CONTRASTES
Revista Internacional de Filosofía

Volumen VIII (2003) • ISSN: 1136-4076

SUMARIO

Representación y conocimiento en matemáticas: Una crítica al planteamiento de P. Kitcher

ANTONIO CABA
Universidad de Málaga

RESUMEN

En este artículo se analizan críticamente algunos aspectos de la teoría de Kitcher sobre el conocimiento matemático. Se muestra que su definición de conocimiento carece de una caracterización convincente del concepto de verdad. Su teoría evolutiva del conocimiento matemático se centra en la idea kuhniana de que la historia de un campo científico determinado se puede entender como una secuencia de prácticas racionales; sin embargo, su caracterización de tales transiciones entre prácticas es bastante imprecisa. Por último, su construcción de la aritmética como una teoría idealizada, siguiendo algunas tesis de Mill conduce a un cierto tipo de apriorismo, lo cual contradice uno de los aspectos fundamentales de las tesis de Kitcher.

PALABRAS CLAVE:
KITCHER, CONOCIMIENTO MATEMÁTICO, VERDAD MATEMÁTICA, MILL

ABSTRACT

Several aspects of the Kitcher's theory about the nature of mathematical knowledge are critically analysed in this paper. It is showed that his definition of knowledge is lacked a convincent caracterization of truth. His evolutionary theory of mathematical knowledge is focussed on the Kuhnian insight that the history of a scientific field can be understood as a sequence of rational practices; neverheless, his caracterization of these rational interpractice transitions is quite imprecise. Lastly, his construction of arithmetic as a idealized theory leads to a certain kind of apriorism, that contradicts one of the fundamental claims of Kitcher's thesis.

KEY WORDS
KITCHER, MATHEMATICAL KNOWLEDGE, MATHEMATICAL TRUTH, MILL

© *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía*, vol. VIII (2003), pp. 5-22. ISSN: 1136-4076
Sección de Filosofía, Universidad de Málaga, Facultad de Filosofía y Letras
Campus de Teatinos, E-29071 Málaga (España)

El punto de vista de Kitcher sobre la matemática, que él mismo ha denominado recientemente constructivismo naturalista[1], es bien conocido y se sitúa en una línea iconoclasta respecto al neofregeanismo, tal y como ha señalado Hersh en su *What is mathematics, really?*[2] Su principal objetivo es explicar cómo llegamos a obtener el conocimiento matemático del que realmente disponemos. Esto requiere una clarificación, tanto de los orígenes de tal conocimiento como de su proceso de crecimiento. En última instancia, su pretensión es ofrecer una visión no platónica del contenido de los enunciados matemáticos que, al tiempo que soluciona los problemas en que se ven inmersos los antiplatonistas, haga justicia a las cuestiones que inspiran el platonismo. En particular, defiende que el proceso por el cual obtenemos el conocimiento matemático que tenemos en la actualidad se incoa en un conjunto disperso de creencias acerca de manipulaciones de objetos físicos. Así pues, estas primeras creencias se encuentran garantizadas por la percepción sensorial ordinaria. Con idea de explicar el proceso por el cual se llega a adquirir conocimiento matemático a partir de tan humildes principios, Kitcher precisa una teoría del contenido de los enunciados matemáticos que muestre cómo pueden ser conocidos sobre la base de la percepción. Ésta es una tarea que ya ha sido emprendida por otros autores[3]. Pero, como señalaremos más adelante, el planteamiento de Kitcher supone una novedad, puesto que, a su juicio, el proceso histórico que garantiza nuestro conocimiento matemático tiene su origen en la percepción ordinaria de un agente ideal que realiza operaciones tales como las de segregar y coleccionar objetos a partir de un conjunto dado.

El análisis de los enunciados matemáticos que Kitcher lleva a cabo tiene una carga historicista nada despreciable. Según él, lo que verdaderamente creían nuestros ancestros acerca de algún hecho matemático concreto era que un agente ideal realizaba tales operaciones. Así se comprenden afirmaciones como que

1 No siempre autocalificó su enfoque de este modo. En un primer momento lo denominó 'empiricismo', pero la acusación de 'fetiche filosófico' lo animó al cambio (Véase 1988a p.321, n.2). En cualquier caso, conviene indicar que su planteamiento ha ido evolucionando a lo largo del tiempo.

2 Véase Hersh, 1997, pp. xii. El neofregeanismo, término acuñado por el propio Kitcher, perpetúa el punto de vista heredado de que la teoría de conjuntos es la única parte de las matemáticas que merece consideración filosófica. Pese a que se ha abandonado la idea de hallar unos fundamentos fuera de toda duda, esta doctrina sigue suponiendo que la única tarea de la filosofía de las matemáticas es el estudio de los fundamentos. Para Hersh, otros iconoclastas notables que responden críticamente a este planteamiento (aparte de él mismo y del ya citado Kitcher) son P. J. Davis, P. Ernest y J. Echeverría.

3 Como he desarrollado en esta misma revista (años 1997 y 1998), el estructuralismo que defienden Resnik (1997) y Shapiro (1997) adopta un punto de partida semejante.

«la matemática consiste en una serie de especificaciones de las potencias constructivas de un sujeto ideal» (1984, p. 160) y que «en cualquier estadio de la historia de las matemáticas el lenguaje matemático contendrá expresiones que se refieren o que cualifican las operaciones del sujeto ideal» (*ibid.*, p. 177). Esta teoría pretende, asimismo, proporcionar una explicación del contenido de los enunciados matemáticos. Se entiende así su afirmación de que «los enunciados que aparecen en los libros de matemáticas describen operaciones matemáticas ideales (más exactamente, las operaciones ideales de un sujeto ideal)» (*ibid.*, p. 130). Por otra parte, la plasmación concreta de semejantes idealizaciones tiene lugar en lo que Kitcher ha denominado una 'práctica matemática'. Y es precisamente, a través de transiciones racionales entre tales prácticas, como las matemáticas han llegado a evolucionar hasta nuestra práctica presente. Como se verá más adelante, esta teoría del agente ideal que desarrolla nuestro autor encuentra un soporte en los planteamientos de Mill, pero para su comprensión estimamos conveniente esbozar brevemente su visión naturalista y pergeñar algunos comentarios críticos que, a mi juicio, emergen de su punto de vista.

