

Solución de la ecuación de Navier para el cálculo de elasticidad lineal en materiales nanoreforzados utilizando el método de elementos de frontera

Solution of the Navier Equation for the Calculation of Linear Elasticity in Nano-Reinforced Materials using the Boundary Element Method

Leidy Johana Gaviria Posada¹
Andrés Felipe Hernández Marulanda²

¹Ingeniería Biomédica, Instituto Tecnológico Metropolitano Medellín, Colombia.
Email: leidygaviria186418@correo.itm.edu.co.

²Grupo de Investigación en modelamiento y simulación computacional,
Universidad de San Buenaventura Medellín, Colombia.
Email: andres.hernandez@usbmed.edu.co.

 OPEN ACCESS



Copyright:

©2021. La revista *Ingenierías USBmed* proporciona acceso abierto a todos sus contenidos bajo los términos de la licencia creative commons Atribución no comercial SinDerivar 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)

Tipo de artículo: Investigación.

Recibido: 26-07-2020.

Revisado: 15-11-2020.

Aprobado: 28-12-2020.

Doi: 10.21500/20275846.4853

Referenciar así:

L. J. Gaviria Posada y A. F. Hernández Marulanda, "Solución de la ecuación de Navier para el cálculo de elasticidad lineal en materiales nanoreforzados utilizando el método de elementos de frontera," *Ingenierías USBMed*, vol. 12, no. 1, pp. 34-42, 2021.

Disponibilidad de datos:

todos los datos relevantes están dentro del artículo, así como los archivos de soporte de información.

Conflicto de intereses:

los autores han declarado que no hay conflicto de intereses.

Editor: Andrés Felipe Hernández.
Universidad de San Buenaventura, Medellín, Colombia.

Resumen. En este *paper* se plantea el estudio de elasticidad lineal en un material compuesto nanoreforzado sometido a una fuerza externa constante con el fin de ser utilizado en la fabricación de prótesis de miembro inferior, para lo que se desarrolló un algoritmo computacional que resuelve la ecuación de elasticidad lineal (ecuación de Navier), utilizando el método de elementos de frontera y funciones de base radial. Se determinó si el uso de un algoritmo puede predecir el cambio en una geometría bidimensional a nivel de deformaciones, desplazamientos y esfuerzos en un material compuesto reforzado con nanotubos de carbono; utilizado en la fabricación de prótesis de miembro inferior y evidenciar el cumplimiento de los requerimientos deseados al ser sometido a una fuerza constante. Por lo anterior, con la implementación del algoritmo y el análisis de la información obtenida, se apoya el proceso de selección de un material compuesto nanoreforzado para uso en el desarrollo de prótesis de miembro inferior al ser sometido a una fuerza constante. Según el algoritmo desarrollado y los resultados encontrados, el método de elementos de frontera permite la simulación del comportamiento mecánico de un material compuesto (acero A36, a concentraciones de nanotubos de carbono de 1%, 2%, 3%). El cálculo de esfuerzos y deformaciones en el modelo se realizó utilizando un algoritmo que calcula las derivadas mediante la función multicuadrática de las funciones de base radial. Con este estudio, al solucionar numéricamente el problema de catílever beam variando las concentraciones del material, se generaron las gráficas características de esfuerzo - deformación, lo que permitió determinar que con las concentraciones escogidas se da una buena respuesta mecánica que permite considerar el material para ser utilizado en desarrollo de prótesis de miembro inferior.

Palabras Clave. Elasticidad lineal, Funciones de base radial, función multicuadrática, Método de elementos de frontera.

Abstract. In this paper, the study of linear elasticity is proposed in a nano reinforced composite material subjected to a constant external force in order to be used in the manufacture of lower limb prostheses, for which a computational algorithm was developed that solves the equation of linear elasticity (Navier equation), using the boundary element method and radial base functions. It was determined if the use of an algorithm can predict the change in a two-dimensional geometry at the level of deformations, displacements and stresses in a composite material reinforced with carbon nanotubes used in the manufacture of lower limb prostheses and demonstrate compliance with the desired requirements when subjected to constant force. Therefore, with the implementation of the algorithm and the analysis of the information obtained, the selection process of a nano-reinforced composite material for use in the development of lower limb prostheses is supported when subjected to constant force. According to the algorithm developed and the results found, the boundary element method allows the simulation of the mechanical behavior of a composite material (A36 steel, at carbon nanotube concentrations of 1%, 2%, 3%). The stress and deformation calculation in the model was performed using an algorithm that calculates the derivatives using the multi-quadratic function of the radial-basis functions. With this study, when numerically solving the catilever beam problem by varying the concentrations of the material, the stress-deformation characteristic graphs were generated, which allowed determining that with the chosen concentrations a good mechanical response occurs that allows considering the material to be used in the development of lower limb prostheses.

Keywords. Linear Elasticity, Radial Basis Functions, Multiquadric Function, Boundary Element Method.

I. Introducción

Un material compuesto es aquel que está desarrollado a partir de la combinación de dos o más materiales, usualmente ambos poseen diferentes propiedades [1]. Esta combinación permite darle al material compuesto propiedades únicas.

