Investigación

El problema de Basilea: un paradigma para enseñar a través de la resolución de problemas

The Basel problem: a paradigm for teaching through problem-solving

Carlos M. Falcón-Rodríguez, Jarlyn J. Díaz Peralta, Ribelly Estrella Salazar y Marileidy Bonilla Núñez

Revista de Investigación

Volumen XI, Número 2, pp. 005–020, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 May'21; Aceptación: 9 Jun'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En el presente trabajo, además de recrear la historia y conexiones del problema de Basilea, esto es, del hallazgo de la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, se ofrece una visión diferente del problema, en su relación con la teoría de números y las probabilidades, que podría evitar frecuentes errores relacionados con la independencia en probabilidad. Además, damos una nueva demostración elemental de que la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales es $\pi^2/6$. Los resultados anteriores permiten un acercamiento a estudiantes, incluso, de nivel medio.

Palabras Clave: Basilea, Función Zeta, Probabilidad, Primos Relativos.

Abstract

In this work, we recreate the history and connections of the Basel problem, that is, the finding of the sum $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. In addition, we offer a different view of the problem and its relation to number theory and probability, which could avoid frequent mistakes related to independence in probability. Furthermore, we give a new elementary proof that the sum of the reciprocal of the squares of the natural numbers is $\pi^2/6$. This new approach to the problem paves the road for reaching more students, even at middle school level.

Keywords: Basel, Zeta Function, Probability, Relatively Prime Numbers.

1. Introducción

Cuando se aborda el simple problema de hallar la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots, \tag{1}$$

aparecen conexiones con diferentes partes de la matemática, algunas plasmadas por diferentes métodos de hallar dicha suma y otras por las aplicaciones que tiene el conocimiento de su valor. Los métodos de hallar la suma, si son aproximados, usan tecnicismos algebraicos y diferentes aspectos del análisis numérico. Si se trata de hallar el valor exacto de dicha suma, conocemos diferentes demostraciones que usan cálculo en una variable, análisis armónico, integración múltiple, teoría de las probabilidades [1, 5]. Incluso hay una demostración usando la fuerza de Coulomb en electrostática [8]. También existe una demostración elemental, que usa trigonometría y números complejos entre otros temas de matemática elemental. En la sección 3 damos una nueva demostración elemental, que usa la fórmula de la tangente del ángulo múltiplo. Las aplicaciones más comunes, que usan el valor de (1) aparecen en teoría de números, y aparecen vinculadas a la Función Zeta de Riemann,

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \tag{2}$$

conectando diferentes aspectos de divisibilidad y los números primos a la teoría de las probabilidades y el análisis complejo.

> *La aparición de la Función Zeta de Riemann significó una revolución en teoría de números, de hecho, es la clave fundamental de la denominada "hipótesis de Riemann", quizás uno de los problemas matemáticos abiertos más importantes de toda la historia de las matemáticas* [7].

Los trabajos de Euler descubren el origen de la relación de la función escrita en (2), con los números primos, a través de la llamada fórmula de Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\ primo}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}. \tag{3}$$

Además de lo anteriormente mencionado, el valor de la suma infinita, $\zeta(2)$, es $\pi^2/6$. Así, el número más afamado de nuestra cultura, queda ligado a la suma en cuestión y nuevas relaciones aparecen.

Fue el matemático italiano Pietro Mengoli, quien en 1644 plantea el problema de Basilea en la obra compuesta por tres libros "Novae Quadraturae Arithmeticae". En la misma, Mengoli demostró la convergencia y calculó la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{4}$$

Esta serie es conocida como la serie de Mengoli y es un ejemplo clásico de serie telescópica.

Tras haber sido planteado el problema de Basilea, fueron muchos los matemáticos que intentaron resolverlo. Entre ellos está el británico John Wallis (1616-1703), quien logró aproximar el valor de la serie a 1.645, cometiendo un error menor que una milésima, en su obra "Arithmetica Infinitorum".