I. El primero de ellos se incardina en la misma definición de conocimiento que proporciona. Ya desde las primeras líneas de su trabajo más relevante, *The nature of mathematical knowledge*, y a modo de declaración de intenciones, indica Kitcher que su punto de partida es la obvia e incontrovertible tesis de que «la mayor parte de las personas sabe algunas matemáticas, y que hay algunas personas que saben muchas matemáticas» (1983, p. 3). Pero, pese a entenderse como un saber compartido, se considera comúnmente admitida la idea de que el modo de conocer los enunciados matemáticos posee algunas características diferenciales con respecto al que se tiene en el caso de las otras ciencias. Gran parte de la tradición filosófica ha calificado este hecho diciendo que la matemática es a priori, pero no por eso se ha aceptado sin discusión tan distinguido estatus para el conocimiento en matemáticas. Entre los que han cuestionado las tesis aprioristas señala Kitcher a Quine, Putnam y Lakatos, pero ninguno de ellos (a su juicio) ha sido capaz de dar una explicación satisfactoria y sistemática del conocimiento matemático. Así pues, el rasgo distintivo que, según el propio Kitcher, tiene su anti-apriorismo es que él sí se siente capaz de proporcionar una teoría aceptable del conocimiento en el ámbito de la matemática. Dicho en otros términos, Kitcher pretende ofrecer una explicación satisfactoria del conocimiento matemático sin presuponer la obvia interpretación del platonismo apriorista.

Pero el asunto se presenta como problemático ya desde un principio, puesto que no puede decirse que la determinación de lo que constituya conocimiento se encuentre delimitada, y mucho menos que haya un grado aceptable de consenso en esa delimitación. Es decir, que tiene sentido detenerse (como hace nuestro autor) en aclarar cuál es la definición de conocimiento a la que se va a referir en su desarrollo. Es cierto que luego habrá que particularizar para el caso de la matemática, pero una definición general de conocimiento se hace precisa en este contexto. Se advierte que Kitcher acepta, en gran medida, la definición tradicional de conocimiento como creencia verdadera y (en uno u otro sentido) justificada. En efecto, según nuestro autor, «*X* sabe *p* si y sólo si *p*, si *X* cree que *p* y si la creencia de *X* de que *p* estuvo producida por un proceso que es una garantía (*warrant*) para dicha creencia» (1984, p. 17). Como es conocido, las teorías más relevantes incluyen entre las condiciones del conocimiento el que éste sea una creencia verdadera. Donde parece que el acuerdo no es tan unánime es respecto a la tercera condición. Así, para Kitcher, conocimiento es toda creencia verdadera y garantizada[4]. Pero esta discutible definición ha sido elegida con un objetivo bien claro, a saber, atribuir un papel relevante al proceso mediante el cual se ha llegado a adquirir el conocimiento. Es decir, le interesa hacer tal adquisión endógena al propio proceso cognoscitivo, con objeto de justificar la introducción del sesgo historicista que domina su explicación.

Teniendo presente su meta final, quizá se comprenda mejor su modo de plantear la cuestión. Su objetivo último es explicar nuestro conocimiento matemático presente en base a una cadena de conocimientos anteriores. Como es natural, cada uno de éstos está basado (a su vez) en otros, y esta cadena puede extenderse hasta el conocimiento matemático de que disponían nuestros ancestros, cuya naturaleza (según Kitcher) es perceptual. Se hace, pues, precisa una caracterización del conocimiento que contemple la posibilidad de introducir este sesgo historicista en su adquisición. Tras un prolijo análisis, Kitcher se decanta por el que él mismo denomina criterio psicologista, según el cual lo que hace al conocimiento distinto de la mera creencia verdadera es función de los procesos que producen tal creencia. En cambio, el otro planteamiento, el apsicologista, ignora tales procesos y por tanto no es adecuado para introducir el sesgo historicista que persigue nuestro autor. Pero creo que a pesar de su exhaustivo análisis, Kitcher deja sin explicación convincente lo que es un enunciado matemático verdadero. Dicho de otro modo, en su discusión trata de justificar la introducción del sesgo historicista que domina su punto de vista, pero descuida (creo que lamentablemente) un análisis en profundidad de la condición de verdadero de que debe gozar un enunciado para poder afirmar que es conocido por alguien. Es más, hay algunos pasajes de sus trabajos en los

4 Obsérvese que Kitcher no alude al conocido como «problema de la cuarta condición», pero la lectura de su punto de vista pone de manifiesto que se adhiere en gran medida a una teoría causal *à la* Goldman (Ver Chihara 1990, p. 223 n.8).

que se muestra huidizo respecto al concepto de verdad, evitando encarar decididamente la cuestión. En concreto, quiero señalar tres de ellos.

El primero requiere algún comentario acerca de lo que podríamos denominar la 'hipótesis del agente ideal', a la que ya hemos aludido y que trataremos más adelante. Kitcher atribuye a este agente ideal la capacidad de realizar las operaciones aritméticas que nuestras limitaciones humanas no nos permiten llevar a cabo. Pero esta situación no es exclusiva de la matemática: «Del mismo modo que abstraemos algunas de las propiedades accidentales y complicadas de los gases reales para configurar la noción de gas ideal, así especificamos también las capacidades del agente ideal haciendo abstracción de las limitaciones incidentales de nuestra propia práctica de coleccionar» (1984, p. 117). Pero a renglón seguido, en una breve nota a pie de página, observa: «No hay compromiso existencial respecto de un agente ideal o de las operaciones ideales. Los enunciados de la aritmética, al igual que los enunciados de la teoría de gases ideales resultan ser vacuamente verdaderos.» (*ibid.*, p. 117, n. 18). Según esto, no se entiende cómo puede hablarse de conocimiento en los términos en los que lo hace Kitcher, si se otorga el carácter de vacuamente verdaderos a los enunciados de la matemática. Como se ve, parece no tomarse muy en serio el carácter de verdad que atribuye a los enunciados matemáticos, y que figura en su definición de verdad.