Por la biocompatibilidad existente entre algunos materiales reforzados con nanotubos, se han utilizado además para la creación de órtesis y prótesis, ya que, cambiando la resistencia de los nanotubos como resultado de la interacción química entre los átomos superficiales, se pueden desarrollar biosensores con una morfología controlada que pueden ser adheridos a las prótesis y órtesis, permitiendo un monitoreo continuo del usuario [2], [3].

Una de las principales características que poseen los nanotubos de carbono y la razón por la que son tan apetecidos en las aplicaciones biomédicas es por su capacidad de almacenamiento energético, su uso como sensores y su posible uso como componentes nanoelectrónicos [4], [5]. Se están realizando ensayos clínicos exhaustivos, pues se teme que la exposición prolongada directa a nanotubos de carbono pueda producir problemas dermatológicos como dermatitis, pero los estudios toxicológicos están encaminándose en determinar los límites permitidos y los recubrimientos que puedan emplearse para minimizar el impacto de éstos en la salud [6], [7].

La evolución en la fabricación de prótesis de miembro inferior se ha dado a pasos vertiginosos, con el uso de materiales compuestos se ha prolongado el tiempo de vida útil, se ha mejorado el comportamiento mecánico de las prótesis como la relación con el peso soportado y se ha dado espacio al desarrollo de piezas livianas que permitan la práctica de deportes a nivel competitivo para sus usuarios [8], [9].

La ventaja que presentan los materiales compuestos reforzados con partículas es su resistencia a tensión y compresión al igual que su buen comportamiento en cuanto a la transferencia de calor. La buena capacidad de soporte de cargas ha llamado la atención de las empresas aeronáuticas, que han visto en los materiales compuestos un sucesor a las estructuras de aluminio tradicionales, donde el material que mejor se adapta a las necesidades técnicas es un compuesto de fibra de carbono que tiene una buena relación esfuerzo-deformación, resistencia al calor y características no metálicas [1].

Cuando se trabaja con cualquier material, se debe revisar que su comportamiento mecánico sea el más adecuado para la función que debe desarrollar, en el campo aeronáutico o electrónico es importante que los materiales tengan aparte de una buena relación con las altas velocidades y presiones, un buen comportamiento a los gradientes térmicos, ya que un cambio de temperatura puede afectar la relación esfuerzo - deformación

y cambiar el comportamiento intrínseco del material; Por lo anterior es que se está adoptando el uso de materiales compuestos y reforzados, para mejorar estas capacidades [10].

En la actualidad, existen software que permiten calcular el comportamiento mecánico de cualquier material, por ejemplo, Comsol, Ansys, Solidworks, solo por mencionar algunos. El inconveniente es que estos son software con códigos cerrados que no permiten la manipulación o interacción de las ecuaciones constitutivas por parte del usuario [11]. Además, están desarrollados bajo el modelo de elementos finitos, un esquema numérico basado en derivadas muy utilizado y popularizado desde la década de los sesenta, pero que presenta inconvenientes en cuanto a su uso con geometrías curvas y que requieren un mayor tiempo de cómputo [12].

Como se ha demostrado ampliamente en la literatura, los métodos numéricos integrales tienen una mayor exactitud comparados con los métodos numéricos basados en derivadas, además que disminuyen el tiempo de cómputo y el gasto computacional [13].

Se pretenden reforzar diferentes materiales con nanotubos de carbono, lo cual estableció las bases para su posible uso en fabricación de exoesqueletos o prótesis de miembro inferior.

Este trabajo plantea la solución de la ecuación de Navier, bidimensional, utilizando el método de elementos de frontera y las funciones de base radial, para conocer el comportamiento de la deformación y el desplazamiento del material compuesto nanoreforzado cuando se somete a una fuerza constante externa y su respuesta, para determinar su compatibilidad en el desarrollo de prótesis de miembro inferior.

Se desarrolló un algoritmo computacional en Fortran el cual se entrega para libre uso y además se comparan los resultados con los comparados en la literatura especialmente en la solución analítica reportada por Timoshenko [14].

II. Modelos matemáticos

A. Método de elementos de frontera

Algunos autores consideran que el tratamiento mediante formulación anisotrópica puede dar una mejor aproximación [15], pero por la dificultad de su implementación puede presentar peores resultados numéricos; además, existen diferentes formas de abordar este problema como se reporta en la literatura [16], [17]. En el presente trabajo se aborda el problema mediante la formulación clásica, variando el módulo de Young y coeficiente de Poisson, según la composición del material compuesto utilizado [18].

El método de elementos de frontera es una herramienta numérica para solucionar ecuaciones integrales en la frontera basado en un procedimiento de discretización.

Parte de la ecuación integral [19]

$$u(x) = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (1)$$

Conocida como identidad de Somigliana para desplazamientos.

Con u_{lk}^* y p_{lk}^* representan los desplazamientos y las tracciones en dirección k en un punto de campo correspondiente a un punto de fuerza unitario, actuando en la dirección l , aplicado en el punto de carga.

b_k son las fuerzas de cuerpo, es decir, una unidad puntual de carga positiva en cada una de las direcciones ortogonales dado por un vector director.

u_k y p_k son los valores de frontera para desplazamientos y tracciones.