Luego, Gottfried W. Leibniz (1646-1716), conoce este problema en 1673, no extrañando que por ser mentor de varios miembros de la familia Bernoulli, sea él mismo quien se los muestre. De modo que, en 1689, Jakob Bernoulli (1645-1705), obtuvo algunos resultados sobre dicha serie. Uno de ellos es que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \tag{5}$$

con $k \geq 2$ cumplen que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2. \tag{6}$$

De modo que, la serie (1) es convergente y su suma es menor o igual a 2.

Luego de varios intentos infructuosos de encontrar un valor exacto para la serie planteada, aparece en el contexto del problema Leonhard Euler (1707-1783) en 1731. De hecho, el nombre de este problema se debe a que tanto Euler como los Bernoulli vivían en la ciudad de Basilea. Pero no fue sino hasta 1734 cuando Euler anunciaba la demostración del resultado definitivo, presentándolo originariamente en la Academia de San Petersburgo y varios años después publicado. Euler demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{7}$$

El problema de Basilea se relaciona con otras áreas de la matemática, siendo un ejemplo la teoría de probabilidades, no solo porque se puede llegar al valor de la serie, $\pi^2/6$, usando una demostración que usa el cociente de variables aleatorias independientes con distribuciones semi-Cauchy, sino porque el número $1/\zeta(2)$ describe, de alguna forma, la probabilidad de que 2 números enteros positivos, elegidos al azar, sean primos relativos. En la próxima sección profundizamos en este punto.

2. Probabilidad de que dos enteros positivos aleatorios sean primos relativos

Trataremos de hallar "la probabilidad de que dos enteros positivos escogidos al azar sean primos relativos". Las comillas en la oración anterior quieren destacar que, aunque la expresión parece enmarcada dentro del sentido común, matemáticamente demanda la existencia de una probabilidad en los naturales, gozando de alguna de las siguientes propiedades: iguales oportunidades de ser seleccionados, homogeneidad y/o uniformidad en la distribución de los pesos de probabilidad. Una probabilidad P, definida en $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ no puede darles iguales oportunidades a los naturales. Lo anterior es una consecuencia inmediata de que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} P(i) = 1\right) \Rightarrow \left(\lim_{i \to \infty} P(i) = 0\right). \tag{8}$$

Si tratamos de definir la probabilidad P en alguna subfamilia $\mathcal{A}$, de subconjuntos de $\mathbb{N}$, con menos elementos que el conjunto potencia $2^{\mathbb{N}}$, esta debe ser una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Lo anterior significa que $\mathcal{A}$ contiene a Φ. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces el complemento de A también pertenece a $\mathcal{A}$. Por último, si los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, pertenecen a $\mathcal{A}$ entonces la unión numerable de ellos pertenece a $\mathcal{A}$. La estructura de σ-álgebra es la idónea para la definición de probabilidad, aunque a veces esta se define en un álgebra. La definición de un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$, es similar a la de la σ-álgebra, cambiando la unión numerable por unión finita.

Una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$, que contenga a los conjuntos $\{kn: k \in N\}$ con n natural, tendría que ser el conjunto potencia de $\mathbb{N}$. Como vimos anteriormente, esta σ-álgebra no admite una probabilidad en la que todos los naturales tengan igual peso de probabilidad, a causa de (8). Tampoco admite una probabilidad en la que la probabilidad de $\{kn: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/n$. Al final de este epígrafe demostraremos algo más general: No existe una probabilidad en la σ-álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la probabilidad de $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/p$, siendo ellos sucesos independientes. Lo anterior desacredita el uso formal de la palabra probabilidad en el epígrafe de esta sección, si no renunciamos al mínimo de homogeneidad de la misma.