En segundo lugar, creo que Kitcher evita enfrentarse al concepto mismo de verdad. Así, en su libro más relevante, confiesa que su propósito es más bien modesto: se trataría en última instancia de «mostrar cómo la matemática ha de ser integrada dentro de una teoría general del conocimiento y de una completa explicación de la inferencia racional» (1984, p. 227). Pero tampoco en su escrito de 1988 («Mathematical progress») manifiesta que su interés sea el dilucidar este asunto, cuya importancia no niega. Así, señala que «la tarea crucial es explicar las metas del quehacer matemático sin acudir a las nociones tales como verdad y progreso»[5]. Kitcher rehúye, pues, enfrentarse al controvertido concepto de verdad matemática, y excluye de su planteamiento un tratamiento directo de la cuestión: «La idea rectora de la teoría es que podemos concebir el progreso en términos de cambio racional para conseguir metas epistémicas, y especificar las metas epistémicas sin invocar cualquier concepción problemática de la verdad matemática» (1988b, p. 531). En otras palabras, lo que trata es de obviar el concepto de verdad en términos realistas, puesto que esto lo llevaría a un apriorismo que no está dispuesto a admitir.

Hay todavía una tercera consideración al respecto que quisiera señalar. El tratamiento en nuestro autor se asemeja al de un realismo de convergencia, en

5 Kitcher 1988b, p. 529. Para un análisis más detallado sobre la actitud de Kitcher ante el problema del progreso matemático, véase W. J. González 1998, en especial el parágrafo tercero.

el que la verdad no juega un papel relevante en las etapas concretas del proceso, sino que se mantiene como un objetivo a largo plazo. Según Kitcher, «hay una íntima conexión entre racionalidad matemática y verdad matemática, pero es de tal índole que, en vez de ver la racionalidad como maximización de las posibilidades para obtener la verdad, la verdad matemática debería ser entendida como aquello que se genera, idealmente, a largo plazo, según una secuencia de pasos racionales entre prácticas» (1988b, p. 529). Curiosamente, esta caracterización es válida exclusivamente para el caso de la matemática: «Me limitaré a defender la reducción de la verdad a la aceptabilidad racional en el largo plazo ideal sólo en el caso de la Matemática» (1984b, p. 529).

Según todo esto, estimo que Kitcher no ofrece un criterio de verdad lo suficientemente plausible como para ser incluido en la definición de conocimiento que defiende. El de verdad es un concepto en el que no parece confiar, y que sin embargo utiliza en su definición. En resumen, creo que dejar sin respuesta una posición coherente respecto de la verdad hace tambalear su punto de vista. Así, aunque está hablando de conocimiento, esta falta de concreción debería obligarle a expresarse, más bien, en términos de creencia justificada, o garantizada, si aceptamos su nomenclatura. Sería interesante hacer un análisis del alcance epistemológico que tendría el afirmar que tenemos creencia justificada (que no conocimiento) en el ámbito de las matemáticas. Pero no es posible entrar en eso ahora. No obstante esta crítica, en los apartados siguientes continuaré hablando de conocimiento matemático en los términos en los que los plantea el autor.

II. El segundo comentario crítico que quisiera indicar atañe al sesgo que Kitcher otorga a las transiciones entre prácticas que propician el avance de las matemáticas. Su punto de partida presupone la constatación de que los matemáticos que viven un determinado momento histórico no se hallan en un *vacuum* cognoscitivo; tanto el experto que trabaja en un determinado campo, como el neófito que se acerca por primera vez al ámbito de esta ciencia, se encuentran ya con el hecho constatado de una matemática previamente admitida. Como es natural, todo esto supone la existencia de unos conocedores y unos expertos, así como un considerable cúmulo de sobreentendidos. En definitiva, en cada época, el matemático se halla inserto en una determinada práctica. En su explicación, Kitcher sigue en parte los planteamientos de Kuhn, pero con objeto de delimitar la influencia del modelo kuhniano en su enfoque, convendría tener en cuenta el objetivo que el propio Kitcher se impuso a sí mismo. Su punto de partida es, recuérdese, que los matemáticos conocen una gran cantidad de verdades matemáticas. Esto requiere que las creencias matemáticas de los matemáticos estén apropiadamente fundamentadas o garantizadas.

Así, se tiene que explicar cómo nuestras creencias matemáticas al día de hoy han llegado a estar apropiadamente fundamentadas. Para ello Kitcher toma prestadas algunas ideas kuhnianas: «Una de las mejores visiones de Kuhn acerca del cambio científico es contemplar la historia de un campo científico como una secuencia de prácticas. Propongo adoptar análoga tesis acerca del cambio en matemáticas. Sugiero que centremos nuestra atención en el desarrollo de la *práctica matemática*» (1984, p. 163). De entrada, nuestro autor rechaza el punto de vista apriorista del cambio en matemáticas, que lo hace consistir en la mera acumulación de conocimiento matemático mediante deducciones a partir de axiomas. El cambio matemático se da a través de transiciones entre prácticas que son racionales incluso cuando no se hayan obtenido mediante deducciones a partir de axiomas. Pero una práctica, en el sentido que la entiende Kitcher, no es algo monolítico ni uniforme, sino que se presenta constituida por una serie de componentes, en concreto, cinco; de esta manera, un cambio significativo en una práctica implicará un cambio en, al menos, una de tales componentes, lo cual permite considerar la práctica matemática como algo más que el mero incremento del conjunto de enunciados aceptados[6].

Es decir, que todo parece abocar a la explicación de la racionalidad de las transiciones entre prácticas. El objetivo de Kitcher es caracterizar esta fundamentación apropiada en términos de transiciones entre práticas racionales, para determinar, a partir de ahí, la naturaleza del conocimiento matemático. Si la empresa tiene éxito, esta adecuada fundamentación se podrá transferir de una práctica a otra, y como corolario tendremos que todos los enunciados aceptados de nuestra práctica presente estarán apropiadamente fundamentados, con tal de que dicha práctica sea el último eslabón de una cadena de prácticas, y siempre que cada uno de los eslabones anteriores haya surgido a partir de sus antecesores mediante una transición interpráctica racional (Ver 1984, pp. 225-6). Como se ve, nuestro autor sitúa en un lugar preponderante de su teoría el hecho de que los matemáticos y aquéllos que conocen matemáticas forman una comunidad, y que es precisamente a partir de esa comunidad de la que se obtiene conocimiento. Este planteamiento se distancia un tanto de las teorías tradicionales, no tanto porque éstas no admitan este hecho (incuestionable por otra parte) como porque no le conceden relevancia epistemológica de ningún tipo. Dicha relevancia supone, además, poner un énfasis especial en el hecho del desarrollo histórico de las matemáticas. Según Kitcher, «para entender el orden epistemológico también de debe entender el orden histórico» (1984, p. 5).

