Lecturas Matemáticas
Volumen **42** (1) (2021), páginas 5-25
ISSN 0120-1980

El corazón de un espacio de Alexandroff

The core of an Alexandroff space

Juan Antonio Pérez y Marlem Solís Santana

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Resumen. Un espacio de Alexandroff es un espacio topológico cuya topología es cerrrada bajo intersecciones. El corazón de un espacio de Alexandroff es el modelo mínimo que conserva su homotopía. En el presente trabajo desarrollamos en functor corazón y demostramos su existencia para espacios finitos. Presentamos además un contraejemplo asociado con productos infinitos y su compacidad. En el ánimo de la autocontención se abordan las propiedades más elementales de los espacios de Alexandroff, y su relación con los conjuntos preordenados.

Palabras clave: Espacios topológicos de Alexandroff, Preorden, Modelos mínimos.

Abstract. An Alexandroff space is a topological space whose topology is closed under intersections. The core of an Alexandroff space is the minimal model keeping its homotopy. In this work the functor core is developed and also its existence is proved for finite spaces. A counterexample regarding infinite products and their compactness is also presented here. For the sake of self-containment, elementary properties of Alexandroff spaces and their connection with posets are exposed.

Key words: Alexandroff topological spaces, Preorder, Minimal models.

2010 AMS Mathematics Subject Classification: 54B15, 54F05, 54D10.

1. Introducción

Los espacios topológicos cuyas propiedades abordamos en el presente trabajo fueron descubiertos por el matemático soviético Pável Serguéyevich Alexandroff (1896-1982) y reportados por vez primera en [1]. Los espacios topológicos finitos son los espacios de Alexandroff que más atención han recibido, desde los trabajos clásicos de Michael McCord [15] y Richard Stong, [18] hasta los trabajos enciclopédicos de Jonathan Barmak [3] y Peter May [11, 12, 13, 14].

Los espacios de Alexandroff han recibido atención esporádica en contextos más generales, sobre todo en relación con aplicaciones como la segmentación de imágenes digitales, sin embargo, como pretendemos mostrar en el presente trabajo, estos espacios tienen interés matemático intrínseco.

2. Espacios de Alexandroff

Un espacio topológico cerrado bajo intersecciones es un *espacio de Alexandroff*. Espacios discretos y espacios finitos son ejemplos de espacios de Alexandroff, así como los conjuntos con topologías finitas. Dados un espacio topológico (X, τ) y un punto $x \in X$, el conjunto de todas las vecindades de x se denota por $\mathcal{N}(x)$ y se conoce como el *sistema de vecindades* de x, en tanto que $\mathcal{N}(x) \cap \tau$ es el *sistema de vecindades abiertas* de x.

Una consecuencia inmediata de la definición es que el sistema de cerrados $\mathcal{F} = \{F | F^c \in \tau\}$ de un espacio de Alexandroff (X, τ) es también una topología de Alexandroff sobre X. Ésta se conoce como la *topología opuesta* y se denota como $\tau^{op} = \mathcal{F}$. Al igual que X abrevia el espacio topológico (X, τ), el símbolo X^{op} abrevia el espacio topológico opuesto (X, τ^{op}).

Si (X, τ) es un espacio topológico de Alexandroff y $x \in X$, entonces

$$U_x = \bigcap \mathcal{N}(x)$$

es una vecindad de x, que está claramente contenida en cualquier otra vecindad de x y es en consecuencia la *vecindad mínima* de x. Recíprocamente, supóngase que (X, τ) es un espacio topológico en el que cada punto $x \in X$ admite una vecindad mínima U_x, y sea $\mathcal{V} \subseteq \tau$; si $x \in \bigcap \mathcal{V} = V$, entonces $U_x \subseteq V$, con lo que V es abierto.

Proposición 1. *Un espacio es de Alexandroff si, y solo si, cada uno de sus puntos admite una vecindad mínima.*

Nótese que una vecindad mínima es necesariamente abierta. Ahora bien, si

$$\mathcal{B}_m = \{U_x | x \in X\}$$

es la colección de vecindades mínimas de un espacio topológico (X, τ), es claro que $\mathcal{B}_m$ es base para una topología sobre X, y que τ es la topología generada por

$\mathcal{B}_m$, donde los conjuntos abiertos $U \in \tau$ tienen la forma

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x,$$

y claramente también, todo conjunto de esta forma es abierto.

Proposición 2. *Sea $\mathfrak{B}$ la colección de todas las bases para el espacio topológico de Alexandroff (X, τ), entonces $\mathcal{B}_m = \bigcap \mathfrak{B}$.*

Demostración. Claramente $\mathcal{B}_m \in \mathfrak{B}$. Ahora bien, si $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ y $x \in X$, elijamos $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_x$, entonces, por minimalidad $B = U_x$, de donde $U_x \in \mathcal{B}$, y se sigue que $\mathcal{B}_m \subseteq \bigcap \mathfrak{B}$. Dado que $\mathcal{B}_m \in \mathfrak{B}$, entonces también $\bigcap \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{B}_m$. $\square$

En este sentido, la base mínima $\mathcal{B}_m$ de un espacio de Alexandroff es única, y es un invariante del espacio. Si F_x es el mínimo cerrado que contiene a x, entonces $F_x = \overline{\{x\}}$ y además $F_x = U_x^{op}$. en el espacio opuesto X^{op}.

El espacio (X, τ) es T_0 ó *de Kolmogorov*[1] si, y solo si, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ siempre que $x \neq y$. Se sigue que X es T_0 si, y solo si, X^{op} es T_0, luego $U_x \neq U_y$ si, y solo si, $x = y$.

Proposición 3 (Alexandroff). *Sean $x, y \in X$, donde X es un espacio de Alexandroff T_0. Entonces $U_x = U_y$ si, y solo si, $x = y$.*

Corolario 4. *Un espacio de Alexandroff finito es T_0 si, y solo si, $\#(\mathcal{B}_m) = \#(X)$.*

Un espacio es T_1 o *de Fréchet*[2] si se satisface que $\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y) \neq \varnothing \neq \mathcal{N}(y) - \mathcal{N}(x)$ si, y solo si, $x \neq y$.

Ahora bien, si (X, τ) es de Alexandroff y T_1 y $x \in X$, entonces $\bigcap \mathcal{N}(x)$ es una vecindad de x y además

$$\{x\} = \bigcap \mathcal{N}(x),$$

puesto que si $y \neq x$ existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $y \notin V$.