Lo que se ha venido haciendo hasta el momento, para evitar las verdades enunciadas anteriormente, en esta sección, es usar la densidad uniforme con paso al límite. En $\{1,2,\ldots,n\}$ con la σ-álgebra de todos los subconjuntos, se define la probabilidad uniforme P_n:

$$\text{Para todo } x \in \{1,2,\ldots,n\}, P_n(\{x\}) = \frac{1}{n}. \tag{9}$$

En el producto cartesiano del espacio anterior por el mismo,

$$\left(\{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\}, 2^{\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}}, P_n \times P_n\right) \tag{10}$$

se halla la probabilidad del evento $\{(x, y): x\ es\ primo\ relativo\ a\ y\}$. El hecho de que x y y son seleccionados aleatoriamente (se supone que con reemplazo), habla de la independencia de esas variables y justifica el espacio producto anterior. Llamamos δ_n a la probabilidad del evento $\{(x, y): x\ es\ primo\ relativo\ a\ y\}$, y hallamos el límite de δ_n cuando n tiende a infinito. Si

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n \ , \tag{11}$$

entonces decimos que la probabilidad de que dos naturales, escogidos al azar, sean primos relativos es δ [9].

Otra forma de razonar es a través de las distribuciones de probabilidad,

$$p_s(n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} \ , \tag{12}$$

tomando límites cuando s tiende a 1 por la derecha [4] .

Las formas anteriores de hallar la probabilidad de un suceso, como un límite de probabilidades bien establecidas, necesita mostrar el espacio de probabilidad de referencia. Tanto por la vía de la igualdad (11), como la (12) se llega a un mismo resultado para el suceso descrito en el epígrafe de esta sección. Esto no certifica el uso de la palabra probabilidad.

Vayamos ahora por otra vía diferente. Construiremos una sucesión de espacios de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_n, P_n)$, con un número creciente de sucesos, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, de forma tal que la probabilidad de un suceso cualquiera A, sea la misma para cualquier n, siempre que $P_n(A)$ tenga sentido. En este caso, las σ-álgebras, $\mathcal{A}_n$, contendrán cada vez más sucesos, todos ellos "periódicos", para de esta forma tender a la "homogeneidad en la distribución de los pesos de probabilidad".

Decimos que un conjunto A, de enteros positivos, es periódico, si existe un entero positivo p, tal que para todo k en $\mathbb{N}$ se cumple

$$\big\{\{1,2, \dots, p\} \cap A\big\} + kp = \{kp + 1, kp + 2, \dots, (k + 1)p\} \cap A \tag{13}$$

Si los conjuntos A y B tienen periodos p y q respectivamente, el mínimo común múltiplo de p y q es un período de ambos conjuntos. Esto evidencia que la unión, intersección y diferencia de conjuntos periódicos son conjuntos periódicos. El complemento de un conjunto periódico A, es periódico, ya que es la diferencia $\mathbb{N} \setminus A$.

El número natural p, que es el menor de todos los períodos del conjunto periódico A, lo llamaremos periodo básico. Todos los múltiplos del período básico son períodos de A. En caso de que tengamos los conjuntos periódicos A y B con periodos básicos p y q respectivamente, el período básico del resultado de cualquiera de las operaciones arriba mencionadas, es menor o igual que el mínimo común múltiplo de p y q.

Consideremos una cantidad finita de conjuntos periódicos: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de conjuntos generada por ellos, es decir, la intersección de todas las familias de subconjuntos de $\mathbb{N}$, que contienen a Φ y todos los A_i, que además son cerradas para uniones finitas y complementos. Es fácil probar que, si $p_1, p_2, \dots, p_n$ son los períodos básicos de $A_1, A_2, \dots, A_n$ entonces $\mathcal{A}$ es un subconjunto del álgebra de los subconjuntos periódicos con período igual al mínimo común múltiplo de $p_1, p_2, \dots, p_n$. Como consecuencia de lo anterior tenemos que $\mathcal{A}$ es finita y las uniones numerables de elementos de $\mathcal{A}$, son uniones finitas. Concluimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Usando lo expuesto en el párrafo anterior, llamemos $\mathcal{A}_n$ la σ-álgebra generada por los conjuntos periódicos, con período básico menor o igual a n. Sabemos que ella es igual al álgebra de conjuntos generada por los conjuntos periódicos, con período básico menor o igual a n y que está incluida en el álgebra de los conjuntos periódicos con período básico igual al mínimo común múltiplo de $1,2,3, \dots, n$. Llamemos m_n al mínimo común múltiplo de $1,2,3, \dots, n$. Para $A \in \mathcal{A}_n$, definimos