Se conoce que, el módulo de cizalladura está definido por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

Con E módulo de Young, ν coeficiente de Poisson, y los desplazamientos están dados por:

$$u_{ij}^*(x, y) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_i r_j \right] \quad (3)$$

La ecuación (3) se conoce como la solución de Kelvin, con u_{ij}^* desplazamientos y $r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $r_j = \frac{\partial r}{\partial x_j}$ como la proporción de la distancia en las direcciones x , y .

Se tiene el campo de tracciones correspondiente:

$$p_{ij}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[((3-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j) \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right] \quad (4)$$

Con p_{ij}^* las tracciones y n_i , n_j , representan los vectores directores en dirección i, j .

Es un método que se aplica cuando se puede calcular las funciones de Green [20]. Haciendo posible con esto resolver ecuaciones diferenciales homogéneas sujetas a condiciones de frontera. La estabilidad del método es debido a que la integral es más estable que la derivada pues se tiende a cero y no a infinito. Como el esquema trabaja sobre la frontera del dominio, aparece la importancia del método pues trabaja con pequeñas divisiones que en el caso bidimensional pueden ser en líneas rectas o con elementos cuadráticos.

Cuando se encuentran los valores numéricos de las integrales, y se conocen las condiciones de frontera para el problema a tratar, se llega a un sistema del tipo

$$[H][u] + [G][p] = 0 \quad (5)$$

Este sistema matricial puede resolverse por cualquier método de solución y de allí se puede obtener los valores de los parámetros en todo el sistema estudiado.

En el caso de materiales anisotrópicos, al ser difícil el uso de la solución fundamental, Brebbia y Domingez propusieron otra técnica, la cual consiste en el uso de la solución fundamental isotrópica, seguida de un procedimiento iterativo para encontrar los valores correctos de desplazamientos y sus derivadas. Este proceso es el Dual Reciprocity Method [21].

B. Funciones de base radial

Suponiendo que $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, es una función real definida en d dimensiones que se buscan aproximar, donde la distribución de puntos es aleatoria. Una aproximación a f vía funciones de base radial es una función S de la forma [22].

$$S(X) = \sum_{i=1}^N \alpha_j \Psi(|x - x_j|) + P \quad (6)$$

Donde N denota el número de puntos, el vector de incógnitas, $\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ llamado núcleo radial y $|\cdot|$ denota la norma euclidiana. La aproximación de f mediante el método de interpolación por funciones de base radial, se puede expresar como:

$$S(X) = \sum_{i=1}^N \alpha_j \Psi(r_{ij}) + P \quad (7)$$

con $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2}$, donde el sistema de ecuaciones puede ser reescrito como:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{N=3} \alpha_i \Psi_i(r_{ij}) + \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^2 \quad (8)$$

Y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Psi & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde la matriz Ψ es de orden $n \times n$, λ de orden $n \times 1$ y f de $n \times 1$, y P es un polinomio de cualquier orden que acompaña la solución, en este trabajo se utilizó un polinomio de orden 2. La solución puede ser determinada si la matriz Ψ es no singular. Dentro de las funciones de base radial (FBR) se tienen las funciones de soporte global y soporte compacto, en el siguiente cuadro se muestran las más comunes [23]:

Tabla 1. Principales funciones de base radial empleadas normalmente.

Núcleo radial	Nombre
$\varphi(r) = r^{2d} \ln(r)$	Placa delgada
$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	Multicuádrlica
$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	Inv. Multicuádrlica
$\varphi(r) = e^{-\frac{r^2}{c^2}}$	Exponencial
$\varphi(r) = (1 - r)^4$	Wendland

C. Discretización

Partiendo de la definición de estencil, como un arreglo ordenado de nodos y de la ecuación (1), se tiene que, la propiedad física que se quiere determinar está conformada por la combinación lineal de unos coeficientes y los valores de la función en cada nodo que compone el estencil.

$$T = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3 \quad (10)$$

En donde, de forma matricial se puede saber que:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = [\phi] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Por definición de interpolación, se tiene que los valores de están dadas por la matriz inversa y el valor de la propiedad nodal:

$$[\phi] [\alpha] = [T] \quad (12)$$

Como se conoce el valor de la matriz y de la propiedad en cada nodo, se debe expresar en estos términos:

$$[\alpha] = [\phi]^{-1} [T] \quad (13)$$

En donde se tiene el valor para cada coeficiente:

$$[\alpha]_1 = [\phi]^{-1} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[\alpha]_2 = [\phi]^{-1} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Entonces, si se desea resolver la ecuación de convección, está dada por:

$$\left[\alpha_1 \frac{d\phi_1}{dx} + \alpha_2 \frac{d\phi_2}{dx} + \alpha_3 \frac{d\phi_3}{dx} \right] = 0 \quad (16)$$