Proposición 5. *Un espacio de Alexandroff es T_1 si, y solo si, es discreto.*

En función de la proposición anterior, los espacios de Alexandroff que son interesantes satisfacen a lo sumo el axioma T_0. Sobre un espacio topológico de Alexandroff X, definamos $x \sim y$ si y solo si, $U_x = U_y$; claramente esta es una relación de equivalencia y el espacio cociente $X/\sim$ es un espacio T_0.

[1] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), matemático soviético condiscípulo de Alexandroff, y de acuerdo con algunas versiones como J-M Kantor y L. Graham (2009, p. 185), al igual que G. Szpiro (2011, p. 152), su pareja sentimental.

[2] Maurice René Fréchet (1878-1973), matemático francés.

El espacio cociente $X_0 = X/\sim$ identifica los puntos de X que no son topológicamente distinguibles, por lo que conserva lo más esencial de la topología de X. A este espacio T_0 le llamaremos el *pericardio*[3] de X.

En lo sucesivo, denotamos por I el intervalo euclidiano $[0,1]$.

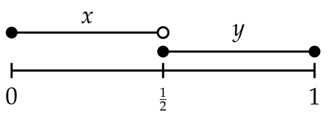
Lema 6. *El espacio de Sierpiński es trayectoconexo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de su conexidad. □

Aunque la demostración es rigurosa e incontrovertible, es ilustrativo exhibir una trayectoria entre sus dos puntos. Consideremos $X = \{x, y\}$ con la topología de Sierpiński en la cual $\{x\}$ es abierto, entonces la aplicación $\alpha : I \to X$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ y, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una trayectoria desde x hasta y, como se ilustra en la figura siguiente.



Proposición 7 (Alexandroff)**.** *Todo espacio topológico de Alexandroff es localmente trayectoconexo.*

Demostración. Sea X un espacio de Alexandroff. Basta demostrar que U_x es trayectoconexo para todo $x \in X$. Tómese $x \in X$. Si $U_x = \{x\}$ no hay nada que demostrar. Dado $y \in U_x - \{x\}$, tenemos que $U_y \subseteq U_x$. Si $U_y = U_x$, entonces $\{x, y\}$ es un subespacio indiscreto de X, por lo que toda aplicación $\alpha : I \to \{x, y\}$ es continua. Ahora, si $U_y \neq U_x$, entonces $\{x, y\}$ es un subespacio de Sierpiński de X en el que $\{y\}$ es abierto; basta entonces definir $\alpha : I \to \{x, y\}$ de forma tal que $\alpha^{-1}(x) = [0, \frac{1}{2}]$ y $\alpha^{-1}(y) = (\frac{1}{2}, 1]$ para obtener una trayectoria de x a y. □

Corolario 8. *Un espacio de Alexandroff es conexo si, y solo si, es trayectoconexo.*

3. Orden

Sobre un espacio topológico de Alexandroff (X, τ) definimos $x \preceq y$ si $x \in \mathcal{U}_y$, o equivalentemente, si $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$. La relación $x \preceq y$ si, y solo si, $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$ es claramente reflexiva y transitiva, por lo que $(X, \preceq)$ es un *conjunto preordenado*. Recordemos que un *preorden* sobre un conjunto X es una relación binaria '$\preceq$' que es reflexiva y transitiva.

[3]Como veremos, X_0 "envuelve" el corazón de X.

Proposición 9. *En un espacio topológico de Alexandroff* (X, τ)*, la topología* τ *induce un preorden* $\preceq$ *sobre* X*.*

En contraparte, consideremos un conjunto preordenado $(X, \preceq)$ y definamos $U_x = \{y \in X | y \preceq x\}$ para cada $x \in X$. Si notamos que para $z \in U_x \cap U_y$ se satisface que $U_z \subseteq U_x \cap U_y$, queda claro que $\{U_x | x \in X\}$ es base para una topología τ sobre X y que ésta es una topología de Alexandroff.

Proposición 10. *En un conjunto preordenado* $(X, \preceq)$*, el preorden '*$\preceq$*' induce una topología de Alexandroff* τ *sobre* X*.*

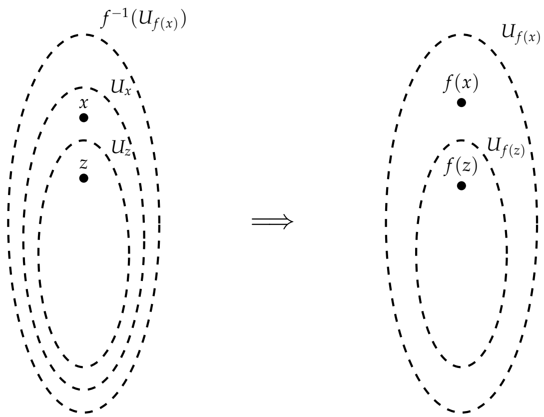
Existe entonces una suerte de equivalencia entre los preórdenes y las topología de Alexandroff, que además se extiende a los morfismos en sus respectivas categorías.

Un morfismo en la categoría **Top** es una *aplicación continua*, mientras que un morfismo en la categoría **Preord** es una *aplicación creciente*, es decir, una aplicación que preserva el preorden.

En lo sucesivo, un espacio de Alexandroff será considerado tanto un espacio topológico, como un conjunto preordenado, donde el preorden es el inducido por la topología y viceversa.

Teorema 11. *Sean* X*,* Y *espacios de Alexandroff, entonces* $f : X \to Y$ *es continua si, y solo si, es creciente.*

Demostración. Supongamos primero que f es continua, y sea $x \in X$ un punto arbitrario. Entonces $f^{-1}(U_{f(x)})$ es abierto y $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$, de manera que $U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$. Si $z \preceq x$, entonces $z \in U_x$, de donde $f(z) \in U_{f(x)}$, es decir $U_{f(z)} \subseteq U_{f(x)}$, que es equivalente con $f(z) \preceq f(x)$.



Recíprocamente, supongamos ahora que f es creciente, luego, de $z \preceq x$ se sigue $f(z) \preceq f(x)$. Por transitividad $U_{f(z)} \subseteq U_{f(x)}$, en consecuencia $U_z \subseteq U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$, y así

$$f^{-1}(U_{f(x)}) = \bigcup_{f(z) \preceq f(x)} U_z.$$

Luego $f^{-1}(U_{f(x)})$ es abierto. $\square$

Los espacios topológicos de Alexandroff constituyen una subcategoría **Alex** de **Top** con características bastante peculiares, entre otras que es una alegoría [8] no conexa, cuyas componentes son monoides, y cuya reciprocación está dada mediante $\tau^{\diamond} = \tau^{op}$. Esta alegoría resulta ser isomorfa, tanto con la categoría de los conjuntos preordenados de altura finita, así como las de las multidigráficas[4], también de altura finita. La formalización de estas afirmaciones requieren espacio del que no se dispone en este documento, por lo que seán publicadas por separado.