$$P_n(A) = \frac{\#(A \cap \{1,2, \dots, m_n\})}{m_n}, \tag{14}$$

donde $\#(B)$ significa el cardinal del conjunto B. Tenemos que $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_n, P_n)$ es un espacio de probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil concluir que si $n < m$ entonces $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_m$ y $(P_m / \mathcal{A}_n) = P_n$. La notación $(P_m / \mathcal{A}_n)$ representa la restricción de P_m a $\mathcal{A}_n$.

Lema 1. Sean $n_1, n_2, \dots, n_l$ naturales y sean $A_i = \{kn_i : k \in \mathbb{N}\}, i = 1,2, \dots, l$. Llamemos n al $mcm(n_1, n_2, \dots, n_l)$. Para $m \geq n$ se cumple:

i. $P_m(A_i) = \frac{\#(A_i \cap \{1,2,\dots,n\})}{n} = \frac{1}{n_i}$

ii. En el espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_m, P_m)$, los eventos $A_i = \{kn_i : k \in \mathbb{N}\}$ son independientes si solo si $n_1, n_2, \dots, n_l$ son primos relativos a pares.

Prueba.

La afirmación (i) es consecuencia de $n = h_i \times n_i$ y $\#(A_i \cap \{1,2, \dots, n\}) = h_i$.

Para probar (ii) tomemos $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1,2, \dots, l\}$. Se cumple que

$$\frac{\#\left(\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}\right) \cap \{1,2, \dots, n\}\right)}{n} = \frac{n}{mcm\left(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m}\right)} \times \frac{1}{n}. \tag{15}$$

Tenemos entonces que la igualdad

$$\frac{\#\left(\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}\right) \cap \{1,2, \dots, n\}\right)}{n} = \frac{1}{n_{i_1}} \times \frac{1}{n_{i_2}} \times \dots \times \frac{1}{n_{i_m}}, \tag{16}$$

es válida si y solo si para toda familia $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1,2, \dots, l\}$,

$$mcm\left(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m}\right) = n_{i_1} \times n_{i_2} \times \dots \times n_{i_m}\,. \tag{17}$$

Es decir, los sucesos A_i son independientes si y solo si $n_1, n_2, \dots, n_l$ son primos relativos a pares. ■

En lo que sigue p_i denotará el i-ésimo número primo.

Consideremos ahora los conjuntos periódicos $A_i = \{kp_i : k \in \mathbb{N}\}$, $1 \le i \le m$, y $p_m \le n$, en el espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_n, P_n)$. Por el lema 1, los sucesos A_i son independientes y así lo serán sus complementos. En el espacio de probabilidad producto,

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n, P_n \times P_n), \tag{18}$$

donde la variable genérica de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es (x, y), los sucesos

$$\{x \in A_i\}, \{y \in A_i\}, \quad i = 1,2, \dots m; \tag{19}$$

son independientes, y como una consecuencia de esto también serán independientes

$$\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\}, \quad i = 1,2, \dots m; \tag{20}$$

y

$$(\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\})^C, \quad i = 1,2, \dots m. \tag{21}$$

Como consecuencia de la independencia, tenemos que

$$(P_n \times P_n)\left(\bigcap_{i=1}^{m}(\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\})^C\right) = \prod_{i=1}^{m}(P_n \times P_n)((\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\})^C) = \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right). \tag{22}$$

La igualdad (22) puede expresarse: la probabilidad $(P_n \times P_n, n \ge p_m)$ de que los números naturales x y y, escogidos aleatoriamente (con reemplazo), no tengan a alguno de los números p_i, $i = 1,2, \dots, m$, como factor común es $\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right)$.

