

Scienza e fede: Dio e l'infinito – Considerazioni di un matematico

Science and Faith: God and Infinity – Considerations by a Mathematician

GIANDOMENICO BOFFI

Già professore universitario di prima fascia di Algebra in Italia
boffigia@gmail.com

Riassunto: Esempi elementari mostrano che l'infinito matematico è *attualmente* presente nelle applicazioni della matematica alla realtà. Ciò porta a osservazioni sull'introduzione definitiva a opera di Cantor dell'infinito *attuale* in matematica, attraverso la sua teoria degli insiemi, che fa parte della corrente formalizzazione della matematica. Tuttavia la matematica va oltre la sua formalizzazione in un modo un po' "misterioso". L'efficacia altrettanto "misteriosa" della matematica nell'universo suggerisce in ultima analisi una comprensione dinamica della creazione, un processo aperto in cui infinito e finito sono intrecciati.

Parole chiave: Infinito matematico, formalizzazione della matematica, efficacia dei modelli matematici, creazione divina.

Abstract: *Elementary examples show that mathematical infinity is actually present in the applications of mathematics to reality. This leads to remarks on Cantor's definitive introduction of actual infinity in mathematics, through his theory of sets, which is part of the current formalization of mathematics. However, mathematics goes beyond its formalization in a somewhat "mysterious" way. The equally "mysterious" effectiveness of mathematics in the universe ultimately suggests a dynamic understanding of creation, an open-ended process where infinite and finite are intertwined.*

Keywords: *Mathematical infinity, formalization of mathematics, effectiveness of mathematical models, divine creation.*

Artículo recibido el día 2 de noviembre de 2020 y aceptado para su publicación el 1 de diciembre de 2020.

Espíritu LXX (2021) · n.º 161 · 185-200

Nell'articolo cercherò inizialmente di mostrare, in termini accurati ma non tecnici, come viene affrontato dai matematici l'infinito che si rende presente nelle applicazioni della matematica alla realtà. Questo condurrà poi a riflessioni sull'introduzione definitiva a opera di Cantor dell'infinito attuale in matematica, attraverso la sua teoria degli insiemi, che fa parte della formalizzazione corrente della matematica. Il duplice fatto che la matematica trascenda la sua formalizzazione e manifesti una sorprendente efficacia nella interazione con la realtà suggerirà infine una comprensione dinamica della creazione, alla stregua di un processo aperto in cui infinito e finito sono intrecciati indissolubilmente.

I. Un po' di matematica concreta

L'infinito accennato nel titolo dell'articolo sarà in primo luogo l'infinito di cui si parla in matematica. Inizio quindi facendo un po' di matematica concreta.

Tutti sappiamo calcolare la somma delle prime due potenze di $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

E anche la somme delle prime tre potenze:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

E se siamo disposti a calcolare successivamente i 703219 addendi necessari, in via di principio sappiamo anche calcolare la somma:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{703219}.$$

Ma naturalmente preferiremmo avere una formula che esprimesse la somma direttamente in funzione di $\frac{1}{2}$ e di 703219.

Come trovare una formula del genere?

Per semplificare le cose, riformuliamo la domanda in termini generali (in matematica, generalizzare è spesso una via per cogliere l'essenziale): preso un numero positivo a e un numero *intero* positivo k , calcolare la somma

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-1} + a^k.$$

Nell'esempio iniziale, $a = \frac{1}{2}$ e $k = 703219$.

Chiamiamo S la somma cercata $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-1} + a^k$ e osserviamo subito che il caso $a = 1$ è elementare perché S risulta uguale alla somma di k copie di 1 (qualunque potenza di 1 è ancora 1), vale a dire, se $a = 1$, allora $S = k$.

Passiamo dunque al caso in cui $a \neq 1$: che cosa possiamo dire di S ?

Certo possiamo dire che, se $S = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-1} + a^k$, allora deve risultare anche

$$aS = a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^k + a^{k+1}$$

(ho moltiplicato primo e secondo membro per il numero positivo a).