Un preorden es un *orden parcial*, si además de ser reflexivo y transitivo es también antisimétrico, es decir, si $x \preceq y$ junto con $y \preceq x$ implican $x = y$. Un *conjunto parcialmente ordenado* o de forma abreviada *Poset*[5] es un par $(X, \leq)$, donde '$\leq$' es un orden parcial sobre X.

Proposición 12. *El conjunto preordenado $(X, \preceq)$ es un poset si, y solo si, (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0.*

La categoría $\mathbf{Alex}_0$, de los espacios de Alexandroff T_0, es una subalegoría de **Alex**, isomorfa como alegoría con la categoría de los posets de altura finita, y con las digráficas de altura finita. No formalizaremos estas afirmaciones aquí, pero resultaba difícil vencer la tentación de mencionarlas.

4. Digráficas y diagramas

Una *multidigráfica* es un par (V, A) donde $V \neq \varnothing$ es un conjunto, cuyos elementos se llaman *vértices* y

$$A \subseteq V \times V$$

es un conjunto de pares ordenados de vértices, a los que llamaremos *aristas*, de manera que

$$\Delta = \{(v, v) | v \in V\} \subseteq A.$$

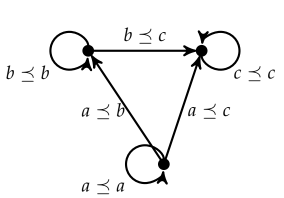
El par (V, A) es una *digráfica transitiva* si de $(a, b), (b, c) \in A$ se sigue que $(a, c) \in A$. Se dice que (a, c) es la *composición* de (a, b) con (b, c), lo que denotamos mediante

$$(a, c) = (b, c) \circ (a, b).$$

[4] Precategorías.
[5] Partially ordered set.

Si denotamos por $a \preceq b$ el par (a, b), entonces en una multidigráfica (V, A), A es un preorden sobre V, con lo que la conexión entre multidigráficas, espacios de Alexandroff y conjuntos preordenados se hace evidente.

Un *diagrama orientado* es una representación visual de una digráfica, en el que se omite alguna información, ya sea por redundante, o porque especificarla no agrega claridad sino posiblemente, lo contrario.



Los tres diagramas anteriores son equivalentes, el central es un diagrama orientado, mientras que el de la derecha es un *diagrama de Hasse*[6]. En este último, la orientación de la multidigráfica es ascendente. Si (a, b) y (b, a) son aristas en la misma multidigráfica, la situación se representa en los diagramas siguiente, el orientado a la izquierda, y el de Hasse a la derecha.

Una *digráfica* es una multidigráfica que no admite más de una arista entre dos vértices distintos dados, de forma que su diagrama de Hasse no tiene aristas horizontales. Una digráfica se corresponde con un Poset y éste con un espacio de Alexandroff T_0. Usaremos de forma intercambiable un diagrama orientado y un diagrama de Hasse pues cada uno revela información que queda oculta en el otro.

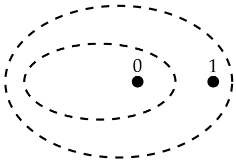
5. Ejemplos

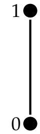
Hemos pospuesto los ejemplos con el fin de contar con elementos teóricos mínimos para que el encuentro con ellos resulte provechoso, así como con diagramas eficientes que contribuyan a su comprensión.

El ejemplo más sencillo que ya es significativo es el que corresponde al *espacio topológico de Sierpiński*[7]. Un conjunto de dos elementos, digamos $X = \{0, 1\}$, admite dos topologías de Sierpiński, que son, por supuesto, homeomorfas y de Alexandroff T_0. Una de ellas es $\tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, en la que $U_0 = \{0\}$ y $U_1 = X$.

[6] Helmut Hasse (1898-1979), matemático alemán de origen judío, razón por la cual fue rechazada su solicitud de ingreso al partido Nazi.

[7] Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969), matemático y astrónomo polaco. Un cráter de impacto en la cara oculta de la Luna ha sido nombrado en su honor: el *cráter de Sierpiński*.





En la propuesta de von Neumann[8] para la definición inductiva de los *números ordinales*, $\varnothing = 0$ y $\sigma(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, donde σ es la función sucesor de Peano[9], $1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}$ y $3 = \{0, 1, 2\}$. Entonces 3 es una topología de Sierpiński sobre 2, donde 1 es abierto. En general, si α es un ordinal, entonces $\sigma(\alpha)$ es una topología sobre α, en la que un conjunto β es abierto si, y solo si, es un ordinal $\beta \leq \alpha$. Los puntos de α son los ordinales $\beta < \alpha$.

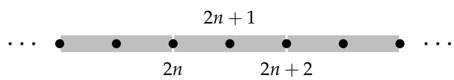
Este es un ejemplo de *topología de cadena*, en la que dos puntos distintos cualesquiera determinan un subespacio de Sierpiński. El espacio de Sierpiński es entonces paradigmático en el estudio de los espacios topológicos de Alexandroff T_0.

Las piezas con las que se ensambla un espacio de Alexandroff son cadenas, y éstas se construyen con espacios de Sierpiński. Por ello, Sierpiński se erige como un arquetipo de Alexandroff. La topología asociada con un orden parcial bien podría, dadas las analogías, ser llamada *topología ordinal*, distinguiéndola así de la más popular *topología del orden*.

La *topología de los discos concéntricos* sobre $\mathbb{R}^n$ es un buen ejemplo de topología de Alexandroff que no es numerable ni T_0. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, definamos $U_x = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq |x|\}$, en donde claramente $U_x = U_y$ si, y solo si, $|x| = |y|$. El pericardio de este espacio es la semirecta $[0, \infty)$ con la topología de Alexandroff T_0, en la que $U_a = [0, a]$.

La *topología digital* es otro ejemplo de topología de Alexandroff, de especial interés, gracias a sus usos en ingeniería, particularmente en la segmentación de imágenes para diagnóstico médico y la eliminación de "ruido" en las imágenes fotográficas. Es el caso del plano digital, que se obtiene como producto de dos copias de la *recta digital*, ejemplo que examinaremos en primer lugar.