Ahora observemos que la afirmación anterior es correcta para todos los m y n, con $n \ge p_m$. Por otra parte, decir que «la probabilidad de que los números naturales x y y escogidos aleatoriamente no tengan a algún factor común primo es $\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right)$», es matemáticamente incorrecta, con un razonamiento de paso al límite, pero al final incorrecta, si no se da alguna definición extra de la palabra "probabilidad". También es incorrecta, la misma afirmación, en cualquiera de los casos asociados a las fórmulas (11) y (12).

La relación de $\prod_{i=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{p_i^2}$, con el problema de Basilea, usando (3), es muy conocida [1].

Con las herramientas aquí desarrolladas se pueden resolver problemas como:

i. Hallar la probabilidad de que n naturales, escogidos aleatoriamente no tengan un factor primo común,

ii. Hallar la probabilidad de que al escoger x y y aleatoriamente en los naturales, el número 5 sea un divisor de $4x + 3y$.

Algunos necesitarán pasar al límite informalmente y otros no.

Como prometimos al principio de este epígrafe, probaremos que no existe una probabilidad en la σ-álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la probabilidad de $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/p$, siendo ellos sucesos independientes. Supongamos entonces que existe tal espacio de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, P)$.

Primer paso. La σ-álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$, es la generada por la partición de $\mathbb{N}$,

$$\left\{A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}:\ p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_k}\ \ son\ primos\ y\ k \in \mathbb{N}\right\}, \tag{23}$$

y

$$A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} = \left\{p_{i_1}^{\alpha_1}p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k}: \alpha_i\ son\ elementos\ de\ \mathbb{N}\right\}. \tag{24}$$

Un elemento debe ser agregado a la partición: $A_{\Phi} = \{1\}$, que es el complemento de la unión de todos los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$, donde p es primo. La igualdad de las dos σ-álgebras es consecuencia de las igualdades

$$\{1\} \cup\ A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{\substack{p\ primo, \\ p\ distinto\ de\ p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}}} \{kp: k \in \mathbb{N}\} \tag{25}$$

$$\{kp: k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{p\ \in \left\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\right\}} A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\ . \tag{26}$$

Segundo paso. Enumeremos los primos distintos de $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$, como $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, y llamemos $M(q_j) = \{kq_j: k \in \mathbb{N}\}$, de esta forma la igualdad (25) se escribe

$$\{1\} \cup\ \ A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M(q_i), \tag{27}$$

y consecuentemente,

$$P(\{1\}) + \ P\left(A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} M(q_i)\right). \tag{28}$$

Ahora usamos el principio de inclusión y exclusión para sucesos independientes y obtenemos

$$\begin{aligned} &P(\{1\}) + P\left(A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} P\left(M(q_{j_1})\cap M(q_{j_2})\cap \dots \cap M(q_{j_m})\right)\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}\frac{1}{q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_m}}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Tercer paso. Calculemos la expresión

$$\sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}\frac{1}{q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_m}}\right), \tag{30}$$

para poder hallar su límite, si existe. Sea $R = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{n+k}$, de forma que $p_{n+k} > p_{i_k}$. Consideremos ahora el cardinal del conjunto

$$B = \{1,2,\dots,R\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} M(q_i) \cap \{1,2,\dots,R\}. \tag{31}$$

Sabemos que,

$$\#(B) = R - \#\left(\bigcup_{i=1}^{n} M(q_i) \cap \{1,2,\dots,R\}\right). \tag{32}$$

Usando el principio de inclusión y exclusión para hallar el cardinal del segundo miembro de (32), obtenemos

$$\#(B) = R - \sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}\frac{R}{q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_m}}\right), \tag{33}$$

de lo que se deduce

$$\sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}\frac{1}{q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_m}}\right)=1-\frac{\#(B)}{R}\,. \tag{34}$$

Por otra parte, utilizando el Lema 1 para los naturales $p_1, p_2, \dots, p_{n+k}$, tenemos que en el espacio de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_R, P_R)$ los sucesos $M(q_i), i \in \{1,2,\dots,n\}$, son independientes, luego sus complementarios también son independientes. Escribiendo $P_R(B)$ en las dos formas que justifica el Lema 1, obtenemos,

$$\#(B)=R\times\frac{(q_1-1)}{q_1}\times\frac{(q_2-1)}{q_2}\times\cdots\times\frac{(q_n-1)}{q_n}. \tag{35}$$