Segue che, *sottraendo* la seconda uguaglianza dalla prima, otteniamo semplicemente

$$S - aS = a - a^{k+1}$$

(perché tutte le potenze da a^2 ad a^k si cancellano). In altre parole, mettendo in evidenza S al primo membro, abbiamo trovato che

$$S(1 - a) = a - a^{k+1}.$$

Poiché stiamo supponendo che $a \neq 1$, $1 - a$ è sicuramente diverso da 0 e possiamo dividere ambo i membri per $1 - a$, ricavando finalmente

$$S = \frac{a - a^{k+1}}{1 - a}$$

o anche (mettendo in evidenza a al numeratore)

$$S = a \cdot \frac{1 - a^k}{1 - a} = \frac{a}{1 - a} \cdot (1 - a^k).$$

Se ora torniamo al nostro esempio iniziale, possiamo affermare che

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2^k}$$

(perché il coefficiente $\frac{1}{2}$ si semplifica con il denominatore $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$) e pertanto

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{703219} = 1 - \frac{1}{2^{703219}}$$

sicché essenzialmente la somma cercata si riduce al calcolo di 2 elevato al numero degli addendi (in effetti, anche $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$ e $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$).

Tuttavia quel che ci preme adesso è un altro interrogativo.

Quale sarebbe un modo plausibile di assegnare una somma S all'addizione degli *infiniti* termini seguenti? ¹

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \dots \dots$$

Poiché algebricamente non sappiamo neppure dire che cosa significhi addizionare un numero infinito di addendi, l'interrogativo è se siamo in grado di *immaginare* un numero che possa *ragionevolmente* pensarsi come la somma di tutte le infinite potenze di $\frac{1}{2}$.

II. Immaginare ragionevolmente

Qualcuno potrebbe forse immaginare che all'addizione degli infiniti termini

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \dots \dots$$

sarebbe ragionevole associare una somma anch'essa infinita. Ma vediamo che cosa suggerisce invece la sezione precedente. In essa abbiamo trovato che la somma delle prime k potenze di $\frac{1}{2}$ è uguale a

$$1 - \frac{1}{2^k}.$$

A mano a mano che k cresce, anche 2^k cresce, mentre $\frac{1}{2^k}$ diventa sempre più piccolo e la differenza $1 - \frac{1}{2^k}$ si accosta sempre di più a 1. Pertanto i matematici concludono che all'addizione degli infiniti termini

¹ L'espressione riportata nella riga successiva intende indicare l'addizione di tutte le infinite potenze di $\frac{1}{2}$.

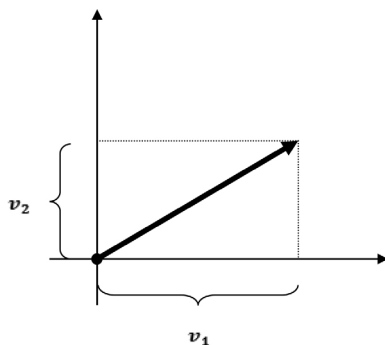
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \dots$$

vada associata una somma pari a 1^2 .

C'è anche un'interpretazione geometrica di questa associazione. Se prendiamo un segmento di lunghezza 1 e lo suddividiamo in due parti uguali, e poi suddividiamo in due parti uguali la prima metà, e poi suddividiamo in due parti uguali il primo quarto, e poi suddividiamo in due parti uguali il primo ottavo, e così via, il segmento originale (di lunghezza 1, non dimentichiamolo) viene ad essere spezzato in segmenti di lunghezza proprio $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}$, etc. cioè di lunghezza proprio $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4$, etc.

Passiamo adesso a un altro esempio di immaginazione ragionevole.

Un vettore del piano ha due coordinate, diciamolo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, e lunghezza pari alla radice quadrata di $v_1^2 + v_2^2$ (per il teorema di Pitagora):



Un vettore dello spazio ha tre coordinate, diciamolo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, e lunghezza pari alla radice quadrata di $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ (sempre per il teorema di Pitagora, applicato due volte).

² Occorre precisare che esistono anche addizioni di infiniti termini cui non è ragionevole associare una somma finita. Ad esempio, l'addizione di tutte le potenze di 2, poiché $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k$ cresce sempre di più al crescere di k . Si dice allora che la somma da associare a $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + \dots$ è infinito (denotato con il simbolo ∞), ma attenzione: ∞ non è un numero, è solo un simbolo che ci ricorda proprio che nessun numero può essere ragionevolmente associato alla data addizione di infiniti termini.

A un vettore di uno spazio di dimensione (finita) $k \geq 4$, diciamolo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$, si assegna lunghezza pari alla radice quadrata di $v_1^2 + \dots + v_k^2$ e si verifica che ciò garantisce tutte le usuali proprietà di una lunghezza.

Possiamo considerare anche vettori con infinite coordinate, cioè $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \end{bmatrix}$, ma c'è un problema con la loro lunghezza. Possiamo fare la radice quadrata dell'addizione degli infiniti termini $v_1^2 + \dots + v_k^2 + \dots$ solo a patto che si possa associare una somma finita a tale addizione e abbiamo già visto che questo non sempre accade.