6 Para un análisis más preciso de estas componentes, así como sus eventuales modificaciones en las sucesivas prácticas matemáticas, véase Kitcher 1984, pp. 163 y ss.

Como es evidente, para que esta explicación resulte satisfactoria habrá que detenerse en los orígenes de esta cadena de conocedores y entender cómo se inicia el proceso. Según Kitcher, este origen es mucho más modesto que el complejo conocimiento que poseen los matemáticos en la actualidad; y para explicarlo apela a la percepción ordinaria. A partir de tan humildes orígenes, la matemática ha florecido hasta constituirse en el impresionante corpus de conocimiento que hemos tenido la fortuna de heredar. La visión de Kitcher es original y trata de dar relevancia, entre otras cosas, a los aspectos historiográficos que subyacen a cualquier explicación satisfactoria del conocimiento matemático. Pero en su intento de explicar la racionalidad que acompaña a esas transiciones entre prácticas, creo que se aparta de su idea primitiva de aclarar lo que constituye el conocimiento matemático y el proceso para su obtención. Es decir, se ve obligado a dar una caracterización en profundidad de la racionalidad que acompaña a esas prácticas, y su artículo «Mathematical naturalism» (1988a), pese al nombre, no es más que eso. Es decir, una vez más, las disgresiones filosóficas dominan la situación y nuestro autor se aleja del ámbito de la mera práctica matemática, olvidando su propósito inicial y arruinando en cierto modo todo su planteamiento. Mi conclusión, en definitiva, es que el preeminente papel que augura para la historia se ve alejado del quehacer matemático propiamente dicho, desvirtuándose así su primera (y creo que buena) idea de mirar en el espejo de la historia.

En este mismo sentido parece discurrir la crítica que incluye Mary Tiles en el *review* que realiza al libro de Kitcher. Tiles mantiene que, más que una explicación del conocimiento matemático, lo que Kitcher parece propugnar es una sociología del conocimiento, parecida a la defendida por David Bloor (1976), en el sentido de que la naturaleza del conocimiento es función del modo de producción del propio conocimiento, así como de su función social. No estoy muy seguro de que exista tal paralelismo entre ambos desarrollos, pero no es éste el momento de entrar a discutirlo. Lo que sí me parece reseñable es que, al actuar así, creo que Kitcher trasciende el plano manipulador intrínseco y se refugia exclusivamente en el plano ideológico, extrínseco al quehacer del matemático. Como resultará familiar, esta terminología es de J. De Lorenzo, para quien en el ámbito de la matemática, junto al hacer intrínseco, hay un cuadro ideológico que condiciona ese hacer, bien por un contexto de conocimientos ya adquiridos, bien por unas condiciones de trabajo que, en última instancia, pueden explicarse por razones económicas. Pero en modo alguno han de ser considerados excluyentes ambos planos, tal y como parece concluirse de la posición de Kitcher (*cf.* De Lorenzo, 1977, pp. 13 y ss.).

III. Por último quisiera poner de manifiesto que (en alguna medida) Kitcher cae en el apriorismo del que con tanto énfasis trata de desvincularse. Atendiendo a cuanto se lleva dicho hasta ahora, puede comprenderse que una de las principales tareas que se ha propuesto es la de explicar satisfactoriamente la transición entre el que podríamos denominar proto-conocimiento matemático perceptualmente sustentado y el conocimiento matemático propiamente dicho. Particularizando para el caso de la aritmética, por ejemplo, se trata, en última instancia, de comprender cómo este conocimiento básico puede proporcionar la base para el conocimiento aritmético (*Cf.* 1984, pp. 118 ss.). Para conseguirlo hay que enfrentarse directamente a la cuestión acerca de cómo podemos obtener un conocimiento que esté perceptualmente fundamentado. Cabría entender que nuestro conocimiento aritmético se limita al proto-conocimiento matemático colectivo de la raza humana, pero esta consideración resulta poco atractiva a nuestro autor, puesto que limitaría nuestro conocimiento a un revoltijo de enunciados acerca de operaciones colectivas que han sido efectivamente realizadas. Pese a todo, algunos planteamientos intuicionistas podrían ser entendidos desde este punto de vista. Más interesante resulta, a su juicio, la concepción de un agente ideal capaz de efectuar las operaciones aritméticas que nuestras limitaciones accidentales no nos permiten llevar a cabo. Esta estipulación está garantizada, dice, por nuestro reconocimiento de que las operaciones ideales que atribuimos a dicho agente se abstraen de las limitaciones accidentales de nuestras propias realizaciones (*Cf.* Kitcher 1984, pp. 117-8). Esta opción no está exenta de dificultades, como veremos en seguida.

Lo que conviene destacar en este punto es que, para Kitcher, el proto-conocimiento desencadenante del proceso cognoscitivo en matemáticas puede tratarse con cierto rigor mediante un reajuste adecuado de algunas ideas de Mill. Dicho de otro modo, al tratar de orillar el enfrentamiento con la ardua cuestión de las entidades abstractas, Kitcher encuentra un aliado perfecto en Mill. Este enfoque aparece en su libro de 1984 sobre la naturaleza del conocimiento matemático, pero se encontraba ya pergeñado en la visión particular de Mill que Kitcher desarrolló en su «Arithmetic for the Millean» (1980). Aunque el tratamiento es desigual en ambos textos, el objetivo común que se persigue es mostrar cómo la concepción milleana de la aritmética puede desarrollarse en el interior de una teoría satisfactoria de la verdad aritmética y del conocimiento matemático.

Para que el planteamiento milleano resulte creíble, según Kitcher, se tendría que dar una explicación de la forma lógica de los enunciados aritméticos evitando la alusión a los objetos abstractos. No en balde, la tesis central de Mill es que las definiciones sobre las que se basan las matemáticas afirman una materia de hecho porque implican la existencia de los objetos denotados por el nombre definido. En estas condiciones, Kitcher piensa que se puede ofrecer una teoría epistémica acerca de las definiciones. Es decir, que es defendible la tesis de que «para justificar la aceptación de las definiciones sobre las que descansa la aritmética, debemos tener evidencia empírica de que esas definiciones son aplicables» (1980, p. 219). Y en el planteamiento de esa defensa, Kitcher hace un recorrido por la epistemología milleana, que paso a resumir.