Se crean entonces unas nuevas variables que contienen la derivada de la función, lo cual permite la solución del sistema

$$C_1T_1 + C_2T_2 + C_3T_3 = 0 \quad (17)$$

$$C_1^*T_2 + C_2^*T_3 + C_3^*T_4 = 0 \quad (18)$$

De donde se tiene la matriz

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1^* & C_2^* & C_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Conformando un nuevo sistema de ecuaciones matriciales lineales, la cual por solución matricial daría los valores de la propiedad en cada nodo que compone la matriz

$$x = A \setminus b \quad (20)$$

III. Metodología

Se desarrolló un algoritmo computacional en Fortran, el cual realiza el cálculo de esfuerzos, deformaciones y esfuerzos en un cantiléver beam, variando el nivel de concentración de los nanotubos de carbono utilizados, estos nanotubos don de capa múltiple con un diámetro de 69 nm y modulo de Young de 790 GPa y coeficiente de Poisson de 0.2.

Como el material que se utiliza para el desarrollo de este proyecto es acero A 36 reforzado con nanotubos de carbono al (1%, 2%, 3%) otros autores recomiendan las formulaciones clásicas de elasticidad lineal y el cambio en las características mecánicas del material específicamente el módulo de young [24].

Para calcular los módulos de los materiales compuestos, se utiliza la siguiente ecuación, donde se hace una relación entre los módulos de elasticidad y los porcentajes de materiales utilizados [25]

$$E_T = E_S V_S + E_{NT} V_{NT} \quad (21)$$

Partiendo de la ecuación (21), existen diferentes modelos analíticos de rigidez en materiales compuestos:

Entre los principales se encuentran, Voight y Reuss, Hashin y Strikman y Mori Tanaka, entre otros [18], [25].

Los modelos propuestos por Voight y Reuss son conocidos como la regla general de las mezclas. Se trata de una media ponderada para predecir las propiedades de un composite cuyo relleno son fibras continuas y unidireccionales. Esta regla de las mezclas se basa en la existencia un límite superior y otro inferior par las propiedades, correspondiendo ambos con los modelos de Voigt y Reuss [18].

El modelo de Hashin y Sthrikman se basa en asumir una isotropía macroscópica y homogeneidad en el composite, en este modelo la forma del material de relleno no es un factor limitante, su objetivo es establecer un límite superior e inferior para el composite basándose en los principios generales de la elasticidad [25].

El modelo de Mori-Tanaka se basa en los principios de modelo de inclusión de Eshelby. Éste en su trabajo estudió el comportamiento de una inclusión elástica de forma elipsoidal embebida en un medio elástico e indefinido. A partir de su consideración se han podido desarrollar varias teorías que permiten el cálculo de los tensores de concentración de deformación y tensión (A y B) en función de la fracción volumétrica forma y ecuaciones constitutivas de material de refuerzo [18].

Basado en el trabajo realizado por Bakshi, donde se utilizan nanotubos de carbono de pared multiple (como los utilizados en este trabajo, ver Figura 4), se tomó el modelo de Voight y Reuss para el cálculo de las propiedades mecánicas del material compuesto (módulo de Young, coeficiente de Poisson, módulo de corte, módulo de compresibilidad).

Para el cálculo del módulo de Young, para el acero A 36 con nanotubos a 1% es:

Se tiene el módulo de elasticidad transversal, E_T

$$E_C(L) = E_m V_m + E_r V_r \quad (22)$$

V_m es la fracción volumétrica del material matriz, V_r es la fracción volumétrica del material de refuerzo, E_m módulo de Young del material matriz, E_r módulo de Young del material de refuerzo.

$$E_{T1\%} = (200G \times 99\% + 790 \times 1\%)GPa = 205.9GPa \quad (23)$$

$$\frac{1}{E_C(T)} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_r}{E_r(T)} = 201.5GPa \quad (24)$$

Con $E_C(T)$, módulo de Young del composite en dirección transversal, $E_r(T)$ módulo de Young del material de refuerzo en dirección transversal.

$$E_C = \frac{3}{8}E_C(L) + \frac{5}{8}E_C(T) = 203.15GPa \quad (25)$$

Para el cálculo del coeficiente de Poisson se tiene:

$$v_C = v_m V_m + v_r V_r \quad (26)$$

$$v_C = 0.33(0.99) + 0.22(0.01) = 0.3287 \quad (27)$$

Reemplazando los valores.

El módulo de corte

$$G_C = E \frac{c}{2(1 + v_c)} = 76.37GPa \quad (28)$$

$$K_C = E \frac{c}{3(1 - 2v_c)} = 199.1696GPa \quad (29)$$

Los mismos cálculos se realizaron para las concentraciones de 2% y 3%.