Ci si limita dunque ai soli vettori per i quali è possibile associare una somma finita all'addizione degli infiniti termini $v_1^2 + \dots + v_k^2 + \dots$, si assegna loro come lunghezza la radice quadrata di quella somma, e si verifica che questi particolari vettori formano uno spazio di *dimensione infinita* che si comporta in modo del tutto analogo agli spazi di dimensione finita (spazio di Hilbert³).

La cosa interessante è che questo spazio non è solo una elucubrazione della mente dei matematici, ma è esattamente quel che occorre agli ingegneri per trattare i segnali elettromagnetici a energia finita che tanta parte hanno nella tecnologia quotidiana di tutti noi.

Come a dire: l'infinito matematico è *attualmente* presente nei modelli impiegati per lo studio del nostro mondo finito e per l'azione in esso.

È chiara l'allusione al famoso problema dell'esistenza o meno in matematica dell'infinito attuale contrapposta all'esistenza del solo infinito potenziale.

³ Lo spazio fu introdotto ai primi del Novecento dal brillante matematico tedesco David Hilbert (Königsberg, 23 gennaio 1862 – Gottinga, 14 febbraio 1943), uno tra gli studiosi più influenti a cavallo dei secoli XIX e XX. Basti pensare che l'elenco di 23 problemi aperti che egli presentò al secondo congresso internazionale di matematica (a Parigi, nell'anno 1900) venne a indirizzare moltissima ricerca scientifica nei decenni successivi. Legato al nome di Hilbert è anche il programma che egli lanciò negli anni Venti, e cioè quello di (i) individuare un sistema di assiomi finitario sufficiente a dedurre la verità/falsità di ogni enunciato matematico correttamente formulato e (ii) dimostrare la coerenza logica di tale sistema. Il tutto allo scopo di fornire alla matematica una completa auto-fondazione logica. Tale programma fallì alla luce dei risultati di Kurt Gödel del 1931 (cf. la nota su Gödel nella successiva sezione IV).

III. Infinito potenziale o infinito attuale?

Il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro è indicato con il numero π (pi greco), un numero decimale illimitato non periodico; di solito scriviamo $\pi := 3,14 \dots$ intendendo che i tre puntini nascondano infinite cifre decimali.

Ognuna di queste cifre può essere descritta con precisione da un algoritmo, ma ovviamente occorrerebbe un tempo infinito per calcolarle e stamparle tutte.

Domanda: Le infinite cifre decimali di π esistono solo potenzialmente, oppure esistono attualmente tutte quante?⁴

Un po' di storia.

Anche se già in precedenza alcuni propendevano per l'esistenza di infiniti attuali, l'irruzione dell'infinito attuale in matematica è generalmente associata al lavoro di Georg Cantor⁵. Egli riteneva che le cifre di π costituissero un oggetto attuale *unico*, come anche la moltitudine infinita dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ...

oppure quella di tutti i numeri reali⁶. Queste moltitudini di infiniti elementi concepibili come un oggetto unico egli chiamava *insiemi* e si proponeva di calcolarne il numero degli elementi.

Precisamente, due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (la stessa "cardinalità") se possono porsi in corrispondenza biunivoca.

Ad esempio, i numeri naturali possono porsi in corrispondenza biunivoca con i loro quadrati 0, 1, 4, 9, ... e pertanto tali quadrati sono tanti quanti tutti i numeri naturali⁷. Si dice che il numero dei loro elementi è \aleph_0 (leggi "alef zero")⁸.

⁴ Si osservi che un platonista potrebbe pensare che esistano attualmente nel mondo delle idee, mentre un cristiano potrebbe pensare che esistano attualmente in mente Dei.

⁵ Il tedesco Georg Cantor nacque a San Pietroburgo il 19 febbraio 1845 (calendario giuliano) e morì a Halle il 6 gennaio 1918. Studiò a Darmstadt, Zurigo e Berlino. Per tutta la sua carriera fu all'Università di Halle. Dalla sua corrispondenza con il padre sembra evincersi che ambedue fossero devoti luterani.

⁶ I numeri reali sono tutti i numeri decimali, limitati e illimitati, positivi e non positivi. Sono posti in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta.

⁷ Questo esempio è tratto dall'opera di GALILEO GALILEI del 1638 intitolata *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due Nuove Scienze*. Si veda alle pp. 78-79 di GALILEO GALILEI (1898). *Opere, Edizione Nazionale, Vol. VIII*. Firenze: G. Barbera. Va sottolineato che nel testo galileiano l'esempio è mirato a concludere che gli attributi di uguale, maggiore e minore non hanno luogo negli infiniti. Il lavoro di Cantor mostra invece proprio come si possano usare questi attributi con insiemi infiniti.