Mill centra su atención en el hecho de que la mayor parte del conocimiento matemático se obtiene por deducción a partir de primeros principios. Consiguientemente, se ve obligado a prestar atención al estatus de dichos principios. Y como quiera que éstos se establecen mediante definiciones, habrá que centrarse en el análisis exhaustivo de las mismas (*Cf.* Kitcher 1980, pp. 215 y ss.). La delimitación del papel jugado por la definición la incardina Mill en su análisis de las expresiones significativas (*Cf.* Mill 1973, pp. 31 y ss.). A su juicio, dichas expresiones tienen dos funciones semánticas: la denotación y la connotación. En general, un término no-connotativo es aquél que refiere a un sujeto solamente o a un atributo solamente, mientras que un término connotativo designa un sujeto e implica un atributo. Los nombres generales (o sea, los nombres comunes) son connotativos. En cambio, los nombres propios son no-connotativos, puesto que están ligados a los objetos mismos de los cuales son nombres. Es posible (observa Mill) que exista algún motivo para nombrar a alguien Juan, pero el nombre, una vez dado, es independiente del motivo; los nombres propios están ligados a los objetos mismos y no dependen de la permanencia de un atributo u otro[7]. Por otra parte, los predicados denotan a los objetos de los que se predican con verdad, en tanto que connotan cualquier atributo que sea compartido por todos los objetos denotados. Es decir, mientras que la denotación atañe a los portadores, la connotación se asocia a los atributos. Y es precisamente esta función connotativa la que Mill asimila al significado, o sea, que el propósito de la definición es fijar el significado, esto es, la connotación. De hecho, la definición de un nombre connotativo es el enunciado que declara precisamente su connotación. Esto trae consigo que las palabras que no tengan significación (o sea connotación) no sean susceptibles de definición. Es el caso de los nombres propios; a lo más que pueden aspirar es a ser objeto de definición ostensiva, o como dice Mill, señalando con el dedo al objeto en cuestión al tiempo que se dice su nombre (*ibid.*, pp. 133 y ss.).

Con respecto al ámbito que nos interesa, la idea central de Mill es que las definiciones sobre las que se basan las matemáticas establecen encubiertamente una materia de hecho porque implican la existencia de los objetos denotados

7 *Cf.* Mill 1973, p. 28. Es decir, que, según Mill, los nombres propios denotan a sus portadores, pero no connotan nada, son no-connotativos, y por tanto, no definibles. Este hecho pone de manifiesto, según Kitcher, otra diferencia en el tratamiento semántico de la aritmética por parte de Mill y de Frege. Si los números son nombres propios (como los considera Frege), entonces son no connotativos y por tanto no definibles. Por consiguiente o no son nombres propios o no son definibles.

por el nombre definido. Es decir, que aunque los primeros principios de las matemáticas parezcan ser definiciones 'lógicas', en realidad son definiciones 'factuales'. Así parece entenderlo cuando afirma que «lo que se sigue en apariencia de una definición se sigue en realidad de la suposición implícita de que existe una cosa real que corresponde a ella» (1973, p. 224). Por ejemplo, podría mostrarse, según Mill, que los principios de la geometría son definiciones factuales, aun cuando las demostraciones geométricas usen como premisa el hecho de que un tipo particular de figura (un triángulo, por ejemplo) puede construirse, sin que ninguna definición permita asegurar la existencia de tal figura. En términos semejantes se expresa Mill cuando se refiere a la aritmética: a la hora de establecer el significado de los enunciados aritméticos y la consiguiente aceptabilidad de las definiciones estamos justificados al adoptar una definición sólo si hemos observado que está instanciado el término definido. Esto quiere decir que Mill no se muestra conforme con el discurso acerca de objetos abstractos, ni en el ámbito general, ni en el caso particular de las matemáticas: todos los números lo son de algo, no hay cosas tales como números en abstracto. Como alternativa, cabría apelar entonces a las clases, pero también esta noción se le presenta como sospechosa a Mill, ya que, establecer la distinción entre nombres propios y comunes apelando a las clases está abocado al fracaso porque explica la más clara de dos cosas por la más oscura. Es más práctico, a su juicio, hacerlo al revés, o sea, definir la clase como «una multitud indefinida de individuos denotados por un nombre general» (Mill 1973, p. 28). Al efectuar la caracterización ofrece una curiosa interpretación de la relación de pertenencia: «Referir algo a una clase es tomarlo por una de las cosas que son denominadas por este nombre común; excluirlo de una clase es decir que el nombre común no le es aplicable» (*ibid.*, p. 93). En resumen, todo nombre general crea una clase si existen cosas reales o imaginarias para componerla, es decir, si existen cosas que corresponden a la significación de ese nombre.

De lo que se trata es de dar una explicación satisfactoria de la forma lógica de los enunciados aritméticos que evite la 'perniciosa' idea de que la única justificación para aceptar las definiciones aritméticas se base en la aprehensión de objetos abstractos. Dicho de otro modo, para Mill, los numerales connotan propiedades físicas de los fenómenos, y por tanto no tiene sentido hablar del número en abstracto: «Todos los números deben serlo de alguna cosa; no hay cosas tales como números en abstracto. *Diez* debe significar diez cuerpos, o diez sonidos o diez pulsaciones» (1973, p. 254). Su objetivo de presentar una epistemología empirista le da las claves para hallar una alternativa. Para ello invierte los términos y defiende, en última instancia, que nuestra justificación para aceptar las definiciones aritméticas se fundamente en la observación de los objetos físicos que nos rodean. Es evidente que estos objetos se dejan manipular de diversas maneras; así, se pueden combinar y reagrupar entre ellos, se pueden separar algunos de una colección dada, se pueden reordenar y distribuir de distintas maneras, etcétera. Y eso es lo que, a su juicio, connota el nombre de un número, el numeral, a saber: «Alguna propiedad perteneciente al agregado de cosas que designamos con el nombre (del número), y esta propiedad es la manera característica como las partes de este agregado pueden unirse y pueden separarse» (*ibid.*, p. 611).