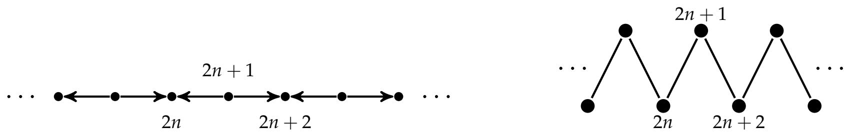
Consideremos el conjunto X de los números enteros con la topología de Alexandroff generada por las vecindades mínimas $U_{2n+1} = \{2n + 1\}$ y $U_{2n} = \{2n - 1, 2n, 2n + 1\}$. Este es un ejemplo de espacio infinito numerable y T_0 de altura 1.



[8]John von Neumann (1903-1957), matemático húngaro, conocido fundamentalmente como pionero de la Teoría de Juegos.

[9]Giuseppe Peano (1858-1932), matemático y filósofo italiano.

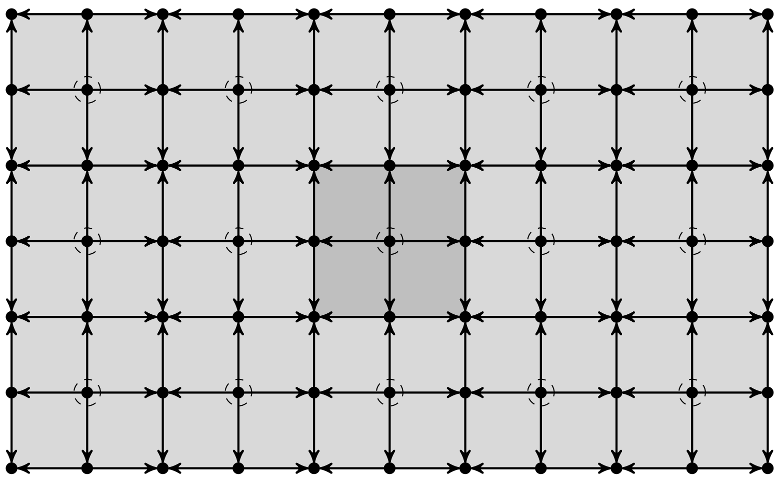
Cada punto impar tiene un vecindad únicamente para sí, dado que representa un "píxel monodimensional", mismo que contiene información relevante. Cada punto par es "inseparable" de los impares inmediatos, pues representa la transición entre píxeles; en este sentido, la información que aportan depende de los impares vecinos.



En la figura anterior se muestran el diagrama orientado y el diagrama de Hasse de la *recta digital*. El cálculo de la cerradura de un conjunto en un espacio digital nos informa claramente sobre la forma en la que la información gráfica se "organiza". En la recta digital, por ejemplo, la cerradura de un píxel es el píxel mismo junto con su entorno inmediato: $\overline{U_{2n+1}} = \{2n, 2n+1, 2n+2\}$. La cerradura de un punto en la transición entre dos píxeles los contiene a ellos y a sus alrededores: $\overline{U_{2n}} = \{2n-2, 2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2\}$.

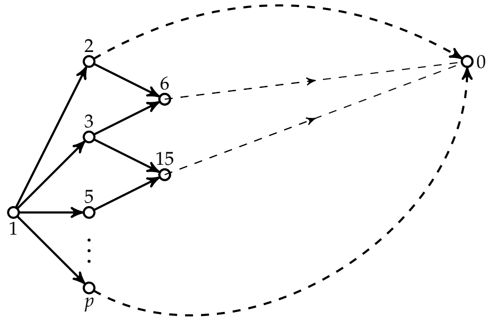
En la ilustración que sigue puede verse el diagrama orientado de un fragmento del *plano digital*. Los puntos señalados se encuentran el en centro de un píxel. La versión tridimensional, de uso en diagnóstico por resonancia magnética es el producto de tres copias de la recta digital; en ese caso el volumen que contiene información significativa se llama *voxel*.

Los espacios digitales son claramente conexos, y también claramente no son compactos.



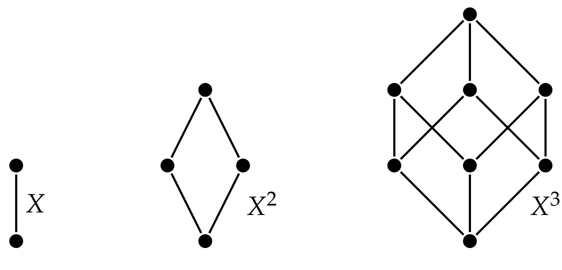
El último ejemplo en esta sección es la llamada *topología de la divisibilidad* sobre el semigrupo $\mathbb{N}$ de los números naturales. La vecindad mínima de n es el conjunto

U_n cuyos elementos son los divisores de n. Claramente $U_1 = \{1\}$, si p es primo, entonces $U_p = \{1, p\}$ y además $U_0 = \mathbb{N}$. El espacio de divisibilidad es claramente conexo y compacto.



6. Productos

No profundizaremos en las propiedades de los productos de espacios de Alexandroff, sino que haremos énfasis en algunas propiedades que los hacen particularmente interesantes. El cimiento de estos espacios es el espacio de Serpinski. En la siguiente figura se muestran las segunda y tercera potencia de un espacio tal, además del espacio mismo.



No resulta complicado deducir que el producto X^n es un espacio de Alexandroff T_0 y que tiene $\binom{n}{k}$ puntos de altura k, además de que cada producto tiene máximo y mínimo. Cada uno de estos espacios es *simétrico*, en el sentido de que es homemorfo con su espacio opuesto.

Claramente, el producto de espacios T_0 es también T_0, sin embargo, eso no pasa necesariamente con los espacios de Alexandroff, es decir, la categoría de los espacios de Alexandroff no es cerrada bajo productos arbitrarios.

Proposición 13. *El producto finito de espacios de Alexandroff es un espacio de Alexandroff.*

Demostración. Basta observar que el producto finito de vecindades mínimas es una vecindad mínima, y es muy sencillo verificar que la topología ordinal coincide con la topología producto, en donde el preorden está dado por $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$ si, y solo si, $x_k \preceq y_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

Puede verificarse con facilidad que el producto arbitrario de conjuntos preordenados es, a su vez, un conjunto preordenado, y que el producto de posets es también un poset. No obstante, el *poset producto* no coincide necesariamente con el *espacio producto*, en particular, un producto de espacios de Alexandroff no es necesariamente un espacio de Alexandroff. Consideremos por ejemplo el ordinal $X_n = n + 1$ con la topología ordinal, con la que es un espacio de cadena.

$$\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \overset{n}{\bullet}$$

Claramente X_n es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, dado que es finito, por lo que el espacio producto

$$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

es compacto, y de hecho, la sucesión $(n | n \in \mathbb{N})$ es un elmento maximal para X.