⁸ A differenza del simbolo ∞ usato in una nota della sezione II, si pensa ad \aleph_0 come a un vero numero.

Cantor dimostrò altresì che la cardinalità dei numeri reali è superiore a quella dei numeri naturali e individuò persino una catena infinita di cardinalità distinte crescenti.

Cantor tuttavia riteneva anche che esistessero moltitudini infinite che non potessero essere concepite come unità e alle quali non fosse possibile attribuire una cardinalità. Un esempio è la totalità di tutti gli insiemi, che quindi *non* è un insieme (si suole dire che è una *classe propria*).

Il lavoro di Cantor fu molto contestato all'inizio ed egli cercò anche appoggio nella Chiesa cattolica, convinto che la sua tradizione di pensiero ammettesse l'infinito attuale⁹. In effetti, ad esempio, il neo-tomista Konstantin (o Constantin) Gutberlet difendeva l'idea che Dio avesse un'istantanea consapevolezza di una moltitudine infinita (come tutte le cifre decimali di π oppure tutti i numeri naturali) e che quindi l'infinito attuale esistesse, ma negava che potesse esistere nella natura¹⁰.

Cantor finì per adottare un termine nuovo: chiamò *transfiniti* gli insiemi di cardinalità non finita (e riservò a Dio stesso il termine di Infinito Assoluto¹¹).

L'accettazione delle idee di Cantor sull'infinito è andata di pari passo con l'affermarsi della teoria degli insiemi come fondamento *formale* della matematica contemporanea.

⁹ Si veda ad esempio la penultima frase dell'opera di TOMMASO D'AQUINO del 1271 intitolata *De Aeternitate Mundi* (<https://www.corpusthomicum.org/ocm.html>): non est adhuc demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu. Sul pensiero dell'Aquinate in merito alle moltitudini infinite cf. anche l'articolo di R. L. CARTWRIGHT citato in bibliografia.

¹⁰ Il filosofo e teologo Konstantin Gutberlet (Geismar/Rhön, 10 gennaio 1837 – Fulda, 27 aprile 1928) fu prete e insegnante di seminario e tenne un atteggiamento amichevole nei confronti di Cantor. Prolifico autore, scrisse anche il trattato: K. GUTBERLET (1878). *Das Unendliche, mathematisch und metaphysisch betrachtet*. Mainz.

¹¹ A dire il vero, negli scritti di Cantor talvolta la nozione di infinito assoluto sembra riferita anche alle classi proprie, ma pare trattarsi di un altro modo di indicare il fatto che esse, pur ben definite matematicamente, non sono insiemi; l'infinito assoluto divino invece non è "ben definito", sfugge cioè a ogni tentativo di determinazione completa da parte della nostra mente. Tuttavia la infinita catena dei transfiniti (una classe propria) può vedersi come un *simbolo* dell'infinito divino: cf. l'articolo di C. TAPP citato in bibliografia.

IV. Rapporto tra matematica e sua formalizzazione

Come una lingua naturale ha una grammatica, così la matematica ha una *formalizzazione* (che ne favorisce anche la condivisione), ma certo non si esaurisce in essa, anzi la precede.

La vicenda del Novecento (l'illusione di David Hilbert di una possibile auto-fondazione logica della matematica e la smentita contenuta nel lavoro di Kurt Gödel¹² e altri) mostra proprio questo. E se qualcuno propone una formalizzazione della matematica che comporta l'abbandono di parti molto significative di essa, difficilmente può avere successo. (Si ricordi la celebre frase di Hilbert: "Nessuno potrà espellerci dal paradiso che Cantor ha creato per noi"¹³).

Piuttosto vale il contrario: siamo anche disposti ad accettare qualche effetto paradossale di una formalizzazione che salva la matematica rilevante. Porto ad esempio quel che è chiamato l'assioma della scelta.

Se abbiamo un insieme finito di scatole, nessuna delle quali vuota, ovviamente possiamo selezionare un oggetto da ognuna e considerare l'insieme formato dagli elementi selezionati. Supponiamo ora di essere in presenza di un insieme infinito di scatole, nessuna delle quali vuota: è possibile selezionare un oggetto da ognuna e considerare l'insieme formato dagli oggetti selezionati? Detta così, la risposta positiva sembra plausibile e innocua. Per cui la maggioranza dei matematici contemporanei risponde di sì (scatola = insieme), tanto più che ciò consente di dimostrare teoremi fondamentali in vari settori della matematica. Ma la medesima risposta positiva consente anche di provare risultati contro-intuitivi, come quello secondo cui, presa una sfera piena, posso spezzarla in un numero finito di pezzi disgiunti i quali, rimessi insieme in modo diverso, mi consentono di ricostruire due sfere identiche a quella originale¹⁴.

