Historias de Matemáticas

Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria

State of the art on teaching and learning Fractal Geometry in high school

María Victoria Artigue, María de los Ángeles Fanaro, Eduardo Lacués

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XI, Número 2, pp. 075–092, ISSN 2174-0410
Recepción: 8 Ene'21; Aceptación: 5 Feb'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de una revisión bibliográfica de investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de elementos de la Geometría Fractal (GF) para la educación secundaria (12 a 17 años de edad). Se llegó a la conclusión de que es necesario trabajar sobre su adecuación para que sea enseñable, enfocándose en las propiedades intrínsecas de los fractales como la recursión infinita y la autosemejanza. Se propone recuperar la esencia matemática de esta geometría, explorando la posibilidad de vincularse con otros saberes y de utilizar formas de validación propias de la geometría en la escuela secundaria.

Palabras Clave: fractales, enseñanza, escuela secundaria, autosemejanza.

Abstract

This paper presents the results obtained from a bibliographic review of research related to the teaching and learning of elements of Fractal Geometry (FG) for secondary education (12 to 17 years old). It was concluded that it is necessary to work on its didactic transposition, focusing on the intrinsic properties of fractals such as infinite recursion and self-similarity. It is proposed to recover the mathematical essence of this geometry, exploring the possibility of linking with other knowledge and using forms of validation typical of geometry in secondary school.

Keywords: fractals, teaching, secondary school, self-similarity.

1. Introducción y planteamiento del problema

Este trabajo es parte de una investigación más amplia cuyo objeto de estudio es la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal (GF) en la enseñanza media, es decir, identificar los procesos de transposición didáctica para que los estudiantes puedan aprender algunas de sus características de una manera significativa.

La GF es un ámbito de la Matemática relativamente nuevo; las primeras ideas se desarrollaron hace poco menos de medio siglo. Diversos autores reconocen su importancia para describir y explicar fenómenos naturales que la Geometría Euclideana (GE) no puede abordar (Shriki y Nutiv, 2016; Faccio, 2013; Redondo, 2005; Chen, 2018 y Picoli, 2018).

La enseñanza de la GF constituye una problemática ya que se trata de una geometría claramente distinta de la GE, cuyo abordaje didáctico parece tener poca tradición en el ámbito de la educación Matemática. Si bien hay interés en la comunidad de investigadores por la enseñanza de la GF, aún no ha sido ampliamente abordada en la Educación Matemática y en sus currículos (Chen, Herron, Ding, Mohn, 2018; Karakus, 2011, 2013; Karakus y Baki, 2011).

Entre las posibles causas del poco reconocimiento se encuentra que la GF no está explícita como contenido en los programas de las asignaturas; en algunos países como China y Estados Unidos figura como tema opcional. Otra razón es que tampoco integra los contenidos de los planes de formación docente, por lo que el profesorado puede no tener conocimiento de esta temática, su epistemología, sus fundamentos matemáticos (Chen et. al., 2018). Esto es, desconocen las transformaciones necesarias al saber matemático (propio de los matemáticos) para que sea enseñable, que tenga sentido para el alumno. Este proceso es señalado con la expresión transposición didáctica (Chevallard, 1999).

Por su parte, Karakus (2016) advierte que la mayoría de los estudiantes de profesorado solamente conocen el concepto de dimensión propio de la GE, relacionándolo con un sistema de coordenadas, definiéndolo como el número de parámetros utilizados para determinar la ubicación de un objeto. Es decir, los futuros profesores de Matemática, conceptualizan a la dimensión como una característica del objeto, como la longitud, el ancho y la altura, pero desconocen otras como la dimensión fractal.