Ya es conocido cómo este pasaje atrajo las críticas de Frege[8]. No obstante, Kitcher cree que el hecho de que los numerales connoten propiedades de agregados admite otra interesante lectura. Dicho de otro modo, se puede rescatar la descalificación de las clases por parte de Mill que indicábamos *infra*. El propio Mill parece estar sugiriendo, si atendemos a la interpretación de Kitcher, que la referencia a clases puede analizarse desde el punto de vista de la propia actividad del sujeto (*Cf.* Kitcher 1980, pp. 223 y ss.). Esta sugerencia se encuentra avalada por el hecho de que la noción radical en el sistema de Mill no es la colección, el agregado, en tanto que objeto abstracto, sino el coleccionar como actividad. Así se puede considerar que los enunciados de la aritmética no expresan propiedades de diversos tipos de colecciones, sino más bien propiedades de los distintos modos de coleccionar. Desde este ángulo interpreta Kitcher la afirmación milleana de que «todo enunciado del resultado de una operación aritmética es el enunciado de uno de los modos de formación de un número dado» (Mill 1973, p. 611). En resumen, parece que no es forzar mucho el pensamiento de Mill si se establece que son las operaciones de separar, combinar, reordenar objetos físicos las que deben considerarse como relevantes para nuestra aceptación de las leyes básicas de la aritmética. De hecho, Mill cree reforzar esta idea constatando que los niños aprenden aritmética realizando, sobre todo, este tipo de actividades. La metodología de la enseñanza de las matemáticas se fundamenta (a su juicio) en que son verdades que reposan sobre el testimonio de los sentidos. Tales verdades se prueban viendo y tocando cómo ciertos objetos dados (por ejemplo, diez) se pueden separar y reorganizar de distintas maneras, ofreciendo a nuestros sentidos todos los conjuntos de números cuya suma es igual a diez. En resumen, y a modo de máxima metodológica, concluye: «Todo el que desee enseñar números y no meras cifras, enseña por la evidencia de los sentidos» (1973, p. 257). Kitcher apoya este planteamiento y acepta que este tipo de experiencias proporciona una adecuada justificación para aceptar las definiciones aritméticas. De hecho, lo que aprenden los niños al realizar tales experiencias es que ciertas operaciones poseen determinadas

8 Y de modo especial, la expresión 'la manera característica', pues, como es conocido, para Frege un mismo agregado puede ser descrito (y por tanto, descompuesto) de muchas maneras, sin que haya de considerarse privilegiada (característica) ninguna de ellas (Ver Frege 1973, p. 49).

propiedades, cuyo conocimiento es importante para el aprendizaje de la aritmética, precisamente porque la aritmética concierne a operaciones de coleccionar[9].

Es decir, que, según interpreta Kitcher, para Mill el objeto de la aritmética está constituido por las permanentes posibilidades de manipulación, y de este modo, cabe decir que la aritmética describe las características estructurales del mundo en virtud de las cuales podemos segregar y recombinar objetos. Pero no se crea por esto que lo que se persigue con estas afirmaciones es una fisicalización de la aritmética. Ni Kitcher, ni tampoco Mill pretenden tal cosa[10]. Es decir, Kitcher no está defendiendo que la única manera de interpretar los enunciados aritméticos sea considerando los numerales como predicados que se aplican exclusivamente a operaciones de este tipo. Es cierto que la aritmética estudia las propiedades de ciertas operaciones de coleccionar, y que algunas de estas operaciones se hallan interrelacionadas con la colección y la segregación de objetos físicos. Sin embargo, esta, digamos, dependencia del soporte físico sólo tiene relevancia como punto de partida, puesto que, según Kitcher, «pronto podremos coleccionar objetos trazando una línea mental alrededor de ellos» (1980, p. 225).

Dicho de otro modo, el proceso cognoscitivo no puede reducirse a la mera manipulación de objetos. No cabe duda de que esta metodología explicaría las operaciones aritméticas más elementales y algunas otras que no lo son tanto, pero resultaría insuficiente para dar cuenta de cómo se adquiere el conocimiento de verdades matemáticas de rango superior, en las que el contacto con lo físico no es tan evidente. Es decir, hay un punto a partir del cual las operaciones aritméticas se tienen que poder llevar a cabo sin la presencia de los objetos físicos originarios. Así parece entenderlo Kitcher al afirmar que «podemos coleccionar los objetos en el pensamiento sin necesidad de moverlos» (1984, pp. 110-111). O sea, comenzamos con paradigmas estrictamente físicos, pero cuando nos familiarizamos con las actividades de coleccionar y correlacionar ya no necesitamos tal soporte: podemos (dice Kitcher) relacionar objetos en el pensamiento. Incluso cabe desarrollar un lenguaje capaz de describir esa actividad y que nos permitirá alcanzar niveles de abstracción cada

9 Esta línea de pensamiento discurre en paralelo a la que adoptará Piaget al tratar de justificar la génesis de las operaciones formales, y en particular, las operaciones lógicas. Según dice, tales operaciones «aparecen como resultado de la coordinación de las acciones de combinar, disociar, ordenar y poner en correspondencia, que luego adquieren la forma de sistema reversible» (1982, p. 48).

10 No obstante, se puede avanzar significativamente en esta dirección sin limitarse a las consabidas relaciones pitagóricas obtenidas a partir de la mera reordenación de guijarros u objetos semejantes. Bigelow (1988), por ejemplo, ha desarrollado una visión del asunto que le permite llegar a construir incluso los números complejos.

vez más altos. En otros términos, esta desconexión con todo elemento físico manipulativo nos podría conducir a un solipsismo no deseable que Kitcher cree evitar recurriendo a la siempre arriesgada componente lingüística. Según él, podremos realizar actividades de coleccionar objetos asignándoles nombres e introduciendo los predicados adecuados que nos permitan seleccionar los objetos a los que se aplican. Incluso se podría establecer una jerarquía en el proceso selectivo sin más que introducir los símbolos apropiados (*Cf.* Kitcher 1984. p. 111).