¹² Kurt Gödel (Brno, 28 aprile 1906 – Princeton, 14 gennaio 1978), fu logico tra i più grandi; in particolare, a soli 25 anni provò che, dato un sistema di assiomi finitario logicamente coerente e idoneo a fondare l'aritmetica, esiste sempre un enunciato correttamente formulato che non può essere dimostrato vero e non può essere dimostrato falso sulla base del sistema di assiomi (teorema di incompletezza); ciò non esclude che l'enunciato possa dimostrarsi vero o falso in qualche contesto "più ampio".

¹³ "Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können". Alla pag. 170 di: D. HILBERT (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* 95, 161-190.

¹⁴ Si tratta del teorema di Banach–Tarski (1924). Il punto della questione è che i pezzi di sfera non sono "solidi" nel senso comune, ma insiemi infiniti di punti.

In effetti le ricerche logiche sui fondamenti della matematica hanno evidenziato un che di misterioso. Ha scritto ad esempio Ennio De Giorgi¹⁵:

Ogni volta che si tenta un inquadramento (dall'interno) della matematica ci si trova di fronte a difficoltà invincibili e, in sostanza, si incontra una certa forma di mistero. Operando come matematico sono portato ad ammettere che non solo le cose che esistono sono, com'è ovvio, più di quelle che conosco, ma che per poter parlare delle cose conosciute sono costretto a fare riferimento a cose sconosciute e umanamente inconoscibili. Non riesco mai a delimitare due zone: una di perfetta chiarezza e una di totale oscurità. È sempre incerto il confine tra le cose conosciute e conoscibili e le cose sconosciute e inconoscibili. [...] È difficile in un breve intervento illustrare il carattere "misterioso" dei fondamenti della matematica, che del resto è stato messo in evidenza soprattutto dalle più avanzate ricerche logiche di questo secolo. Mi limiterò a notare che in matematica, anche se ci si vuole limitare a procedimenti finitistici, si devono ammettere regole di tipo non finitistico. [...] In generale la descrizione di certi oggetti può essere fatta solo ammettendo regole assai più complesse degli oggetti da descrivere^{16 17}.

Un testo di Robert Musil¹⁸ può forse rendere l'idea in maniera più lieve:

¹⁵ Ennio De Giorgi (Lecce, 8 febbraio 1928 – Pisa, 25 ottobre 1996) fu tra i massimi matematici del Novecento. In particolare, negli anni Cinquanta, risolse il 19° problema di Hilbert (poco dopo risolto anche, con metodi diversi, da John Nash). Si distinse molto a livello nazionale e internazionale per l'attenzione ai rapporti tra scienza e società, in particolare tra scienza e fede.

¹⁶ Da un testo pubblicato sul quotidiano L'Osservatore Romano del 18 novembre 1979 e reperibile anche alle pp. 11-12 del libro curato da A. MARINO e C. SBORDONE citato in bibliografia.

¹⁷ Una conferma di quanto affermato da De Giorgi è nel fatto che taluni risultati di calcolo combinatorio *finito* si ottengono ricorrendo a insiemi *infiniti* di cardinalità enorme. A mo' d'esempio, si può consultare l'URL specialistico <https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/u.osu.edu/dist/1/1952/files/2014/01/Pi01120905-1dzb5f.pdf> (ultimo accesso il 23/10/2020). L'autore dell'articolo, Harvey M. Friedman, è una delle persone che negli ultimi decenni ha più approfondito i problemi fondazionali.

¹⁸ L'austriaco Robert Musil (Klagenfurt, 6 novembre 1880 – Ginevra, 15 aprile 1942), noto come uno degli scrittori più importanti del Novecento, prima di dedicarsi completamente alla letteratura fu ingegnere meccanico e conseguì anche un titolo accademico in filosofia (sul pensiero di Ernst Mach).