En otros países, como Uruguay y Argentina, es notoria la tendencia a incorporar elementos de la GF en las últimas elaboraciones de los programas escolares. En el caso de Argentina, el diseño curricular para la escuela secundaria prescribe la enseñanza de los fractales en sexto año:

> *La noción de fractal posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero aplicado con ciertas particularidades –como geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y noción de límite de sucesiones–. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a varios niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada, que en ciertos casos describen formas de la naturaleza: Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito, que encierra una región del plano de área finita, representada por una figura con forma de copo de nieve* (Documentos curriculares de la Provincia de Buenos Aires, 2015, pág. 13).

En Uruguay, también es en sexto año de secundaria (tercer año de bachillerato) que está indicado explícitamente en Programas 2006 Reformulación 2010 como contenido curricular, la noción de fractal, aunque solamente es para la opción de la modalidad orientada de "Matemática y diseño":

> *Se construirán fractales conocidos. Por ejemplo: Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, Curva de Koch, Triángulo y alfombra de Sierpinski. Se vincularán a cálculos de longitudes, áreas y coordenadas de puntos. Se crearán nuevos fractales a partir de los conocidos. Se podrán construir fractales a partir de materiales concretos, por ejemplo, poliminós. Se podrán construir fractales en la Sala de Informática"* (Programa del curso de Matemática I para 3er año de bachillerato, opción Matemática y diseño, plan reformulación 2006, pág. 9).

En estas dos propuestas en concordancia con lo que señalan Fusi y Sgreccia (2020), subyace la idea de aprovechar los últimos años de la escuela secundaria para la enseñanza de fractales y generar una oportunidad para estudiar, recuperar y ampliar en algunos contenidos matemáticos anteriores, tales como: límite, sucesiones, series, transformaciones de semejanza, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, recursividad.

En este trabajo, nuestra pregunta de investigación busca conocer qué características tiene la GF presentada en la escuela secundaria, tal como es reportada en los artículos de investigación encontrados, y en qué forma estas características presentan los fundamentos matemáticos y epistemológicos propios de este campo de saber.

Los fractales que más frecuentemente se exponen en los artículos de enseñanza y aprendizaje de la GF son: conjunto de Cantor (CC), curva de Koch (CK), triángulo de Sierpinski (TS), árbol Pitagórico (AP) y en menor medida la curva de Hilbert (CH), razón por lo cual serán utilizados para ejemplificar las nociones desarrolladas en este artículo. La forma coloquial (prescindiendo del formalismo matemático) que permite construirlos, se puede encontrar en los libros de texto y materiales de enseñanza, y hasta de manera interactiva en cursos como por ejemplo en Mathigon[1]. En cambio, una construcción matemática formal se encuentra en Peitgen, Jürgens y Saupe (2004), o en Rubiano (2009).

En este artículo se comienza presentando fundamentos epistemológicos y matemáticos relativos a la GF, focalizando en la relación entre el concepto de fractal y la matemática que permite justificar sus características; en particular, nos centraremos en la autosemejanza. A continuación, estos fundamentos serán utilizados como marco teórico-conceptual para analizar los artículos de investigación referidos acerca de la GF en la escuela secundaria.

A continuación, se describe la metodología desarrollada para analizar los artículos de investigación acerca de la enseñanza de la GF en la enseñanza secundaria, y se la aplica a los obtenidos mediante una búsqueda sistemática utilizando el software Harzing[2] en una ventana temporal de 20 años (2000 - 2020). Las conclusiones obtenidas de este análisis se presentan en la sección siguiente a la metodología y finalmente, se presentan reflexiones finales en las que se plantean cuestiones pendientes y posibles continuaciones de este trabajo.