En resumen, Kitcher entiende que su propuesta para construir los numerales como predicados de operaciones colectivas, mediante operaciones físicas concretas se puede entender acorde con las pretensiones más lúcidas de Mill. Y son éstas las bases bajo las cuales nuestro autor trata de dar una expresión cuasi-formal, me atrevería a decir, de la aritmética milleana (*Cf.* 1980, pp. 226 y ss.. También 1984, pp. 112 y ss.). Su intención última es desarrollar, en el seno de una teoría manejable, los planteamientos milleanos acerca de la forma lógica de los enunciados aritméticos. Para ello introduce cuatro nociones primitivas, con una interpretación inequívoca cuando las referimos a un dominio finito. La operación *U* consiste en segregar un objeto determinado de una colección dada; la operación *S* permite segregar un determinado conjunto y añadir uno más (es un trasunto de la operación sucesor); la operación *A* permite añadir un agregado a otro (es semejante a la adición de conjuntos). Pero es evidente que coleccionar no es la única actividad matemática elemental. Junto a ella se encuentra la de correlacionar. Esto justifica la introducción del cuarto operador, *M* (*matchability*), que afirma el establecimiento de una correspondencia biyectiva entre agregados, y que resulta fundamental a la hora de establecer la equinumerabilidad. En última instancia, la aritmética trata de las operaciones de segregación que permanecen invariantes frente a *M*.

La considerable carga intuitiva de que gozan estas operaciones no es óbice para permitir el establecimiento de las relaciones básicas de la aritmética elemental. No vamos a detenernos en eso, puesto que, como es obvio, el proceso sería prolijo y en ocasiones complicado, pero en principio nada impediría la formulación de la Aritmética de Peano en función de estos cuatro predicados (*Cf.* 1984, pp. 112 y ss.. También *cf.* 1980, pp, 226 y ss.). Pero, pese a la considerable potencia expresiva de este lenguaje, sólo estos axiomas resultan insuficientes para mostrar algunos de los teoremas de la aritmética elemental. En concreto, siempre que usemos el principio de inducción es preciso contar con que tenemos a nuestra disposición un sucesor para cada uno de los números utilizados en la prueba. Esto supone admitir la existencia de un conjunto o dominio de interpretación infinito, con lo cual, necesitamos hacer supuestos existenciales, implícitamente admitidos en la aritmética de Peano, pero que han de introducirse como axiomas en el lenguaje de Kitcher. Por ejemplo, hay que admitir que a partir de cada acto de segregación pueda obtenerse otro que cuente como su sucesor. Es decir, que se ha de añadir como axioma el enunciado «$\forall x \exists y Sxy$», cuya naturaleza es obviamente existencial.

Hasta aquí, todo parece ir bien. De hecho, los estructuralistas se aproximan al asunto casi en los mismos términos. Pero no cabe duda de que la introducción de semejantes afirmaciones existenciales genera dificultades insalvables. Si la existencia de una operación determinada consiste en su realización (*performance*), entonces no es cierto que para cualquier operación física de segregación haya, por ejemplo, una operación sucesor (siguiente), puesto que es posible que no dispongamos de los elementos físicos necesarios para ello[11]. No obstante, para Kitcher, «*el hecho de que la aritmética de Mill no pueda aplicarse adecuadamente a la descripción de las operaciones físicas de segregación, reordenación espacial, etc., no es fatal para la aplicabilidad de la aritmética de Mill*» (1984, p. 229, subrayado del autor).

El lenguaje de Kitcher se torna ambiguo en este punto y las razones que proporciona para justificar la hipótesis del agente ideal cabría incardinarlas en un pragmatismo inductivista, que (en mi opinión) dudosamente hubiera mantenido Mill en esos mismos términos. No obstante, las razones que ofrece son, en principio, plausibles. De entrada, resulta obvio que nuestras limitaciones biológicas acarrean limitaciones en las operaciones que de hecho podamos realizar. Pero el que no podamos hacer realmente ciertas cosas, incluso que no podamos hacerlas a lo largo de toda nuestra existencia, no debe tomarse como un rasgo estructural de la realidad. En concreto, las verdades de la aritmética no se fundamentan en las operaciones reales ejectuadas por agentes humanos reales, sino más bien en las operaciones ideales realizadas por agentes ideales. La aritmética se constituye así, según Kitcher, como una teoría idealizada, de tal manera que la relación entre la aritmética y las operaciones reales realizadas por agentes humanos es semejante a la que existe, por ejemplo, entre las leyes de los gases ideales y los gases realmente existentes en el mundo. Así, por ejemplo, no realizamos siempre (ni tenemos por qué) la operación sucesor para cualquiera de las operaciones colectivas (en el sentido de coleccionar), pero, dada una de esas operaciones, nos consideramos a nosotros mismos capaces de realizarla[12]. Es evidente que Kitcher está empleando aquí un estilo

11 Con esta misma dificultad se encuentra el nominalismo. Si se considera la aritmética fundamentada en un ontología de 'tokens' construidos como inscripciones físicas concretas, es evidente que no disponemos de la suficiente cantidad de tales inscripciones como para expresar todos los números naturales.

12 *Cf.* 1984, p.118. Podría incluso personificarse esta idealización considerando que la aritmética no es más que lo producido por un sujeto ideal con la suficiente libertad como para poder realizar lo que nosotros, por nuestras limitaciones accidentales, no podemos llevar a cabo. Pero esto exigiría admitir la existencia de un misterioso ser con poderes sobrenaturales.

metafórico para encubrir o parafrasear las ideas de Mill. De hecho, la concepción de semejante agente ideal no es para nuestro autor más que una simple 'generalización inductiva' a partir de nuestra práctica pasada (*Cf.* 1984, p. 118). Todavía más: cabe afirmar que, como quiera que hemos tenido éxito siempre que hemos realizado tales operaciones, podemos trascenderlas y proyectar que deberemos tener éxito en casos en los que *por una razón u otra* (yo subrayo) no lo intentamos[13]. En resumen, para Kitcher, los principios de la aritmética de Mill pueden entenderse como definiciones implícitas de un agente ideal. Del mismo modo que los físicos manejan los gases ideales (inexistentes) «podemos especificar las capacidades del agente ideal abstrayendo las limitaciones incidentales de nuestra propia práctica de coleccionar» (*ibid.*, p. 117).