A continuación, se muestran los diferentes módulos para cada uno de los materiales:

Tabla 2. Modulos de Young y coeficientes de Poisson ara los materiales utilizados

Materiales	Módulo de Young (GPa)	Coficiente de Poisson
Acero A36	200	0.33
MWCNT	790	0.2
Acero A36+1%MWNT	203.15	0.3287
Acero A36+2%MWNT	206.32	0.3274
Acero A36+3%MWNT	209.5	0.3201

IV. Resultados

Las principales dificultades que se presentan cuando se desarrolla una prótesis de miembro inferior son en la fabricación del encaje ortoprotésico (socket), ya que por su biocompatibilidad y biotoxicidad se utilizan polietileno y polipropileno, se esta estudiando además el reforzamiento con nanotubos de carbono debido el comportamiento de estos [26], por el uso de los materiales actuales (polietileno y polipropileno), se presentan problemas dermatológicos que es lo que se busca minimizar. Este trabajo se centra en el material utilizado para el desarrollo de la prótesis la cual se encaja con el socket que irá en contacto con el paciente.

Actualmente se están utilizando nanotubos de carbono para mejorar la resistencia ante los impactos, y alargar la vida útil del material en el desarrollo de prótesis de miembro inferior y superior personalizadas, debido al alto costo (promedio de \$ 230000) que paga un amputado en prótesis a 5 años, por lo cual se busca mejorar e innovar en las prácticas de manufactura (manufactura aditiva utilizando impresion 3D) y en el uso de nuevos materiales; como plantea este trabajo [27].

El desarrollo de prótesis de miembro inferior evalua además diferentes variables biomecánicas baropodométricas para conocer el comportamiento del paciente, por lo tanto el material utilizado para la prótesis debe tener un comportamiento similar al hueso o debe tener un comportamiento mejor, es por esto que se realizan prótesis de acero, titanio y el propósito de este trabajo es mirar el comportamiento del acero al reforzarse con nanotubos [28].

Se realizó un estudio de independencia de malla donde se realizaron 4 simulaciones con Acero A36 reforzado con 1% de MWCNT, la simulación se realizó con respecto al desplazamiento de dirección y , en cuanto a la convergencia del modelo, se calculó el error RMS, y aunque el menor error se encuentra en la malla de 10×49 , al no ser una diferencia mayor al 10%, se selecciona la malla de 9×49 .

Tabla 3. Modulos de Young y coeficientes de Poisson ara los materiales utilizados

Malla	Nodos en la frontera	Nodos interiores	Nodos totales	Error RMS
5×20	100	900	1000	0.0024
5×30	140	900	1040	0.0018
9×49	120	900	1020	0.0011
10×49	200	900	1100	0.0009

Se realizó el estudio de independencia de malla para que la predicción del modelo fuera independiente del tamaño de la malla. El estudio consistió en calcular el desplazamiento máximo en cada una de las mallas utilizadas y compararlo con el valor analítico.

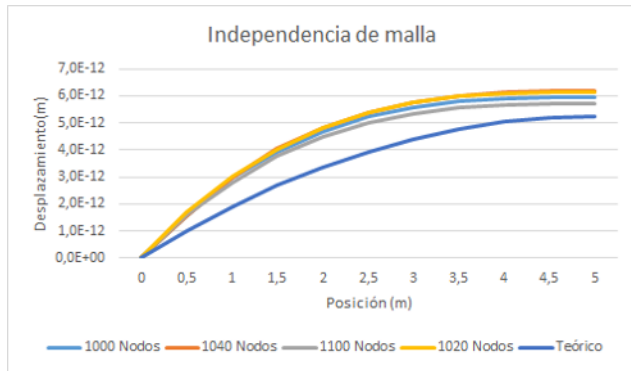


Figura 1. Independencia de malla

La Figura 1 presenta la variación del desplazamiento en las cuatro mallas utilizadas, y la variación con el valor analítico. Se observó que existe muy poca variación entre las curvas (con un error calculado en 4.23%). Sin embargo, por la distribución nodal utilizada, aumentando el número de nodos en la frontera, y al ser más cercano al valor teórico, se realizaron las simulaciones con la malla de 10×49 .

A continuación, en la Figura 2, se muestra la gráfica comparativa del desplazamiento analítico vs simulado en el eje y

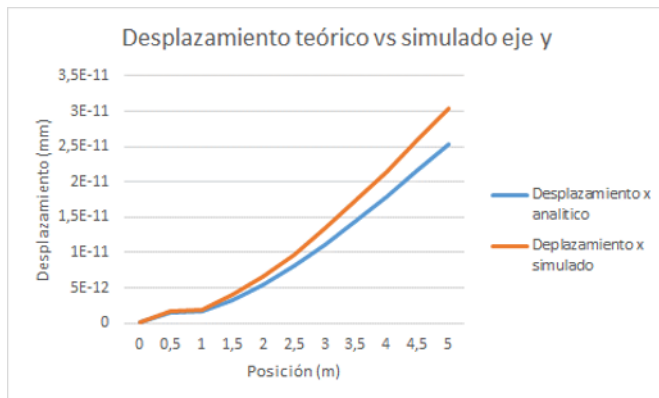


Figura 2. Comparación desplazamiento analítico vs simulado en eje y

Al ser un ejercicio de simulación, existen diversos factores en la elección de los modelos que pueden variar los resultados (parámetros utilizados, cálculos de derivadas); uno de los propósitos de este trabajo es comparar las deformaciones máximas presentadas en el material, cuando se tienen las diferentes concentraciones de nanotubos, las cuales se emplean en el cálculo del modelo propuesto.

