilidad de TIC en el colegio. Puede comprobarse que la disponibilidad de TIC contribuye de forma similar a hombres y mujeres, mientras que no se puede determinar que la mayor disponibilidad de TIC en el centro educativo tenga un efecto positivo en el rendimiento académico del alumno.

**Tabla 5. Impacto del uso de TIC en casa y en el hogar según el sexo**

Variable Independiente	Mujeres			Hombres		
	Beta	Intervalo de confianza al 95%		Beta	Intervalo de confianza al 95%	
		Mínimo	Máximo		Mínimo	Máximo
R-Cuadrado	0,16	0,12	0,20	0,14	0,12	0,17
Constante	469,91	458,83	480,98	478,88	469,36	488,39
ESCS	27,81	23,37	32,25	26,11	23,35	28,88
<b>TIC en casa</b>	<b>6,95</b>	<b>2,98</b>	<b>10,91</b>	<b>7,54</b>	<b>5,22</b>	<b>9,86</b>
<b>TIC en colegio</b>	<b>1,09</b>	<b>-2,57</b>	<b>4,75</b>	<b>1,64</b>	<b>-0,86</b>	<b>4,14</b>
Ser privado	11,23	2,89	19,57	10,91	3,98	17,84

Fuente: Elaboración propia con datos de PISA 2009

#### 4. Conclusiones y discusión

Según el análisis realizado, podemos afirmar que la disponibilidad de las nuevas tecnologías de la información en el hogar tiene un impacto positivo y de bastante alcance en los resultados en las pruebas de matemáticas de PISA 2009. De las distintas modalidades de TIC estudiadas, la de mayor efecto es el ordenador, situándose a continuación la conexión a internet y por último la disponibilidad de software educativo.

Las posibles razones que expliquen esta relación pueden ser de dos tipos. En primer lugar, en la actualidad es habitual que los profesores de enseñanza primaria y secundaria propongan a los alumnos la realización, a través de internet u otras plataformas, de ejercicios de matemáticas de refuerzo y complementarios a los realizados en la clase. La no disponibilidad de TIC en el hogar supone una desventaja para estos alumnos.

Una segunda posible explicación tiene que ver con las posibilidades que ofrece internet y el ordenador para aumentar la eficiencia de las tareas, deberes y trabajos a realizar para el conjunto de asignaturas. En este sentido, los alumnos que carezcan de TIC en el hogar deberán emplear más tiempo en la realización de estas tareas, quedando limitado para ellos el tiempo disponible para estudiar matemáticas y el resto de asignaturas.

En cuanto al posible impacto diferenciado de las TIC, no se aprecian influencias distintas entre las clases sociales bajas y altas, ni tampoco distinguiendo entre sexos. Por otra parte, no hay indicios de que el rendimiento de los alumnos de 15 años en las pruebas de matemáticas se vea influido por la mayor o menor disponibilidad de TIC de los centros.

#### Referencias bibliográficas

1. K.Sosin, B.J. Blecha, R. Argawal, R.L. Batlett and J.I. Daniel, Efficiency in the Use of Technology in Economic Education: Some Preliminary Results, *The American Economic Review*, 94(2004), 253-258
2. M.Webb and M. Cox, A Review of Pedagogy Related to Information and Communications Technology , *J. Technology, Pedagogy and Education*, 13(2004), 235-286
3. S. Assar, R. El Amrani and R. Watson, ICT and education: A critical role in human and social development, *J. Information Technology for Development*. 16(2010), 151-158