Usando (35) y la fórmula de Euler (3), concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#(B)}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{(q_1-1)}{q_1}\times\frac{(q_2-1)}{q_2}\times\cdots\times\frac{(q_n-1)}{q_n}=0. \tag{36}$$

De (34) y (36) deducimos que,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}\frac{1}{q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_m}}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\#\big(B(P)\big)}{P}=1. \tag{37}$$

Las igualdades (29), junto a (37), nos llevan a,

$$P(\{1\})+P\left(A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left((-1)^{m-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}\frac{1}{q_{j_1}q_{j_2}\dots q_{j_m}}\right)=0. \tag{38}$$

De la igualdad (38), concluimos que cualesquiera sean los números primos $p_{i_1}<p_{i_2}<\cdots<p_{i_k}$, se cumple que,

$$P\left(A_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right)=0, \tag{39}$$

y también que $P(\{1\})=0$. La σ-aditividad nos da que la probabilidad de $\mathbb{N}$ es nula. Lo anterior nos dice que es imposible la existencia de $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, P)$ con las propiedades deseadas y se ha completado la demostración. ■

Nota: Hemos probado que no existe una medida de probabilidad en la σ-álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la probabilidad de $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/p$, siendo ellos sucesos independientes. Esto lo hemos logrado, probando que su existencia implica la de sucesos mutuamente excluyentes de esta σ-álgebra (la partición (23)) que no satisfacen la σ-aditividad. También debe existir, una cantidad numerable, de sucesos mutuamente excluyentes, del álgebra generada por los $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la unión de ellos sea igual a un elemento de dicha álgebra, pero no se satisfaga la σ-aditividad. En otro caso el teorema de extensión de Carathéodory [2], aseguraría la existencia de lo que hemos probado no existe.

3. Nueva demostración "elemental"

La palabra "elemental" se refiere a que no usa cálculo. Lo único que no es elemental, en lo que sigue, es asumir que una serie infinita puede tener una suma, pero eso se hace en enseñanza media, cuando se acepta la idea de números decimales de infinitas cifras y cuando se da la suma de la serie geométrica. El teorema del emparedado, puede o no ser usado en la demostración que sigue. En nuestro caso, que el elemento intermedio es una constante, se puede repensar, como desigualdades cada vez más finas, en unión a un resultado del tipo: Si para todo número $\varepsilon > 0$, el número no negativo a cumple $a < \varepsilon$, entonces $a = 0$.

Partimos de la identidad,

$$\tan(2n\theta) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{2n}{2k+1} \tan^{2k+1}(\theta)}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{2n}{2k} \tan^{2k}(\theta)}, \tag{40}$$

que es válida siempre que $\tan(\theta) \neq \infty$. La fórmula (40) puede ser demostrada por inducción, usando la fórmula de la tangente del ángulo suma o mediante la fórmula de Moivre [6]. De (40) podemos deducir que cualquiera sea el número natural a, mayor que 1, se cumple

$$\tan\left(2a\frac{m\pi}{2a}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k \binom{2a}{2k+1} \tan^{2k+1}\left(\frac{m\pi}{2a}\right)}{\sum_{k=0}^{a}(-1)^k \binom{2a}{2k} \tan^{2k}\left(\frac{m\pi}{2a}\right)} = 0\,, \quad 0 < m < a\,. \tag{41}$$

De (41) obtenemos,

$$\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k \binom{2a}{2k+1} \tan^{2k+1}\left(\frac{m\pi}{2a}\right) = 0\,, \quad 0 < m < a\,. \tag{42}$$

Como $\tan\left(\frac{m\pi}{2a}\right) > 0$ siempre que $0 < m < a$, podemos dividir, por este valor, la igualdad (42), y así obtener

$$\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k \binom{2a}{2k+1} \left(\tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)\right)^k = 0\,, \quad 0 < m < a\,. \tag{43}$$