[1] https://mathigon.org/course/fractals/introduction

[2] Harzing, A.W. (2007) Publish or Perish, disponible en https://harzing.com/resources/publish-or-perish

2. Fundamentos epistemológicos-matemáticos de la GF

El término fractal, proveniente del latín "fractus" (adjetivo que significa interrumpido o irregular) fue introducido por el matemático Benoit B. Mandelbrot en el año 1975, quien observó que la naturaleza es tan compleja que la GE no alcanza para estudiarla, como es el caso de las formas naturales como una nube, una montaña o costas de países. Según Spinadel (2002) son diversas las definiciones de fractal que se han ido proponiendo, y aconseja no brindar una única definición, a riesgo de excluir algunos casos interesantes; y en su lugar realizar una lista de sus propiedades más características. Por ejemplo, Falconer (1990), establece que cuando se hace referencia al conjunto F como fractal, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. F tiene estructura fina con detalles sobre escalas arbitrariamente pequeñas.
2. F es demasiado irregular para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, localmente y globalmente.
3. F tiene alguna forma de autosemejanza.
4. F tiene asignada una "dimensión fractal" que puede calcularse de cierta forma.
5. F está definido de una manera simple, a veces, mediante una recursión.

El estudio de los fractales trae inmediatamente aparejado la necesidad de abordar dos propiedades: la dimensión fractal y la autosemejanza. Se han formulado al menos diez definiciones matemáticas para el concepto de dimensión, entre ellas: dimensión topológica, dimensión de Hausdorff, dimensión fractal, dimensión de conteo de cajas, dimensión de capacidad, dimensión de información, y dimensión euclidiana. Todas están relacionadas, aunque algunas tienen sentido en ciertas situaciones pero no en otras, a veces todas tienen sentido y coinciden, algunas tienen mayor aplicación en las ciencias como la dimensión de conteo de cajas (o box-counting) (Peitgen, Jürgens y Saupe, 2004). Dado que el concepto de dimensión no abarca el objetivo de este trabajo, en lo que sigue el foco es el concepto de fractal y su relación con la autosemejanza.

Si bien la autosemejanza parece ser una noción evidente y no necesitar más explicación que la presentación de ejemplos sencillos donde la Matemática está ausente, su importancia es esencial para dar significado a los fractales, ya que es una propiedad subyacente en todos ellos. Una forma de ejemplificarla es con la cabeza de una coliflor: contiene partes que cuando se quitan y se comparan con el conjunto son muy parecidos, solo que más pequeñas (Peitgen, et. al., 2004). Otro ejemplo bastante intuitivo de la autosemejanza es una varilla graduada de un metro, que tiene marcados los decímetros, los centímetros y los milímetros: un decímetro, junto con sus marcas, parecen un metro con sus respectivas marcas, pero reducido en un factor de 10. En este caso, el segmento de recta, resulta ser autosemejante aunque no es un fractal, y por lo tanto, la autosemejanza no es el único indicar para considerar que se trate de un fractal, aunque usualmente los fractales sí cumplen con esta propiedad.

Sin embargo, esta idea intuitiva y básica de autosemejanza merece ser cuestionada, ya que no se presenta de la misma manera en todos los fractales. Al intentar encontrar partes que sean pequeñas réplicas del todo, con cualquier grado de aumento de escala, se encuentran resultados distintos, como se muestra en la Figura 1:

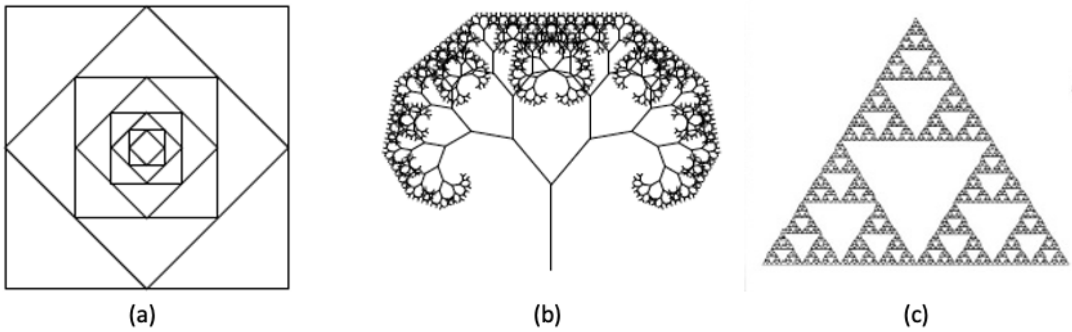


Figura 1. Se presentan tres figuras, para ilustrar distintos tipos de autosemejanza. Fuente: (a) y (b) de Sabogal y Arenas (2011), (c) de Peitgen (2004).