Sin embargo, X no es un espacio de Alexandroff, puesto que la sucesión constante (0) no admite una vecindad mínima, ya que el conjunto $\{(0)\}$ no es abierto en la topología producto, aunque ciertamente lo es en la topología del preorden. Un producto de espacios de Alexandroff, con la topología producto, no es necesariamente de Alexandroff.

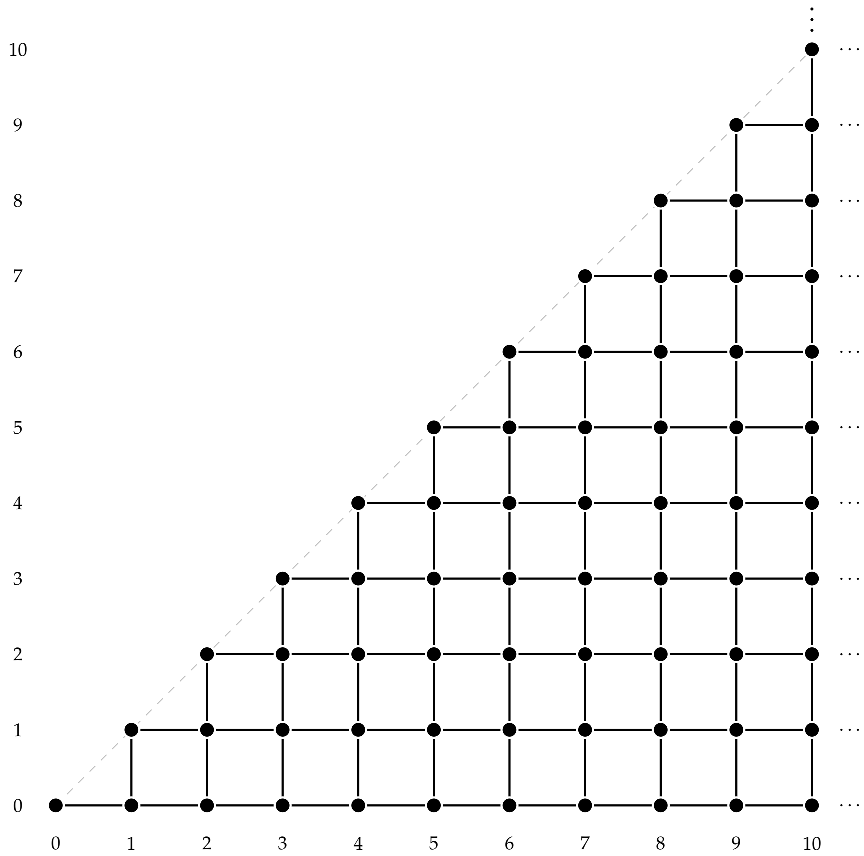
Teorema 14. *Todo producto de espacios de Alexandroff es un espacio de Alexandroff, con la topología ordinal.*

Demostración. Dada una colección $\mathcal{X} = \{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios de Alexandroff y

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha,$$

basta definir, para $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha) \in X$ la relación $x \leq y$ si, y solo si, $x_\alpha \leq y_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. $\square$

En el caso de un producto, debe entonces tenerse cuidado, acerca de si se trata de un producto de espacios topológicos, o un producto de posets.



7. Conexidad

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto preordenado. Se dice que los puntos $x, y \in X$ son *comparables* si se satisfacen al menos una de las condiciones $x \preceq y$ o $y \preceq x$. Una *cadena* es un conjunto totalmente ordenado; una cadena $K \subseteq X$ en $(X, \preceq)$ es tal que la resctricción $(K, \preceq)$ es una cadena. Si $a \preceq b$, una *cadena* con extremos a y b se denota por $K(a, b)$, y en caso contrario $K^{op}(a, b)$, y decimos que esta última es una *contracadena*.

Dados dos puntos $x_0, x_n \in X$ en un conjunto preordenado $(X, \preceq)$, una *corona* entre x_0 y x_n es una $(n+1)$-ada $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$ tal que x_{i-1} y x_i son extremos de una *cadena*, es decir, un subconjunto de X totalmente ordenado.

Una *corona* $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$, para n impar satisface:

1. $x_0 \leq x_1$, $x_1 \geq x_2$, ..., $x_{n-1} \leq x_n$, o bien

2. $x_0 \geq x_1$, $x_1 \leq x_2$, ..., $x_{n-1} \geq x_n$;

En tanto, si n es par se cumple:

1. $x_0 \leq x_1, x_1 \geq x_2, \ldots, x_{n-1} \geq x_n$, o bien
2. $x_0 \geq x_1, x_1 \leq x_2, \ldots, x_{n-1} \leq x_n$.

Dada una corona $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, elijamos una cadena entre cada dos puntos sucesivos, la unión de tales cadenas es una *valla* entre x_0 y x_n, que se denota por $F(x_0, x_n)$. Un conjunto preordenado $(X, \preceq)$ es *conexo* si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ existe una valla $F(x, y)$ en X, en cuyo caso se dice que x, y son *conectables*.

El *pericardio* de un conjunto preordenado $(X, \preceq)$ es el Poset $(X_0, \leq)$ para $X_0 = X/\sim$ donde $x \sim y$ si, y solo si, $x \preceq y$ se satisface simultáneamente con $y \preceq x$. Si definimos $[x] \leq [y]$ si, y solo si, $x \preceq y$, la *proyección* $q : X \to X_0$ dada por $q(x) = [x]$ es claramente creciente, al igual que lo es cualquier *sección* $s : X_0 \to X$. Recordemos que s es una sección de q si, y solo si, $q \circ s$ es la identidad en X_0.

Proposición 15. *Un conjunto preordenado $(X, \preceq)$ es conexo si, y solo si, su pericardio $(X_0, \leq_0)$ es conexo.*

Demostración. Basta notar que tanto s como q son crecientes. □

Corolario 16. *Un espacios de Alexandroff (X, τ) es conexo si, y solo si, su pericardio (X_0, τ_0) es conexo.*

Demostración. Basta notar que tanto s como q son continuas. □

Un espacio de Alexandroff (X, τ) puede entonces considerarse como un conjunto preordenado $(X, \preceq)$ y viceversa. En lo sucesivo, bastará referirse al espacio X con ambas estructuras disponibles. Cadena y espacio cadena son, en lo sucesivo, sinónimos.

El lector no tendrá dificultad en exhibir una trayectoria desde y hasta x. Un espacio de Sierpiński es una cadena de *longitud* 1. Recordemos que la longitud de una cadena finita es la cardinalidad del conjunto de sus aristas: una $(n+1)$-cadena tiene longitud n. Una cadena de longitud n se evidencia como trayectoconexo concatenando n trayectorias como la anterior. Una cadena numerable es trayectoconexa, lo que se demuestra mediante paso al límite. Finalmente, una cadena no numerable es trayectoconexa, dado que es homeomorfa con un intervalo.