La igualdad (43) nos da las $a-1$ raíces distintas de un polinomio de grado $a-1$, por lo que obtenemos

$$\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\binom{2a}{2k+1}x^k$$

$$=(-1)^{a-1}\binom{2a}{2a-1}\left(x-\tan^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)\left(x-\tan^2\left(\frac{2\pi}{2a}\right)\right)\dots\left(x-\tan^2\left(\frac{(a-1)\pi}{2a}\right)\right). \quad (44)$$

Igualando los coeficientes de la potencia $(a-2)$ en (44), tenemos

$$(-1)^{a-2}\binom{2a}{2a-3}=(-1)^a\binom{2a}{2a-1}\sum_{m=1}^{a-1}\tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right), \quad (45)$$

y simplificando obtenemos

$$\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!}=\sum_{m=1}^{a-1}tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right). \quad (46)$$

Es fácil mostrar, con argumentos geométricos, que cuando $0<x<\frac{\pi}{2}$ tenemos, (ver nota al final de esta sección),

$$x<tan(x) \qquad y \qquad tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{tan(x)}\,. \quad (47)$$

Usando (46) y (47) concluimos que,

$$\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!}=\sum_{m=1}^{a-1}tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)=\sum_{m=1}^{a-1}\frac{1}{tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)}<\frac{4a^2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{a-1}\frac{1}{m^2}\,. \quad (48)$$

Para la segunda igualdad de (48) se utiliza que $\tan\left(\frac{(a-m)\pi}{2a}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{m\pi}{2a}\right)}$.

De la desigualdad (48) obtenemos,

$$\sum_{m=1}^{a-1}\frac{1}{m^2}>\frac{\pi^2(2a-1)(2a-2)}{4a^2 3!}\,. \quad (49)$$

Como a puede ser arbitrariamente grande,(49) implica

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \geq \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{50}$$

Probemos ahora que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$. Argumentos geométricos justifican que cuando $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (ver nota al final de esta sección),

$$tan(x) < x\sqrt{tan^2(x) + 1} \qquad y \qquad tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tan(x)} \ . \tag{51}$$

Siendo a y k números naturales que cumplen $a \geq k \geq 3$ y usando (46) obtenemos

$$\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!} = \sum_{m=1}^{a-1} tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) = \sum_{m=1}^{a-[a/k]-1} tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) + \sum_{m=a-[a/k]}^{a-1} tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right), \tag{52}$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x. Las dos últimas sumatorias de (52) pueden ser acotadas inferiormente como sigue,

$$\sum_{m=1}^{a-[a/k]-1} tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) > (a - [a/k] - 1)tan^2\left(\frac{\pi}{2a}\right) \ , \tag{53}$$

y

$$\sum_{m=a-[a/k]}^{a-1} tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) = \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)} > \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2\left(tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)+1\right)}$$

$$> \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2\left(tan^2\left(\frac{[a/k]\pi}{2a}\right)+1\right)} = \frac{4a^2}{\pi^2\left(tan^2\left(\frac{[a/k]\pi}{2a}\right)+1\right)} \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{m^2} \ . \tag{54}$$

Usando (53) y (54) en (52), obtenemos,

$$\sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{m^2} < \left(\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!} - (a - [a/k] - 1)tan^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)\left(tan^2\left(\frac{[a/k]\pi}{2a}\right)+1\right)\frac{\pi^2}{4a^2} \ . \tag{55}$$

Como a puede ser arbitrariamente grande, de (55) concluimos que

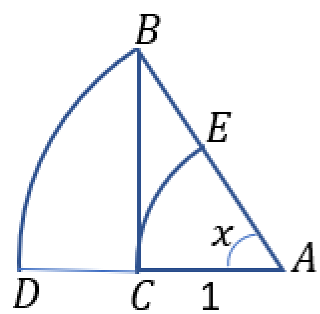
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\left(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2k}\right)\right)\pi^2}{6} \ . \tag{56}$$

Como también k puede ser arbitrariamente grande, de (56) se deduce que,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{57}$$

Con (57) queda demostrada la igualdad (7). ■

Nota. La siguiente figura representa un triángulo rectángulo, ΔABC, con el cateto base, $\overline{CA}$, de longitud igual a 1 y el ángulo adyacente a ese cateto de x radianes. Los dos arcos de circunferencia dibujados están centrados en el punto A.