Así, siguiendo con esta aproximación intuitiva del concepto de autosemejanza, se pueden reconocer diferentes tipos, según la cantidad de puntos en que se pueda apreciar la presencia de copias idénticas de sí misma. La que sigue es una posible clasificación de autosemejanza que se adapta al tipo de fractales que se analizan en este trabajo. Se dice que la autosemejanza es puntual si dentro de la figura completa es posible encontrar infinitas copias reducidas de sí misma, sólo en un punto, el cual se denomina punto límite y es donde el tamaño de las copias tiende a cero, como el caso (a) de la Figura 1 (Peitgen, et. al., 2004).

Otra manera de pensar en esta situación es la imagen de la portada de un libro en la que aparece una mano sosteniendo ese mismo libro, o la de un pintor que se pinta a sí mismo pintando. En estos tres casos, podemos pensar en un proceso que se repite de tal forma que si nos detenemos en cualquier parte y nos imaginamos lo que resta de él, no podemos distinguir en qué paso del proceso nos habíamos detenido (excepto, posiblemente, por la medida de las figuras implicadas).

La autosemejanza es estricta cuando es posible encontrar al todo en cualquier parte del fractal, como lo es en el caso de CC, TS y CK (Caballero, 2017; Higueras, 2011; Peitgen, et. al., 2004). Finalmente, cuando se pueden encontrar copias reducidas del todo en ciertos puntos de la figura (Sabogal y Arenas, 2011), o cuando las copias que se encuentran están distorsionadas se habla de cuasi-autosemejanza (Castelblanco, 2015; Oltra 2009). La Tabla 1 sintetiza estos tres tipos de autosemejanza y los ejemplifica con otros fractales que tienen la respectiva propiedad.

Tabla 1. Clasificación de la autosemejanza para algunos fractales seleccionados.

Fractal	Tipo de autosemejanza	Descripción
-Caso (a) de la figura 1. -La imagen de un libro en cuya portada hay una mano sosteniendo ese mismo libro.	Puntual.	La autosemejanza se cumple en un punto solo: punto límite en el cual el tamaño de las copias tiende a cero.

CC TS CK	Estricta.	Se puede encontrar copias del todo cerca de cualquier punto del fractal.
AP CH	Cuasi - autosemejanza (no corresponde a ninguna de las dos anteriores).	Las copias del todo se acumulan cerca de las hojas del árbol fractal. Contiene copias distorsionadas de la figura obtenida en la primera iteración.

Como se puede notar, la propiedad de autosemejanza no se cumple de igual manera en cualquier fractal. Pero, si se busca pasar de esa idea intuitiva a una formulación matemática de la autosemejanza, es necesario hacer referencia al concepto de semejanza de la geometría euclidiana.

Una transformación de semejanza en el plano, es definida como una función del plano en el plano que se obtiene mediante la composición de una homotecia con una isometría (rotación, traslación o simetría).

Para el estudio de los fractales, dichas transformaciones deben ser contractivas, es decir con razón de homotecia entre cero y uno, por lo que al aplicarla reduce la distancia entre dos puntos cualesquiera de la figura imagen.

Ahora bien, la clasificación anterior es relevante porque para aquellos fractales que poseen autosemejanza estricta, estas transformaciones deben aplicarse iteradamente, constituyendo en algunos casos, un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Con los SFI los matemáticos lograron una unidad en tanta diversidad, definiendo transformaciones geométricas del plano en el plano a través de transformaciones afines de forma matricial (Rubiano, 2009) utilizando recursos de Álgebra Lineal.