4. F. Gandol, E. Carrillo and M.A. Prats, Potencialidades y limitaciones de la pizarra digital interactiva. Una revisión crítica de la literatura, *Revista de Medios y Educación*, 40(2012), 171-183
5. I. Heemskerck, I. Volman and W. Admiraal, Gender Inclusiveness in Educational Technology and learning experience of girls and boys, *Journal of Research on Technology in Education*, 41( 2009), 256-276
6. F. Biagi and M. Loi, *ICT and Learning: Results from PISA 2009* (Joint Research Centre, Institute for the Protection and Security of the Citizen, Luxembourg, 2012)
7. J.M. Cordero, E. Crespo, F. Pedraja, Educational achievement and determinants in PISA: A review of literature in Spain, *Revista de Educación*, 362 (2013)
8. E. Hanushek, Conceptual and Empirical Issues in the Estimation of Educational Production Functions, *Journal of Human Resources*, 351(1979), 351-388
9. L.M. Doncel, J.Sáinz, I. Sanz, An Estimation of the Advantage of Charter over Public Schools, *KYKLOS*, 65(2012), 442-463
10. E. Hanushek, J. Kain, S. Rivkin, G. Branch, Charter school quality and parental decision making with school choice, *National Bureau of Economic Research* , 11252(2005)
11. A. Böhlmark and M. Lindhal, Does School Privatization Improve Educational Achievement? Evidence from Sweden's Voucher Reform, *IZA*, 3691(2008)
12. CECE, *Informe de Tecnología Educativa 2011*(Instituto de Técnicas Educativas de la CECE, Madrid, 2012)
13. D. Glover and D. Miller, Running with technology: the pedagogic impact of the large-scale introduction of interactive whiteboards in one secondary school, *Journal of Information Technology for Teacher Education*, 10 (2006), 257-278
14. J.M. Sáez and P.A. Jiménez, La aplicación de la pizarra digital interactiva: un caso en la escuela rural en primaria, *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 26(2011), 1-16
15. Fundación Telefónica, *Las TIC en la educación, Realidad y Expectativas* (Ariel, Madrid, 2011)
16. N. Law, M.W. Lee, A. Chan, A. Yuen, Factors Influencing the Impact of ICT-use on Students' Learning, *The Proceedings of IRC*, (2008), 1-15
17. B.Eickelman, Supportive and hindering factors to a sustainable implementation of ICT in schools, *Journal for educational research online*, 3 (2011), 75-103
18. M.M. Molina, Reformas en el sistema educativo español para potenciar la eficiencia y la libertad de elección de los padres. Resumen de las conclusiones del Workshop ELEDUCA celebrado en abril de 2012, *Documentos de Trabajo ELEDUCA. CEU Ediciones*, 2 (2013)

19. OECD, *Are the new millenium lernerers making the grade? Technology use and education performance in PISA*, (Center for Educational Research and Innovation, 2010)
20. OECD, *PISA Data Analysis Manual SPSS, SECOND EDITION*, (Programme for International Student Assessment , 2009)

# AN INVESTIGATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN JOB CHARACTERISTICS AND THE GENDER WAGE GAP

**JAUME GARCÍA**

[jaume.garcia@upf.edu](mailto:jaume.garcia@upf.edu)

*Departament d'Economia i Empresa, Universitat Pompeu Fabra*

**PEDRO JESÚS HERNÁNDEZ**

[nani@um.es](mailto:nani@um.es)

*Departamento de Fundamentos del Análisis Económico, Universidad de Murcia*

**ANGEL LÓPEZ NICOLÁS**

[angel.lopeznicolas@gmail.com](mailto:angel.lopeznicolas@gmail.com)

*Departamento de Economía, Universidad Politécnica de Cartagena*

**ABSTRACT:** This paper re-examines gender wage differences, taking into account not only worker characteristics but also job characteristics. Consideration of a wide set of “job quality” indicators can explain a fraction of the wage gap that would otherwise be attributed to pure wage discrimination. In any case, the fraction of the wage gap that remains associated to differential rewards for identical factors across sexes is still substantial. Our results suggest that in order to avoid overestimation of the fraction of the wage gap attributable to discrimination, it is necessary to control for job characteristics.

**JEL classification:** J7, C4

**Keywords:** wage differentials, gender discrimination

**RESUMEN:** Este artículo evalúa las diferencias salariales por género teniendo en cuenta no sólo las características de los trabajadores sino las del puesto de trabajo. La consideración de un amplio conjunto de indicadores de "calidad del trabajo" explica una fracción de la brecha salarial que de otra manera sería atribuida a la discriminación. No obstante la fracción de la brecha salarial que refleja una remuneración diferencial entre géneros para el mismo factor es sustancial. Nuestros resultados sugieren que es necesario controlar por características del puesto de trabajo en aras a evitar la sobreestimación del componente discriminatorio de la brecha salarial entre hombres y mujeres.