Lema 17. *Toda cadena es trayectoconexa.*

Corolario 18. *Toda valla es trayectoconexa.*

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de los previos.

Teorema 19. *En un espacio de Alexandroff, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) *X es conexo como conjunto preordenado;*

ii) *X es conexo como espacio topológico;*

iii) *X es trayectoconexo.*

Demostración. Basta demostrar la equivalencia entre **i)** y **iii)**, lo que resulta de aplicar los resultados recientes. $\square$

8. Homotopía

La homotopía no es sino el estudio de formas superiores de conexidad, y esto resulta particularmente evidente en los espacios de Alexandroff. Dado un espacio topológico X, dos puntos $x, y \in X$ se dicen *homótopos* si X admite una trayectoria entre ellos, en cuyo caso denotamos $x \simeq y$. Si X es de Alexandroff, dos puntos son homótopos si, y solo si, son conectables en su preorden.

Lema 20. *Sean $x, y \in X$ y X de Alexandorff. Si $x \preceq y$, entonces $x \simeq y$.*

Dados un conjunto $A \neq \varnothing$ y un espacio de Alexandroff X, el conjunto de aplicaciones X^A adquiere un preorden natural mediante $f \preceq g$ si, y solo si, $f(a) \preceq g(a)$ para todo $a \in A$. Entonces X^A es un espacio de Alexandroff si, y solo si, X lo es, y además, X^A es T_0 si, y solo si, X es también T_0.

Una trayectoria $h : I \to X^A$ tal que $h(0) = f$ y $h(1) = g$ es una homotopía $f \simeq g$, en la que, como veremos, está implícita la continuidad de f y g.

Proposición 21. *Sean $f, g \in X^A$ con X de Alexandorff y $A \neq \varnothing$. Si $f \preceq g$, entonces $f \simeq g$.*

La construcción misma provee al conjunto A una topología, la *topología inicial* inducida por la colección $\{h(t) | t \in I\}$, con lo que se garantiza la continuidad de cada $h(t)$.

Proposición 22. *La topología inicial inducida por un espacio de Alexandroff es de Alexandroff.*

Demostración. Sean $A \neq \varnothing$ un conjunto, (X, τ) un espacio de Alexandroff y una colección de aplicaciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha \in X^A | \alpha \in \mathcal{A}\}$. Para cada $a \in A$, definimos $\mathcal{V}_\alpha = \{U \in \tau | f_\alpha(a) \in U\}$ y

$$U_a = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\bigcap_{U \in \mathcal{V}_\alpha} f_\alpha^{-1}(U) \right) = f^{-1} \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\bigcap \mathcal{V}_\alpha \right) \right),$$

con lo que obtenemos una base mínima para A inducida por $\mathcal{F}$. $\square$

Estamos listos para explorar las propiedades homotópicas de los espacios de Alexandroff.

Lema 23. *El espacio de Sierpiński es contráctil.*

Demostración. Sean $X = \{x, y\}$ con la topología de Sierpiński en la que $\{x\}$ es abierto. Sean $c_x, 1_X \in X^X$ la constante en x y la identidad respectivamente. Dado que $x \leq y$, es claro que $c_x \leq 1_X$, de manera que $c_x \simeq 1_X$. $\square$

Corolario 24. *Todo espacio de cadena es contráctil.*

De lo anterior se sigue que los grupos de homotopía del espacio de Sierpiński son triviales.

Corolario 25. *Sea X un espacio de Sierpiński, entonces*

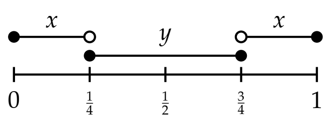
$$\pi_n(X) = 0$$

para todo $n \geq 1$.

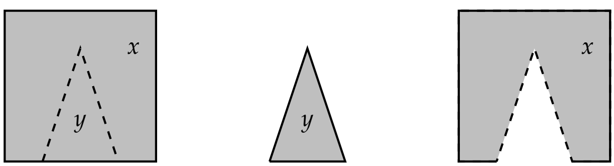
Las proposiciones enunciadas han sido demostradas plenamente. Exhibiremos, no obstante, aplicaciones y homotopías explícitas para ilustrarlas. Un *lazo* en el espacio de Sierpiński $X = \{x.y\}$ en el que $\{x\}$ es abierto, con punto base en x es, por ejemplo $\alpha : I \to X$, donde

$$\alpha(t) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{1}{4}; \\ y, & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ x, & \text{si} \quad \frac{3}{4} < t \leq 1, \end{cases}$$

como se ilustra en la figura siguiente.

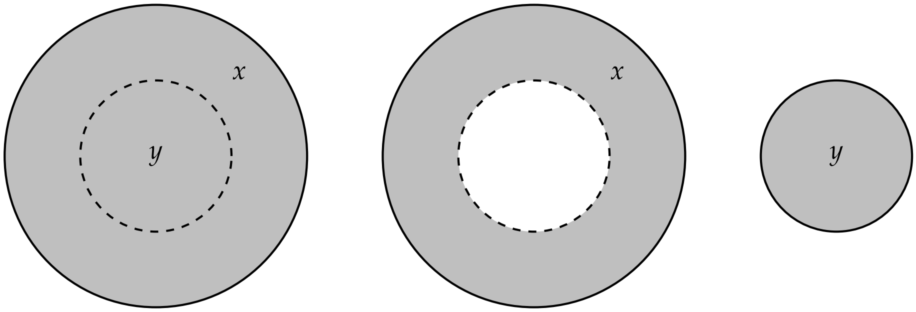


De igual manera, una homotopía $H : I \times I \to X$ entre este lazo α y el lazo constante en x se esquematiza en siguiente dibujo.



La figura siguiente ilustra la aplicación continua $\alpha : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x)$, definida como sigue.

$$\alpha(t) = \begin{cases} y, & \text{si} \quad 0 \leq |t| \leq \frac{1}{2}; \\ x, & \text{si} \quad \frac{1}{2} < |t| \leq 1. \end{cases}$$



De forma análoga, se demuestra que α es homotópicamente trivial, al igual que cualquier otra aplicación continua $\alpha : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x)$, por lo que es claro que $\pi_n(X) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_+$.

Corolario 26. *Todo espacio de cadena finito es homotópicamente trivial.*

Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Una *retracción* es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r \circ j = 1_A$ donde $j : A \to X$ es la inclusión y 1_A es la identidad en A. Se dice que A es un *retracto* de X si existe tal retracción.