Un SFI debe dar cuenta de las transformaciones que se aplican a la figura original llamada semilla. Debe proveer la información necesaria respecto del número de transformaciones que lo componen y sus características, como ser: la razón de homotecia o razón de contractividad, las posiciones relativas respecto al iniciador, y su traslación o rotación, el orden en el cual se aplican.

Con independencia de la figura original, el comportamiento límite del SFI garantiza que, cada algoritmo fractal da lugar a una figura límite, y sólo una (Pérez Medina, 2007). Por lo tanto, cada conjunto formado por transformaciones de semejanza define una imagen fractal denominada atractor del SFI, que siempre existe y es único. (Moreno-Marin, 2002). Este aspecto dota a los fractales de la propiedad de autosemejanza estricta (Pérez Medina, 2007).

En el caso particular del TS con semilla un triángulo rectángulo con vértices (0,0); (1,0) y (0,1), pueden considerarse tres transformaciones afines f_1, f_2 y f_3 , donde f_1 es una homotecia de razón $\frac{1}{2}$ y centro (0,0), f_2 es f_1 seguida de una traslación de vector $(0,\frac{1}{2})$, y f_3 es f_1, seguida de una traslación de vector $(\frac{1}{2},0)$. Por lo tanto f_1, f_2 y f_3 forman un SFI para el TS. El resultado de la primera iteración por medio del SFI queda definido por la unión de las imágenes de la semilla, en cada una de las funciones aplicadas (Rubiano, 2009; Sabogal y Arenas, 2011) como se muestra en la Figura 2 (adaptado de Rubiano, 2009).

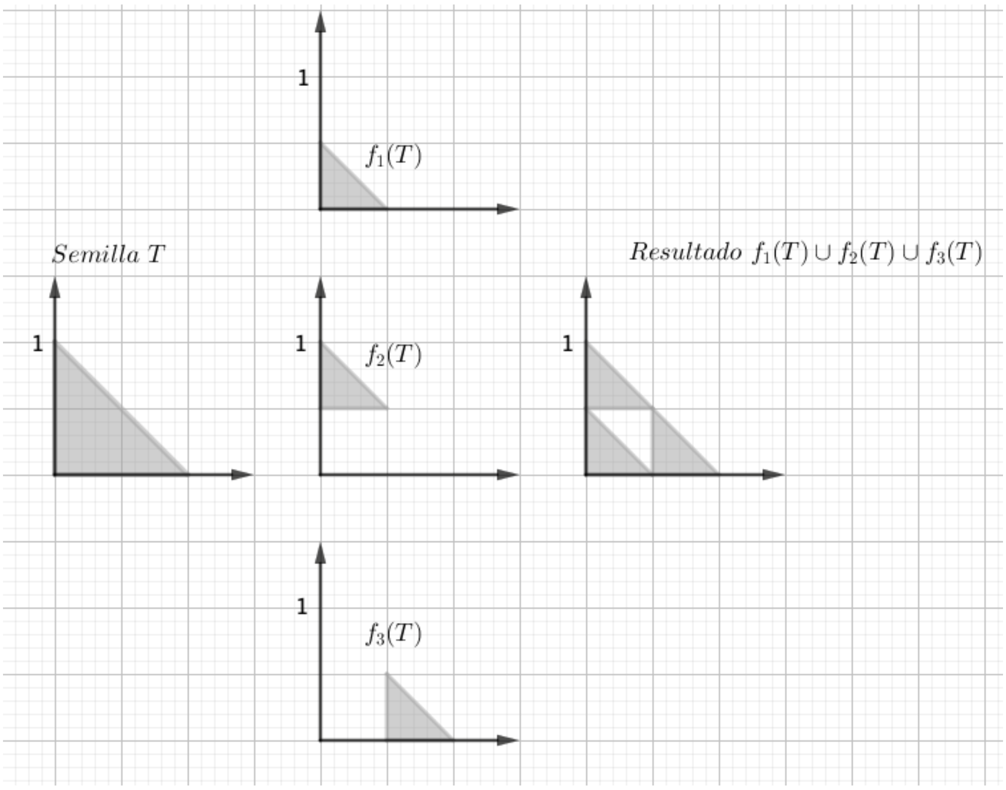
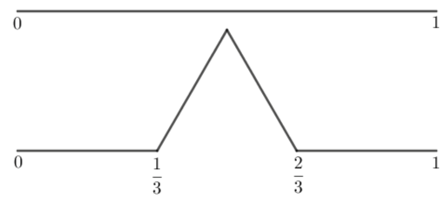