Adicionalmente, al encontrar la solución de desplazamientos en la geometría, mediante el uso de funciones de base radial, se encontraron los valores de los esfuerzos y deformaciones en los nodos internos y de frontera.

Al calcular los esfuerzos y las deformaciones en los puntos máximos, se realiza la gráfica (ver Figura 3) en

donde se ve el comportamiento del acero A36 con 1% de nanotubos.

Se realiza la gráfica de esfuerzo y deformación teórica, la cual cuando se le pone la línea de tendencia, se observa que es una línea recta, en la cual la pendiente obedece al módulo de Young ($3E11$)

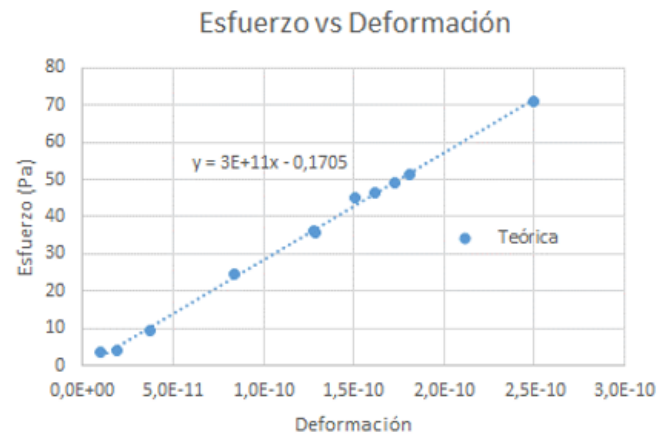


Figura 3. Gráfica Esfuerzo vs Deformación para el caso acero A36 + 1% MWCNT

Según lo reportado en la literatura la gráfica del material permanece en la región elástica, tanto la simulada como la analítica, por tanto el material al no llegar al punto de fluencia, puede ser utilizada para el desarrollo de prótesis en miembro inferior.

Al realizar prótesis de miembro inferior, se deben cumplir algunos parámetros biomecánicos, además de los funcionales y de diseño. Su desarrollo debe hacerse con materiales que puedan soportar cargas pesadas y con una estructura ligera. Existe una principal preocupación en el desarrollo de prótesis, en cuanto al punto de articulación, que en el cuerpo humano ejerce la función el tobillo. Uno de los artículos revisados [29] consiste en comparar los cálculos convencionales de la articulación del tobillo con un centro articular funcional (FJC) utilizando los datos recopilados en una máquina de prueba de vuelco y en un laboratorio de movimiento durante tareas de caminata diferentes [29]. En dicho artículo, se evalúan tres pies protésicos diferentes, donde se recogieron datos cinemáticos durante la marcha en terreno llano, así como hacia arriba y hacia abajo de una pendiente. Se realizó el cálculo del FJC durante la fase de postura de la marcha para las prótesis comerciales Vari-Flex XC, Pro-Flex-Flex XC, Pro-Flex Pivot [30] y observaron que la ubicación de FJC variaba para los diferentes pies protésicos y dependía de la tarea según las tres condiciones de marcha.

Otro de los artículos [31], propone el estudio de prótesis mediante FEM, con los parámetros de coeficiente de Poisson entre 0.26 a 0.33 y módulo de Young entre $7.43E10$ a $1.1E11$, con estos valores se realizaron las gráficas comparativas de módulo de Young, contra co-

eficiente de Poisson, graficas de contorno, gráficas de densidad. Luego de un análisis FEA y un proceso de optimización, los autores estiman que el mejor material para desarrollo de prótesis de miembro inferior, tiene coeficiente de Poisson de 0.260 y módulo de Young $1.1E11 \text{ kg/m}^2$ y concluyen que un material compuesto optimizado con buena resistencia y máxima compatibilidad con las principales propiedades del vidrio epoxi y titanio es muy adecuado.

Revisando los resultados reportados por los autores respecto a los materiales utilizados para el desarrollo de prótesis de miembro inferior (vidrio epoxi y titanio, Carbon X) y considerando las características mecánicas del acero A36 + 0.3 MWCNT, se realizó la gráfica comparativa del desplazamiento máximo del cantilever beam al aplicarle una carga de 1200N, que es la reportada por los autores [29].

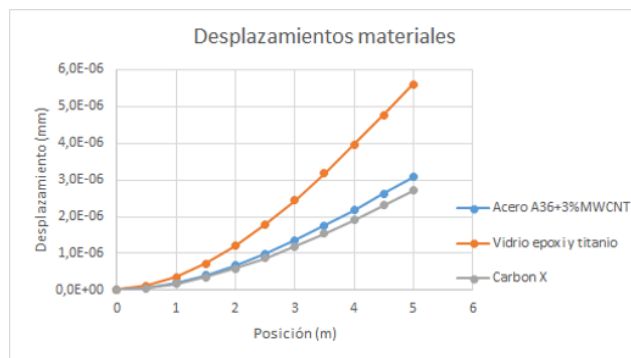


Figura 4. Desplazamientos vs posición en los tres materiales

En la Figura 4, se observa que el comportamiento en cuanto a los desplazamientos máximos entre el material Carbon X y el acero A36 +3% MWCNT es similar, mientras que el desplazamiento en el vidrio epoxi y titanio presenta una curva más pronunciada, por lo tanto al comparar ambos comportamientos, se puede determinar que el material que se propone en el presente trabajo, se ajusta a las especificaciones mecánicas que utilizan los fabricantes de prótesis de miembro inferior.