I pionieri della matematica ricavarono da certi principi delle idee utilizzabili. Da quelle idee nacquero deduzioni, tipi di calcolo, risultati. I fisici ci misero su le mani e ne ricavarono nuovi risultati. Alla fine arrivarono i tecnici, accontentandosi spesso di questi risultati, ci fecero su dei nuovi calcoli e crearono le macchine. Ma a un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici – quelli che si lambiccano il cervello più vicino alle fondamenta – e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardano giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria. Eppure le macchine funzionano!¹⁹

Vediamo infine una terza citazione, molto significativa perché proveniente da Nicolas Bourbaki²⁰ (la traduzione è mia, in nota il testo originale²¹):

I miei sforzi durante gli ultimi quindici anni [...] sono stati completamente mirati a una esposizione unificata di tutti i rami della matematica, poggiante su fondamenta tanto solide quanto potessi sperare di fornire.

¹⁹ Tratto da: R. MUSIL (1913). *L'uomo matematico*. In R. MUSIL (1995). *Saggi e altri scritti*. Torino: Einaudi (trad. it. di A. CASALEGNO).

²⁰ Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo collettivo di un gruppo di brillanti matematici, prevalentemente francesi, la cui composizione si rinnova periodicamente, che a partire dal 1935 è venuto elaborando una presentazione sistematica di una porzione consistente della matematica contemporanea. Tale presentazione, che segue un approccio assiomatico e si fonda sulla teoria degli insiemi, è molto formale e ciò rende particolarmente significativa la citazione riportata, che risale alla fine degli anni Quaranta, cioè alla fine dei primi quindici anni di vita del gruppo. L'influenza del gruppo Bourbaki raggiunse il culmine intorno agli anni Settanta del Novecento, per poi declinare.

²¹ Il testo originale di Bourbaki:

My efforts during the last fifteen years [...] have been directed wholly towards a unified exposition of all the branches of mathematics, resting on as solid foundations as I could hope to provide. I have been working on this as a practical mathematician; in matters pertaining to pure logic, I must confess to being self-taught, and laboring under all the handicaps that this implies [...]. Whether mathematical thought is logical in its essence is a partly psychological and partly metaphysical question which I am quite incompetent to discuss. [...] Proofs, however, had to exist before the structure of a proof could be logically analyzed [...]. In other words, logic, as far as we mathematicians are concerned, is no more and no less than the grammar of the language which we use, a language which had to exist before the grammar could be constructed.

Ho lavorato a questo come un matematico pratico; nelle questioni relative alla logica pura mi devo confessare autodidatta, faticando con tutti gli inconvenienti che ciò comporta [...]. Se il pensiero matematico sia logico nella sua essenza è un quesito in parte psicologico e in parte metafisico, che sono del tutto incompetente ad affrontare. [...] Le dimostrazioni, tuttavia, dovevano esistere prima che la struttura di una dimostrazione potesse essere analizzata logicamente [...]. In altre parole, la logica, per quanto concerne noi matematici, non è né più né meno che la grammatica del linguaggio che usiamo, un linguaggio che doveva esistere prima che la grammatica potesse essere costruita²².

Credo che la stragrande maggioranza dei “matematici pratici”, oggi come nei millenni precedenti, abbia a cuore lo sviluppo sempre migliore della propria disciplina, ricorrendo alla formalizzazione al momento ritenuta più conveniente.

Come che sia, è questa matematica, dai fondamenti un po’ misteriosi e dai risultati talora un po’ paradossali, a rivelarsi idonea ad interagire con il mondo, come segnalavo in precedenza con l’esempio dello spazio di Hilbert.

V. Di mistero in mistero

Come c’è qualcosa di misterioso nei fondamenti della matematica, così c’è qualcosa di misterioso nell’efficacia dei modelli matematici nel rapporto con il mondo.

In un famosissimo articolo²³, cui hanno fatto seguito nel tempo molti altri²⁴, è stato osservato da Eugene Wigner²⁵ che non è per niente ovvio che alcune regolarità *invarianti* nel tempo e *universali* nello spazio (“leggi della natura”) debbano esistere nell’universo, e tanto meno che possiamo

²² Dalla prima pagina di: N. BOURBAKI (1949). Foundations of Mathematics for the Working Mathematician. *Journal of Symbolic Logic* 14, 1–8.

²³ E. WIGNER (1960). The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13, 1, 1-14.

²⁴ Cf. la rassegna di citazioni riportata nel seguente URL (quello dove si può scaricare l’articolo): <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160130102> (ultimo accesso il 23/10/2020).

²⁵ L’ungherese naturalizzato americano Eugene Wigner (Budapest, 17 novembre 1902 – Princeton, 1 gennaio 1995) fu un fisico teorico e matematico, vincitore del premio Nobel per la fisica nell’anno 1963.

conoscerle. È inspiegabile (“qualcosa al confine con il misterioso” dice testualmente Wigner) perché il linguaggio della matematica sia appropriato per esprimere le regolarità che percepiamo nel mondo fisico.