Figura 2. Las imágenes representan las tres transformaciones que se aplican a la figura inicial (semilla). La unión de las imágenes mediante las tres transformaciones f_1, f_2 y f_3 da como resultado la primera iteración para el TS.

En la tabla 2 se presentan las transformaciones geométricas necesarias para obtener la primera iteración para los fractales CC y CK.

Tabla 2. Transformaciones de semejanza para construir el resultado de la primera iteración de CC y CK.

Fractal	Transformaciones geométricas	Resultado de la primera iteración
CC en el intervalo [0,1].	Homotecia de factor $\frac{1}{3}$ y centro (0,0). Homotecia de factor $\frac{1}{3}$ y centro (0,0), seguida de una traslación de vector de módulo $\frac{2}{3}$ y sentido paralelo al eje Ox positivo.	

CK en el intervalo [0,1].	Homotecia de factor $\frac{1}{3}$ y centro (0,0). Rotación de centro (0,0) y ángulo 60 grados antihorario. Traslación de vector $(\frac{1}{3},0)$. Rotación de centro (0,0) y ángulo 60 grados horario. Traslación de vector $(\frac{1}{3},0)$. Homotecia de factor $\frac{1}{3}$, seguida de una traslación de vector $(\frac{2}{3},0)$.	

Sin embargo, entre la formalidad matemática al trabajar con los SFI y su atractor, y la idea intuitiva de autosemejanza estricta, se hace necesario formular una definición que permita responder a la pregunta de si una figura tiene autosemejanza estricta. En este trabajo se propone adoptar la siguiente formulación, posible de ser trabajada en la escuela secundaria:

Una figura es autosemejante estrictamente si es obtenida por un proceso iterativo donde el resultado de cada paso puede descomponerse en partes, cada una de las cuales es semejante al resultado de la primera iteración.

Esta definición requiere indicar las diferentes transformaciones de semejanza que permiten transformar las partes de una figura semejante al resultado de la primera iteración e indicar la cantidad de partes. En la tabla 3 se presenta una posible manera operativa de aplicar esta definición para CC cuya semilla es el intervalo [0,1], TS cuya semilla es un triángulo equilátero de vértices (0,0); (1,0) y $(\frac{1}{2},1)$ y CK con semilla el intervalo [0,1]. Solamente se muestra para la iteración número 2.

Tabla 3: Transformaciones de semejanza y cantidad de partes para determinar si CC, TS y CK son autosemejantes para la segunda iteración.

Fractal	Transformaciones geométricas	Cantidad de partes
CC en el intervalo [0,1].	Homotecia de razón 3 y centro (0,0) a $\left[0,\frac{1}{9}\right]$. Homotecia de razón 3y centro (0,0) a $\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$, seguida de una traslación de vector $(\frac{2}{3},0)$.	2
TS con vértices en (0,0); (1,0) y $(\frac{1}{2},1)$.	Homotecia de razón2 y centro(0,0). Homotecia de razón 2 y centro $(\frac{1}{2},1)$. Homotecia de razón 2 y centro (1,0).	3

CK en el intervalo [0; 1].	Homotecia de razón 3 y centro (0; 0) Rotación de 60 grados horario y centro $(\frac{1}{3}, 0)$. Rotación de 60 grados antihorario y centro $(\frac{2}{3}, 0)$. Homotecia de razón 3 y centro (1; 0).	4

Aquí es esencial remarcar que la autosemejanza es un resultado de un proceso límite y no de una etapa en particular. En este sentido, la definición propuesta evita referirse a la propiedad de autosemejanza aludiendo a frases como "se puede encontrar el todo en sus partes", "se puede descomponer en partes que son similares al todo" o "que es invariante a cualquier cambio de escala", que son difícilmente justificables desde el punto de vista matemático, y si no se trabajan, quedan en el conjunto de frases vacías para referirse a los fractales.