El subespacio A es un *retracto por deformación* de X, si es un retracto y además $r \circ j \simeq 1_X$. La conmutatividad del siguiente diagrama de la izquierda resume la definición anterior. Si además existe una homotopía $H : r \circ j \simeq 1_X$ que hace conmutar el diagrama de la derecha, se dice que A es un *retracto fuerte por deformación* de X.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "1_X", "\simeq"'] & \\ & A \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times I \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "j \times 1_I"'] & A \arrow[d, "j"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

Proposición 27. *El pericardio de X es un retracto por deformación de X.*

Demostración. Sea $q : X \to X_0$ la proyección obvia de X sobre su pericardio y $s : X_0 \to X$ una sección de q. La proposición afirma que $Y = s(X_0) \subseteq X$ es un retracto fuerte por deformación de X. Esta será una convención que seguiremos usando. Tanto q como s son crecientes, por lo que son continuas; además $s \circ q = 1_Y$ y $q \circ s \preceq 1_X$, por lo que, claramente $q \circ s \simeq 1_X$. $\square$

En realidad, X_0 es un retracto fuerte por deformación de X, sin embargo, la demostración requiere de caracterizar la compacidad en espacios de Alexandroff, lo que cae fuera del propósito del presente trabajo.

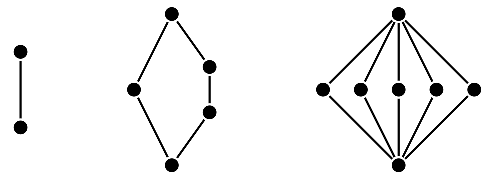
Proposición 28. *Todo espacio de cadena X, es homotópicamente trivial.*

Demostración. Si X es no numerable, no hay nada que demostrar. Si X es finito y $x \in X$ es su mínimo, la constante $c_x : X \to X$ en x satisface c_x. Si X es numerable y tiene mínimo o máximo, la demostración es análoga al caso finito. De no tener extremos, sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario, que es claramente libre, x_0 cubre un único punto x_{-1} y es cubierto por un único punto x_1, tenemos así que $K(x_{-1}, x_1)$ es una cadena finita de longitud 2, que es por consecuencia homotópicamente trivial. Obtenemos así una sucesión de cadenas $K(x_{-n}, x_n)$ de longittud $2n$ que es homotópicamente trivial. El espacio X es el límite directo de los subespacios $K(x_{-n}, x_n)$, y es por tanto homotópicamente trivial. $\square$

Sea $(X, \leq)$ un poset con $x, y \in X$. Decimos que x *cubre* a y si $y \leq x$ si (x, y) es una arista en el diagrama de Hasse de X, equivalentemente, se dice que *y es cubierto* por x. Si x cubre exactamente n elementos se dice que su *grado de ingreso*[10] es m, y si es cubierto por exactamente n elementos se dice que su *grado de egreso*[11] es m. , Esta información se concentra en el *bigrado* de x como el par (m, n). Escribimos respectivamente $in(x) = m$, $out(x) = n$ y $big(x) = (m, n)$, en donde ni m ni n son necesariamente finitos.

Siguiendo la nomenclatura introducidad por May en [11], un *punto descendente*[12] es un punto con bigrado de la forma $(1, n)$, y dualmente un un *punto ascendente*[13] es un punto con bigrado de la forma $(m, 1)$.

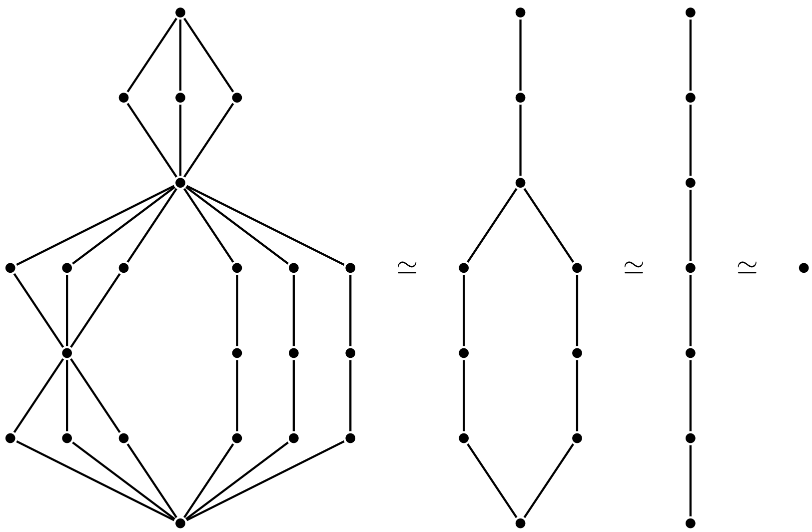
Un espacio farol es una unión de cadenas libres con extremos comunes. Entonces, un espacio farol X tiene un punto x_0 tal que $big(x_0) = (0, 1)$ un punto x_1 tal que $big(x_1) = (1, 0)$ y de manera que si $x \in X - \{x_0, x_1\}$, entonces $big(x) = (1, 1)$. Los siguientes son ejemplos de espacio farol.



Proposición 29. *Todo espacio farol es homotópicamente trivial.*

[10]In degree.
[11]Out degree.
[12]Down beat point.
[13]Up beat point.

Demostración. Basta demostrar que un espacio farol X es homotópicamente equivalente con un espacio cadena. Sean X es espacio farol con mínimo x_0 y máximo x_1. Si X no tiene puntos libres no hay nada que demostrar. En caso contrario, sea A el subespacio de X cuyos puntos son los puntos libres de X. La proyeccón $q : X \to X/A$ es creciente, al igual que cualquier sección $s : X/A \to X$ y además $s \circ q \leq 1_X$. Si $x = s \circ q(a)$ para todo $a \in A$, el subespacio $K = \{x_0, x, x_1\}$ es una cadena de longitud 2, que es un retracto por deformación de X. □



9. El functor corazón

El corazón[14] de un espacio de Alexandroff X es un espacio topológico de cardinalidad mínima, y que es homotópicamente equivalente con X. Es entonces único salvo homotopía. Antes de definirlo formalmente necesitaremos algunos tecnicismos.