Rimane altresì aperta la domanda “se le diverse regolarità, cioè le varie leggi della natura che verranno scoperte, si fonderanno in una singola unità coerente” (sempre Wigner). Oppure sarà inevitabile “che ci siano sempre alcune leggi della natura che non abbiano nulla in comune tra loro” (idem).

Effettivamente lo stato attuale delle cose sembra indicare che le varie scienze sono talvolta vicine e talvolta distanti, e quelle vicine hanno solo sovrapposizioni parziali. Anche all'interno di una stessa scienza, ad esempio la fisica, a volte sono richiesti livelli diversi e irriducibili di descrizione matematizzata dei fenomeni²⁶. D'altronde non è scritto da nessuna parte che debba esistere una “teoria del tutto”.

Già alla metà dell'Ottocento James Maxwell²⁷ scriveva il seguente testo eloquente, chiaramente allusivo al Galileo Galilei del Saggiatore²⁸ (la traduzione è mia, in nota il testo originale²⁹):

Forse il “libro”, come è stato chiamato, della natura è regolarmente impaginato; in tal caso, senza dubbio le parti introduttive spiegheranno quelle che seguono, e i metodi insegnati nei primi capitoli saranno dati per

²⁶ Si pensi alla corrente irriducibilità del livello quantistico (quello che trova ad esempio applicazione nella ben nota PET) e del livello relativistico (quello che trova applicazione nell'altrettanto ben noto GPS).

²⁷ Al fisico e matematico scozzese J. C. Maxwell (Edimburgo, 13 giugno 1831 – Cambridge, 5 novembre 1879) è dovuta in particolare la teoria dell'elettromagnetismo.

²⁸ Nella ricordata opera di GALILEO GALILEI del 1623 si legge testualmente:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Si veda alla p. 232 di GALILEO GALILEI (1896). *Opere, Edizione Nazionale, Vol. VI*. Firenze: G. Barbera.

²⁹ Il testo originale di Maxwell:

Perhaps the “book”, as it has been called, of nature is regularly paged; if so, no doubt the introductory parts will explain those that follow, and the methods taught in the first chapters will be taken for granted and used as illustrations in the more advanced parts of the course; but if it is not a “book” at all, but a *magazine*, nothing is more foolish to suppose that one part can throw light on another.

scontati e utilizzati come illustrazioni nelle parti più avanzate del corso; ma se non si tratta affatto di un “libro”, ma di una *rivista*, nulla è più folle del supporre che una parte possa far luce su un'altra^{30 31}.

Personalmente, sebbene il mondo sembri meravigliosamente ordinato, ho sempre trovato audace l'idea che il mondo sia ordinato *matematicamente*, nello stesso senso della *nostra* matematica. Credo sì che il mondo sia accessibile (parzialmente!) alla nostra comprensione e che la matematica abbia parte in tale comprensione, ma non andrei molto oltre. Pertanto l'attuale situazione, in cui usiamo diversi modelli matematici per spiegare aspetti diversi (e circoscritti) della realtà, mi sembra conforme alla mia sensazione.

In effetti, qui entra proprio in gioco la mia concezione di Dio alla luce dell'attività scientifica e tecnologica che la matematica supporta³². Ritengo

³⁰ Si veda alla p. 243 di: L. CAMPBELL – W. GARNETT (1882). *The Life of James Clerk Maxwell*. London: Macmillan and Co.

³¹ Sull'argomento in questione cf. anche il bel libro di S. CHIBBARO ET AL. citato in bibliografia.

³² Questa lunga nota, che riguarda argomenti non sviluppati nel corpo dell'articolo, ne costituisce tuttavia un naturale complemento perché approfondisce l'aspetto dell'efficacia della matematica in riferimento all'ambito tecnologico, vale a dire, alla costruzione di macchine funzionanti. Dopo tutto, anche l'efficacia della matematica nelle scienze naturali riceve forse la sua convalida maggiore dal fatto che le macchine funzionino (si ricordi l'ultima frase nella citazione di Musil).