Cuando se calculan los errores en cuanto a desplazamiento máximo entre los materiales reportados en la literatura y el material propuesto en el presente artículo, son muy bajos del orden de $1E-6$, lo cual demuestra que puede ser utilizado para la aplicación propuesta. Según lo reportado en la literatura, es importante conocer el desplazamiento máximo del material, ya que debido al desplazamiento de los puntos de aplicación de la fuerza, por el soporte que efectúa el tobillo en un pie es necesario que el comportamiento del material se conserve en el régimen elástico, para que no se presenten grandes deformaciones con la carga aplicada, es por esto que al comparar el desplazamiento máximo de los materiales en la Figura 4, se observa que el material propuesto acero A36 +3% MWCNT, cumple con los

requisitos de diseño propuestos por los fabricantes de prótesis de miembro inferior [31].

V. Discusión

Tener un algoritmo computacional que resuelva la ecuación de Navier para elasticidad lineal, utilizando el método numérico de elementos de frontera, combinado con las funciones de base radial, es una herramienta que permite entender el comportamiento asociado a las deformaciones y esfuerzos en elasticidad lineal.

Sirve además combinado con técnicas de deep learning para el desarrollo de un modelo predictivo de falla en un material o en la construcción de prótesis u órtesis como propone el presente artículo.

VI. Conclusiones

Se desarrolló un algoritmo que resuelve la ecuación de Navier para elasticidad lineal utilizando el método de elementos de frontera e integrando un esquema de solución en el cálculo de derivadas, mediante el método de funciones de base radial, el cual al ser trabajado con los parámetros en la literatura (como parámetro de forma en 0.8), obtuvo resultados con errores pequeños al ser comparados con la solución analítica.

Se implementaron los algoritmos que solucionan las ecuaciones de Navier y se obtuvieron desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en materiales compuestos (acero A36 con nanotubos de carbono al 1%, 2%, 3%) en la geometría establecida y dicho algoritmo permitió obtener resultados que concuerdan con lo reportado en la literatura.

Se pudo estudiar el comportamiento mecánico en un material compuesto isotrópico (nano reforzado), mediante métodos numéricos de formulación integral y funciones de interpolación, para la solución de la ecuación de Navier de elasticidad lineal bidimensional; evidenciando que dicho material puede ser utilizado en la investigación biomédica para el desarrollo de órtesis y prótesis según la tendencia actual, la cual consiste un material que cumpla con bajas deformaciones, pequeños desplazamientos y un módulo elástico entre $[1.1, 2.2] \text{ GPa}$.

Se realizó una comparación analítica en los desplazamientos máximos de materiales reportados en la literatura (vidrio epoxi y titanio y Carbon X), con el material propuesto en el presente trabajo acero A36 + 3% MWCNT y según el cálculo del error L_2 , donde la diferencia entre los desplazamientos máximos es del orden de $1E-6$, el material puede ser utilizado para la aplicación deseada y a medida que se aumenta la concentración de nanotubos, presenta menores desplazamientos con la misma carga aplicada.

VII. Trabajos futuros

Utilizando métodos numéricos vanguardistas como el propuesto en este trabajo e implementando esquemas de solución transitorios, es posible no solo conocer donde pueden fallar los materiales, si no además el tiempo necesario para que esto ocurra. Por tanto sería muy interesante combinar la solución transitoria de ecuaciones diferenciales utilizando métodos vanguardistas y el uso de herramientas computacionales como Deep learning.

VIII. Agradecimientos

Los autores agradecen al Instituto Tecnológico Metropolitano, por la formación de uno de los autores y a la Universidad de San Buenaventura por el tiempo en la elaboración de este paper.