A partir de la consideración anterior acerca de los procesos infinitos que permiten definir a los fractales en el límite de éstos, las investigaciones científicas que aplican fractales, frecuentemente usan el término pre-fractal (Gianvittorio, Romeu, Blanch, Rahmat, 2003; Fernández Pantoja, Ruiz, Bretones, Gómez, 2003). Esta distinción es válida para reconocer que cuando los fractales se representan gráficamente, se está considerando una etapa precisa, un número finito de iteraciones. Como ejemplo de objetos fabricados cuyo diseño se basa en GF se encuentran las antenas que, gracias a la propiedad de autosemejanza, tienen la ventaja de poder ser multibanda, es decir, trabajar en varias frecuencias.

La discusión previa nos lleva a preguntarnos ¿de qué forma es propuesta la enseñanza de la GF y qué características de los fractales se resaltan en las mismas?

3. Metodología

La búsqueda de artículos de investigación se realizó utilizando el programa POP (Harzing, 2008) que permite tanto la búsqueda como la exportación de los indicadores bibliométricos a planilla de cálculo o a otros formatos de manejo de gestores bibliográficos. En este caso, las fuentes de datos utilizadas fueron Google Scholar y Scopus, pues son aquellas de acceso directo y libre. La búsqueda se realizó dando como entrada a los términos: fractales; enseñanza (y sus correspondientes en inglés fractals; teaching) en el campo del título. Luego fueron seleccionados para este estudio aquellos que estuvieran en revistas de acceso libre y activas en cuanto a su frecuencia de publicación.

Con estas investigaciones se elaboró una matriz bibliográfica identificando los principales componentes del instrumento V de Gowin (Novak y Gowin, 2004): foco o interés del trabajo, dominio conceptual, dominio metodológico y resultados principales.

El análisis de los datos se basó en los trabajos previos de Pereira y Borges (2017) y de Garbin (2007). El primero trata de una revisión bibliográfica exhaustiva acerca de la enseñanza de Geometrías no Euclidianas (GNE) en los últimos diez años en Brasil. El segundo trabajo analiza los fundamentos matemáticos, didácticos y cognitivos del concepto de fractal; si bien no fueron aplicados por la autora para realizar una revisión bibliográfica sino para analizar las percepciones de un conjunto de estudiantes universitarios acerca de la noción de fractal, el punto de vista cognitivo utilizado presenta un interés didáctico a la hora de analizar las investigaciones relevadas.

Así, Pereira y Borges (2017) construyeron las siguientes categorías acerca de las investigaciones referidas a la enseñanza de las GNE:

- Propone la enseñanza de GNE por medio de softwares educativos.
- Se analiza las GNE en la formación del profesorado.
- Se analiza la potencialidad de los fractales para explorar simultáneamente diferentes conceptos matemáticos.
- Se propone la enseñanza de GNE por medio de materiales manipulables.
- Se analizan las concepciones de los docentes y estudiantes acerca de las GNE.

Estas categorías se adaptaron y se formuló una más para este análisis, específicamente referida a los fractales: la razón que se sustenta para la enseñanza de fractales.

Por otro lado, Garbin (2007) propuso como significados del concepto de fractal:

- Objeto límite u objeto producto de un proceso infinito.
- Objeto geométrico con dimensión fraccionaria.
- Objeto irregular que representa fenómenos naturales
- Conjunto matemático que cumple ciertas propiedades, como las mencionadas antes, propuestas por Falconer (1990).