Nel senso più generale, una macchina è un dispositivo complesso approntato per svolgere un determinato compito. Può trattarsi di congegni meccanici, come ad esempio automobili, aeroplani, lavatrici, etc. (dove il ruolo della matematica è mediato, come descritto da Musil), ma si parla anche di “macchina di Turing” in relazione al modello matematico concettuale di computazione che consente di prefigurare le prestazioni delle macchine di calcolo fisiche (l'inglese Alan Turing nacque a Londra il 23 giugno 1912 e morì a Manchester il 7 giugno 1954). Vorrei qui focalizzare sulle *macchine algoritmiche*: sistemi artificiali che elaborano informazioni, senza relazioni con il mondo esterno come i computer, o in relazione con esso come i robot (la rilevanza della matematica in questi contesti è facilmente intuibile). Le macchine algoritmiche sono la chiave del progetto di intelligenza artificiale, che è suscettibile di due interpretazioni: c'è chi si propone di produrre macchine in grado di *dare spiegazioni* procedendo in termini di causa–effetto, e chi si propone di produrre macchine in grado di fare previsioni accurate (entro un margine di errore prestabilito) stabilendo correlazioni in grandi quantità di dati. Al momento il secondo punto di vista sembra dominante, in virtù dell'efficacia dell'apprendimento automatico in tanti contesti pratici, ma il primo punto di vista è forse più significativo. La cosa ironica è che ambedue gli approcci potrebbero rendere disoccupati i matematici: nel primo perché alcuni immaginano robot capaci essi stessi di creare teorie e modelli matematici, nel secondo perché alcuni ipotizzano la completa sostituzione del metodo scientifico con l'apprendimento automatico.

che Dio sia molto più coinvolto nella sua creazione di quanto normalmente si riconosca. Molti sembrano ancora pensare che abbia messo in moto il mondo fisico e biologico una volta per tutte, di tanto in tanto interferendo con esso (ad esempio con qualche miracolo). A mio avviso Dio ha dato anche al mondo una sorta di "libertà", nel senso che l'evoluzione del mondo, pur essendo sottoposta ad alcuni vincoli, non ha uno sbocco univocamente prefissato³³.

La creazione è perciò un processo continuo dall'esito aperto, determinato anche dal dinamismo del mondo (ad esempio con i virus e i terremoti) e dall'intervento umano (ad esempio ovviando con la scienza agli effetti traumatici di virus e terremoti).

Gli umani e i loro prodotti artificiali fanno parte di tale processo (come i castori e le dighe da essi costruite) e almeno alcuni risultati dell'attività umana possono essere visti come un netto miglioramento sul mondo pre-umano³⁴.

La cura della creazione non deve essere confusa con una nuova forma di fissismo.

L'onniscienza di Dio si manifesta nel fatto che Dio conosce tutti i possibili futuri scenari determinabili dalla "libertà" del mondo fisico e dalle scelte degli umani. La sua onnipotenza si manifesta nel fatto che Dio è comunque sufficientemente potente da riuscire a ricondurre a un esito buono qualunque scenario possano avere determinato le scelte degli umani e la "libertà" del mondo fisico.

Perché la creazione sia proprio così (con il carico di sofferenza portato dai cataclismi naturali e dalla cattiveria umana, ad esempio) non è facile da comprendere, pur tenendo conto dell'azione del Maligno.

Ma rimane comunque, per il cristiano, la consapevolezza che Dio ha fatto ancor più sua *questa* realtà con l'incarnazione della Parola creatrice e con l'introduzione del corpo risorto di Gesù nell'intimità divina.

L'infinito è quindi compromesso definitivamente con il finito.

³³ Un'idea del genere è stata espressa nell'omelia del 10 aprile 2020, Venerdì Santo, dal predicatore della Casa Pontificia, padre Raniero Cantalamessa; cf. il seguente filmato: www.youtube.com/watch?v=VXzB84dFZbI (ultimo accesso il 23/10/2020). Un'avvertenza importante: l'accennata "libertà" del mondo *non* va intesa nei termini di una personificazione, come invece sembra talora intendere chi parla di Natura, Madre Terra, *et sim.* in maniera accentuatamente antropomorfa.

³⁴ Cf. ad esempio la domesticazione di animali e piante, l'architettura e l'ingegneria, la medicina umana e veterinaria, la vita intellettuale e spirituale degli umani.

Riferimenti bibliografici

CARTWRIGHT, R. L. (1997). Aquinas on Infinite Multitudes. *Medieval Philosophy and Theology* 6, 183–201.

CHIBBARO, S. – RONDONI, L. – VULPIANI, A. (2014). *Reductionism, Emergence and Levels of Reality*. Cham: Springer.

MARINO, A. – SBORDONE, C. (A cura di) (1996). *Ennio De Giorgi. Riflessioni su matematica e sapienza*. Napoli: Quaderni dell'Accademia Pontaniana.

TAPP, C. (2014). Absolute Infinity – A Bridge Between Mathematics and Theology? In N. TENNANT (Ed.), *Foundational Adventures. Essays in Honour of Harvey M. Friedman*. London: College Publications, 77–90.