Llegados a este punto, creo que ya disponemos de suficiente material como para afirmar que Kitcher, al llevar hasta sus últimas consecuencias los planteamientos de Mill, obvia sus pretensiones empiristas y cae de lleno en el apriorismo que pretende evitar. De entrada, parece que la introducción misma de la hipótesis del agente ideal está viciada de principio. No cabe duda de que su propuesta intenta obviar la cuantificación sobre objetos abstractos, ya que, de no hacerlo así, se vería obligado a admitir la existencia de un dominio independiente cuyas connotaciones platónicas no está dispuesto a aceptar. El rodeo para evitar tal enfrentamiento le obliga a introducir las ya citadas operaciones de segregación y emparejamiento. Lo que ocurre es que no queda claro en su exposición sobre qué conjunto inicial se realizan tales operaciones. El desarrollo de su propuesta parece sugerir que se trata del ámbito de lo físico, constituido por objetos y eventos perfectamente ubicados en el espacio y en el tiempo. Todo apunta a que seleccionamos objetos concretos en un instante temporal preciso, pero eso no queda especificado en ninguno de sus textos. Evidentemente esto acarrea problemas técnicos nada triviales, puesto que no se cuenta con un criterio de identidad que nos permita realizar las aludidas operaciones de selección y de emparejamiento. Una vez más habrá que darlo por supuesto, ya que Kitcher no lo indica expresamente. Pero, aun obviando esta cuestión, hay que admitir que la matemática contemporánea es demasiado rica como para pretender justificarla a partir de tan pobre punto de partida. Por ello se ve Kitcher obligado a introducir el agente ideal. En definitiva, el rodeo para evitar las entidades abstractas exige introducir una más que dudosa hipótesis que presenta más problemas que resuelve. Así parece entenderlo Mary Tiles en el

13 En términos parecidos se manifiesta Detlefsen, para quien la aritmética es una idealización de nuestra experiencia al considerar el comportamiento de los objetos físicos reales: «Cuando lo que se pretende es explicar su aplicabilidad empírica, la aritmética contentual debería concebirse como una idealización de nuestra experiencia con respecto al comportamiento aritmético de los objetos físicos reales» (Detlefsen 1986, p. 33).

review ya citado: «¿Qué se ha ganado [dice] al sustituir las operaciones ideales de un sujeto ideal por los objetos abstractos?» (Tiles 1985, p. 42). Dicho de otro modo, parece según esto, que Kitcher cae de lleno en el apriorismo del que con tanto ahínco trataba de alejarse.

Pero todavía creo que se podría plantear una segunda cuestión. Para ello, convendría recordar las razones aportadas por nuestro autor para introducir en su sistema de la Aritmética de Mill los axiomas existenciales citados. Ya se ha dicho que las operaciones básicas de segregación y emparejamiento deben disponer de un dominio de partida que permita su ejecución en cualquier caso. Dicho de otro modo, operaciones como 'segregar un elemento más', equivalente al postulado de que cada número tiene un sucesor, tienen que poder iterarse indefinidamente. Es en este punto en el que hace su aparición el agente ideal, dado que nuestras limitaciones físicas y biológicas no nos permiten realizar siempre semejante operación. Dicho de otro modo, este sujeto ideal debe hallarse en condiciones de coleccionar no solamente objetos espaciales, sino también colecciones de infinitos objetos, de dudosa ubicación espacio-temporal. Para Kitcher, esta actividad, imposible de ejecutar por un humano, no puede ser realizada en nuestro tiempo 'normal' de individuos finitos, sino que exige «un medio análogo al tiempo, pero *más rico* que el tiempo» (1984, p. 146), una especie de 'supertiempo', en sus propias palabras. Es decir, que no tiene reparos en extender la noción de tiempo para abarcar lo que el platonismo explica extendiendo la noción de objeto. Cabría preguntarse, como hace Parsons, por qué, aun siendo análogas, es preferible una extensión a la otra. A decir verdad, como apunta el propio Parsons, la extensión del concepto de objeto (físico) a la de *objeto* ajeno a toda ubicación espacio-temporal, resulta menos extravagante y más de acuerdo con el contenido real de la teoría de conjuntos que la propuesta de Kitcher (*Cf.* Parsons 1986, p. 134). En definitiva, quizá sea esta teoría del agente ideal la parte menos sustentada del naturalismo que Kitcher defiende desde hace más de dos décadas.

REFERENCIAS

BIGELOW, J. 1988: *The reality of numbers*, Oxford: Clarendon Press.

BLOOR, D. 1998: *Conocimiento e imaginario social*, Barcelona: Gedisa.

CHIHARA, C. 1990: *Constructibility and mathematical existence*, Oxford: Clarendon Press.

De LORENZO, J. 1977: *La matemática y el problema de su historia*, Madrid: Tecnos.

DETLEFSEN, M. 1986: *Hilbert's program: an essay on mathematical instrumentalism*, Dordrecht: Reidel.

FREGE, G. 1973: *Los fundamentos de la Aritmética*, Barcelona: Laia.

GONZÁLEZ, W. J. 1998: «'Verdad' y 'prueba' ante el problema del progreso matemático», P. Martínez Freire (ed.) *Filosofía actual de la ciencia*, Suplemento nº 3 de *Contrastes*, pp. 307-346.

HERSH, R. 1997: *What is mathematics, really?*, London: Jonathan Cape.

KITCHER, P. 1980: «Arithmetic for the Millian», *Philosophical studies*, 37, pp. 215-236.

KITCHER, P. 1984: *The nature of mathematical knowledge*, Oxford: Oxford University Press.

KITCHER, P. 1988a: «Mathematical naturalism», W. Aspray and P. Kitcher (eds.) *History and philosophy of modern mathematics*, Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 293-325.

KITCHER, P. 1988b: «Mathematical progress», *Revue internationale de Philosophie*, 42(167), pp. 518-540.

MILL, J. S. 1973: *Collected works, vol. VII*, London: Routledge and Kegan Paul.

PARSONS, S. C. 1986: Review of Kitcher 1984, *The philosophical review*, 95, pp. 129-137.

PIAGET, J. 1982: *Estudios sobre lógica y psicología*, Madrid: Alianza Editorial.

RESNIK, M. D. 1997: *Mathematics as a science of patterns*, Oxford: Clarendon Press.

SHAPIRO, S. 1997: *Philosophy of mathematics. Structure and ontology*, New York: Oxford University Press.

TILES, M. 1985: Review of Kitcher 1984, *Philosophical books*, 26 (1), pp. 40-43.

Antonio Caba Sánchez es profesor asociado del Departamento de Filosofía (Área de Lógica y Filosofía de la Ciencia) de la Universidad de Málaga y autor de diversos artículos sobre filosofía y metodología de las matemáticas, que constituyen la línea central de su investigación.

Dirección Postal: Departamento de Filosofía. Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, E-29071, Málaga.

E-mail: acaba@uma.es