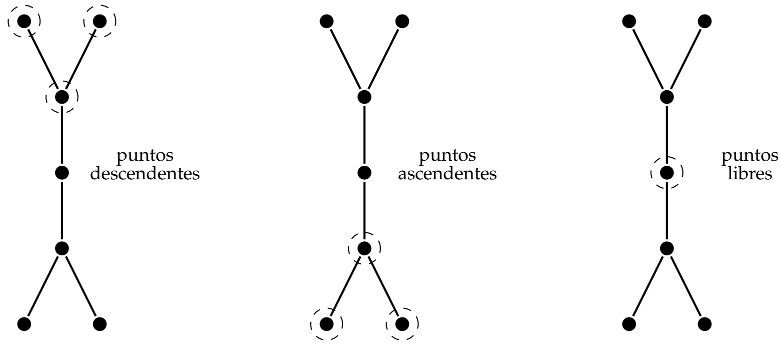
Lema 30. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *x es un punto descendente (resp. ascendente)*
2. *x cubre a un único punto (resp. es cubierto por un único punto)*
3. *$U_x - \{x\}$ tiene un máximo (resp. $F_x - \{x\}$ tiene un mínimo).*

Se dice que x es un *punto abatible*[15] [11] si es ascendente o descendente, y de dice que es un *punto libre* si es tanto descendente como ascendente; es decir, x es libre si, y solo si, $big(x) = (1, 1)$. Una *cadena libre* es una cadena en la que todos los puntos son libres, excepto los extremos, si es que los hay.

[14]Core. Puede traducirse también como "núcleo" y algunos académicos sugieren usar en castellano "alma" o "ánima".

[15]Beat point.



Un *espacio mínimo* es un espacio T_0 que no tiene puntos abatibles. El *corazón* de un espacio de Alexandroff X es un espacio $\heartsuit(X)$ que es T_0, que no tiene puntos abatibles, y que tiene el mismo tipo de homotopía que el propio X.

Un modelo mínimo para un espacio topológico X es un espacio con el mismo tipo de homotopía de X y de cardinalidad mínima. No trataremos aquí acerca de modelos mínimos, pero consideramos pertinente establecer la diferencia entre modelos mínimos y espacios mínimos.

Todo espacio de Alexandroff admite un corazón, y la demostración en general pasa por un tratamiento adecuado de los espacios farol. En abono de espacio presentamos aquí de demostración de J. P. May [14] en el caso finito.

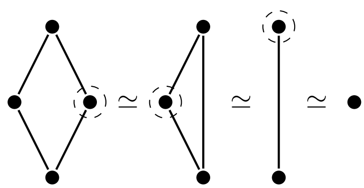
Teorema 31 (May, 2003)**.** *Todo espacio topológico finito admite un corazón.*

Demostración. Sean Y un espacio finito y $X = Y_0$ su pericardio, claramente $\heartsuit(X) = \heartsuit(Y_0)$. Basta demostrar que $X_1 = X - \{a\}$ es un retracto por deformación de X donde a es un punto abatible de X. Sean $j : X_1 \to X$ la inclusión y $q : X \to X_1$ definida mediante $q(x) = x$ si $x \neq a$ y

$$q(a) = \begin{cases} \text{máx}(U_a - \{a\}), & \text{si} \quad in(a) = 1; \\ \text{mín}(F_a - \{a\}), & \text{si} \quad in(a) \neq 1. \end{cases}$$

Claramente tanto q como j son continuas, $q \circ j = 1_{X_1}$ y $j \circ q \leq 1_X$. Eliminando puntos abatibles uno a la vez, concluimos con el proceso en una cantidad finita de pasos. $\square$

No basta eliminar todos los puntos abatibles en un único paso, puesto que puntos que inicialmente no eran abatibles en el espacio original, pueden eventualmente llegar a serlo, como se ilustra en la figura.



En el inicio, solo dos puntos son abatibles, y luego de eliminarlos, los dos restantes resultan abatibles también. Se marcan con círculos punteados los puntos abatibles que no aparecen en el paso siguiente.

En esta figura se ilustra, de paso y de forma directa, que X^2 es contráctil, donde X es el espacio de Sierpiński. Se invita al lector a ilustrar con diagramas de Hasse que X^3 es también contráctil.

10. Epílogo

Los espacios de Alexandroff son realmente fascinantes, y esperamos haber dado muestra patente de ello en el presente trabajo. Otros trabajos de exploración y divulgación serán publicados por separado.

Agradecimientos

Los autores deseamos agradecer muy cumplidamente la cuidadosa y exhaustiva revisión de los árbitros, así como sus valiosas sugerencias. Los errores que a pesar de ello hayan escapado a su escrutinio, son responsabilidad exclusivamente nuestra.

Referencias

[1] P. Alexandroff, "Diskrete Räume". *Mat. Sb.* **2** (1937) 501-518.

[2] J. Anusiak and K. P. Shum , "Remarks on finite topological spaces". *Colloquium Mathematicum* **23** (1971) 217-223.

[3] J. A. Barmak, *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Springer Verlag, New York, 2011.

[4] M. Benoumhani, "The number of topologies on a finite set". *Journal of Integer Sequences* **9** (2006).

[5] S. Givant and P. R. Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*. Springer UTM, New York 2009.

[6] Online Encyclopedia of Integer Sequences.

[7] P. Fletcher and W. F. Lindgren, *Quasi-uniformities*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematicas, vol 77. Marcel Dekker and New York (1982).

[8] P. J. Freyd and A. Scedrov, *Categories, Allegories*. North-Holland Mathematical Library and Amsterdam 1990.

[9] J. O. Gómez Rodríguez, *Sobre la clasificación de Espacios Topológicos Finitos*. Tesis de Mestría. Universidad Autónoma de Zacatecas and México 2019.

[10] P. T. Johnstone, *Stone Spaces* Cambridge Studies in Mathematichs **3** and Cambridge 1982.

[11] J. P. May, *Finite topological spaces*. Notes for REU (2003).

[12] J. P. May, *Finite spaces and simplicial complexes*. Notes for REU (2003).

[13] J. P. May, *Finite groups and finite spaces*. Notes for REU (2003).

[14] J. P. May, *Finite spaces and larger contexts*. (math.uchicago.edu/ may/)

[15] M. C. McCord, “Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces”. *Duke Mathematical Journal* **33**(1966).

[16] H. Sharp, “Cardinality of Finite Topologies”. *J. Combinatorial Theory* (1968) 82-85.

[17] D. Stephen, “Topology on Finite Sets”. *Amer. Math. Monthly* **75** (1968) 739-741.

[18] R. E. Stong, “Finite topological spaces”. *Trans. Amer. Math. Soc.* **123** (1966) 325-340.

Recibido en junio de 2020. Aceptado para publicación en abril de 2021.

Juan Antonio Pérez
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
Zacatecas, México
e-mail: japerez@uaz.edu.mx

Marlem Solís Santana
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
Zacatecas, México
e-mail: marlemsolis@hotmail.com