Las dos desigualdades en (47) y (51) son respectivamente equivalentes a:

i. El área del sector circular CAE es menor que el área del triángulo ABC.
ii. La longitud del cateto BC es menor que la del arco BD.

4. Conclusiones

El modelo que aquí damos, de una familia de espacios de probabilidad, con sigma álgebras creciendo y funciones de probabilidad que son extensiones, de las funciones de probabilidad de cualquier sigma álgebra menor, ofrece mucha facilidad para el cálculo en problemas que involucren divisibilidad y probabilidad. Pensamos que es más natural y fácil de trabajar que el análisis del límite, cuando n tiende a infinito, en los espacios de probabilidad uniforme en $\{1,2,\ldots,n\}$ [9]. También es más simple que otro tipo de límites, como el que se desarrolla en [4].

La idea fundamental, de la demostración elemental que damos en la sección 3, es muy similar a la ya conocida, que usa la fórmula de Moivre para potencias de números complejos [1, 5]. La diferencia cualitativa está en las herramientas que se usan. En particular la fórmula (40), es poco conocida y permite obtener, con las mismas técnicas aquí desarrolladas, una variedad muy grande de identidades y propiedades de la función tangente, ver por ejemplo [6, 3].

Por último, las posibilidades que ofrece el problema de Basilea para guiar estudiantes a obtener y relacionar conocimientos son insuperables. La riqueza de conexiones y las múltiples formas en que es posible acercarse a él, permite a estudiantes avanzados de nivel medio y de los primeros cursos universitarios tener un fructífero encuentro con el problema, que además crea un vínculo emocional con muchos de los fundadores de la matemática moderna.

5. Referencias

[1] AIGNER, Martin and ZIEGLER, Günter M. *Proofs from THE BOOK*, pp. 55-64, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1998).

[2] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, pp. 96-104, John Wiley & Sons, Inc. New York, (1995).

[3] FALCON RODRIGUEZ, C. M., CRUZ, M.A.G. and FALCON, C. *Full Euclidean Algorithm by Means of a Steady Walk*, pp. 269-279, Applied Mathematics, 12, (2021). https://doi.org/10.4236/am.2021.124018

[4] GOLOMA, Solomon W. *A Class of Probability Distributions on the Integers*, pp. 189-192, Journal of Number Theory 2, (1970).

[5] GRANERO BELINCHÓN, Rafael. *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*, pp. 721-737, La Gaceta de la RSME, Vol. 12, Núm. 4, (2009).

[6] MAOR, Eli. *Trigonometric Delights*, pp. 150-164, Princeton University Press, New Jersey, (1998).

[7] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. *Euler y el Problema de Basilea*, pp. 27-56, Pensamiento Matemático, Volumen V, Núm. 1, (2015).

[8] SILAGADZE, Z. K. *The Basel Problem: A Physicist's Solution*, pp. 14-18, Math Intelligencer 41, (2019). https://doi.org/10.1007/s00283-019-09902-x.

[9] YAGLOM, A.M. and YAGLOM, I.M. *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, pp. 29-30, Dover Publications, Inc. New York, (1984).

Sobre los autores:

Nombre: Carlos Manuel Falcón Rodríguez
Correo Electrónico: falc4847@gmail.com

Institución: Grupo de Investigación de Análisis Matemático (GIAM), Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Nombre: Jarlyn José Díaz Peralta
Correo Electrónico: jarlynperalta@gmail.com
Institución: Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Nombre: Ribelly Estrella Salazar
Correo Electrónico: estrellaribelly@gmail.com
Institución: Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Nombre: Marileidy Bonilla Núñez
Correo Electrónico: marisleidy003@gmail.com
Institución: Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.