Referencias

- [1] I. Daniel e I. Ori, *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [2] E. Bekyarova, . N. Yingchun y E. Malarkey, “Applications of carbon nanotubes in biotechnology and biomedicine,” *J. Biomed. Nanotechnol*, vol. 1, n.º 1, págs. 3-17, 2005.
- [3] J. Chiad, S. Wajdj y J. Abbas, “Effect of the carbon nanotube (CNT) in the materials used for prosthetics and orthotics applications,” *International Journal of Energy and Environment*, vol. 9, n.º 3, págs. 283-294, 2018.
- [4] *Carbon Nanotube-Polymer Composites*. RCS Publishing, 2013.
- [5] S. Polizu, O. Savadogo, P. Poulin e Y. L’hocine, “Applications of carbon nanotubes-based biomaterials in biomedical nanotechnology,” *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, vol. 3, págs. 1883–1904, 2006.
- [6] G. Rahman, Z. Najaf y A. Mehmood, “An Overview of the Recent Progress in the Synthesis and Applications of Carbon Nanotubes,” *Journal of carbon research*, vol. 5, n.º 1, págs. 1-31, 2019.
- [7] T. McNally y P. Potschke, *Polymer-carbon nanotube composites Preparation, properties and applications*. Woodhead Publishing, 2011.
- [8] J. Laferrier y R. Gailey, “Advances in lower-limb prosthetic technology,” *Physical Medicine and Rehabilitation Clinics of North America*, vol. 21, n.º 8, págs. 87–110, 2010.
- [9] K. Samuelsson, T. Outi y A.-L. Salminen, “Effects of lower limb prosthesis on activity, participation, and quality of life: A systematic review,” *Prosthetics & Orthotics International*, vol. 36, n.º 2, págs. 145–158, 2012.
- [10] N. Boyard, *Heat Transfer in Polymer Composite Materials Forming Processes*. Wiley, 2016.
- [11] B. Duleba y L. Dulebova, “Simulation and evaluation of carbon/epoxy composite systems using FEM and tensile test,” *Procedia Engineering*, vol. 9, págs. 70–74, 2014.
- [12] J. H. Ferziger y M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 2012.
- [13] M. Subrata, “Boundary element methods in solid mechanics - a tribute to frank rizzo,” *Electronic Journal of Boundary Elements*, vol. 1, n.º 1, págs. 47-45, 2003.
- [14] S. Timoshenko y J. N. Goodier. McGraw Hill, 1951.
- [15] N. A. Schclar, *Anisotropic Analysis Using Boundary Elements*. South Hampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
- [16] Y. J. Liu y X. L. Chen, “An advanced 3d boundary element method for characterizations of composite materials,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 35, n.º 1, págs. 69-81, 2005.
- [17] P. Lingyun, D. Adams y F. Rizzo, “Boundary element analysis for composite materials and a library of green’s functions,” *Computers & Structures*, vol. 66, n.º 5, págs. 685-693, 1998.
- [18] S. R. Bakshi, D. Lahiri y A. Agarwal, “Carbon nanotube reinforced metal matrix composites - a review,” *International Materials Reviews*, vol. 55, n.º 1, págs. 41-64, 2010.
- [19] G. F. Karlis, A. Charalambopoulos y D. Polyzos, “An advanced boundary element method for solving 2D and 3D static problems in Mindlin’s straingradient theory of elasticity,” *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, n.º 11, págs. 1407-1427, 2010.
- [20] J. Katsikadelis, *Boundary elements theory and applications*. Elsevier, 2002.
- [21] P. Patridge, C. Brebbia y L. Wrobel, *The dual reciprocity boundary Element Method*. Computational mechanics publications, 1991.
- [22] W. Chen y M. Tanaka, “A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 43, n.º 3–5, págs. 379-391, feb. de 2002.
- [23] R. Vertnik y B. Šarler, “Meshless local radial basis function collocation method for convectediffusive solidliquid phase change problems,” *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 16, n.º 5, págs. 617-640, 2006.
- [24] S. Young Seok e Y. Jae Ryou, “Modeling of effective elastic properties for polymer based carbon nanotube composites,” *Polymer*, vol. 47, n.º 5, págs. 1741-1748, 2006.
- [25] K. S. Munir, P. Kingshott y C. Wen, “Carbon Nanotube Reinforced Titanium Metal Matrix Composites Prepared by Powder Metallurgy—A Review,” *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*, vol. 1, n.º 1, págs. 1-18, 2014.

- [26] C. Quintero-Quiroz y V. Z. Perez, “Materials for lower limb prosthetic and orthotic interfaces and sockets: Evolution and associated skin problems,” *Revista de la Facultad de Medicina*, vol. 67, n.º 1, págs. 117-125, mar. de 2019.
- [27] F. Tavangarian y C. Proano, “The need to fabricate lower limb prosthetic devices by additive manufacturing,” *Biomedical Journal of Scientific & technical research*, vol. 15, n.º 5, 2019.
- [28] L. Paternò, M. Ibrahimi, E. Gruppioni, A. Menciassi y L. Ricotti, “Sockets for limb prostheses: A review of existing technologies and open challenges,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 65, n.º 9, págs. 1996-2010, sep. de 2018.
- [29] C. Lecomte, F. Starker, E. Þ. Guðnadóttir, S. Rafnsdóttir, K. Guðmundsson, K. Briem y S. Brynjólfsson, ““Functional joint center of prosthetic feet during level ground and incline walking,” *Medical Engineering & Physics*, vol. 81, págs. 13–21,” jul. de 2020.
- [30] Össur, “Vari-Flex,” [Online]. Available: <https://www.ossur.com/en-us/prosthetics/feet/vari-flex>. [Último acceso: 12 junio 2020].
- [31] Y. K. Chakravarthy, P. Vigneshwar, P. V. Kedarath, Y. S. Harish y A. Srinath, “Optimum Material Selection to Prosthetic Leg through Intelligent Interface of RSM and FEA,” *Materials today: Proceedings*, vol. 4, n.º 2, págs. 1998-2007, 2017.