De las categorías elaboradas por Garbin (2007), se consideró que al ser la dimensión fraccionaria una propiedad, se incluiría en la categoría Definición de fractal a través de sus propiedades. Además, como en la revisión bibliográfica ningún autor define de manera única a un fractal como objeto irregular que representa fenómenos naturales, no se consideró como categoría. Asimismo, se formuló una más, que es No se define fractal.

A partir de estos dos trabajos, y de las investigaciones relevadas, se desarrollaron las categorías y subcategorías de análisis que se presentan en la tabla 4, y que permiten responder las dos preguntas planteadas en este trabajo: ¿de qué forma es propuesta la enseñanza de la GF y qué características de los fractales se resaltan en las mismas?

Tabla 4. Categorías y subcategorías de análisis.

Categoría	Subcategoría
C_1: Interés principal del trabajo.	C_{1E}: Enseñanza de GF (énfasis en el uso de softwares educativos u objetos manipulables, o análisis de la GF para enseñar otros conceptos, con o sin presentación de actividades).

	C_{1P}: Análisis de las percepciones de profesores o alumnos acerca de la GF.
C_2: Razón para enseñar fractales.	C_{2BU}: Belleza de la GF por su presencia en la naturaleza o utilidad en diversas disciplinas (motivación).
	C_{2ME}: Potencialidad de modelización y explicativa.
C_3: Caracterización del objeto geométrico fractal.	C_{3N}: No se presenta una caracterización explícita para los fractales.
	C_{3P}: Conjunto matemático autosemejante y con dimensión fractal (sin hacer referencia a un proceso límite).
	C_{3L}: Objeto límite u objeto producto de un proceso infinito.

4. Análisis de los resultados

Un análisis temporal indica un interés creciente sobre el tema, encontrándose 8 artículos publicados en los últimos tres años, mientras que, en los 17 años anteriores, en promedio encontramos una publicación, por año. En cuanto a la frecuencia de publicación de esta temática por revista, es notorio que la revista con mayor número de publicaciones sobre GF es Suma (http://revistasuma.es/revista) con un total de 8 artículos de un total de 28 que se han cosdiderado. En orden de frecuencia, sigue la revista Unión (https://union.fespm.es/index.php/UNION), donde se encuentran 2 artículos.

Entre los resultados de las investigaciones, se encuentra que hay diversos tipos de dificultades a la hora de enseñar y de aprender GF en la escuela secundaria. Por un lado, están aquellas que refieren a la comprensión del objeto matemático fractal y de sus propiedades de autosemejanza y de dimensión fraccionaria (Karakus y Karatas, 2014; Karakus, 2015; Karakus, 2016; Pinto y Desconsi, 2018). Por otro lado, están las de tipo operatorio, incluyendo manejo de operaciones con números racionales y análisis de series numéricas (Karakus, 2013).

La tabla que sigue resume cuantitativamente los resultados de la búsqueda y de la categorización realizada.

Tabla 5. Resultados de las categorías y subcategorías de análisis.

Categoría	Subcategoría	Resultados
C_1	C_{1E}	18/28 (64%)
	C_{1P}	10/28 (36%)
C_2	C_{2BU}	12/28 (43%)
	C_{2ME}	16/28 (57%)
C_3	C_{3N}	10/28 (36%)
	C_{3P}	11/28 (39%)
	C_{3L}	7/28 (25%)

Respecto al interés del trabajo (C_1) , se encontró que más de la mitad de las investigaciones (64%) se enfocan en propuestas de enseñanza acerca de la GF, ya sea a través de actividades con objetos manipulables, con softwares o con una secuencia de ejercicios para que los estudiantes descubran alguna característica de la GF. Solamente una pequeña parte de las que se encuentran en C_{1E} (el 18%), implementan las propuestas, ya sea en el aula curricular o en talleres extracurriculares; el resto de los trabajos solo presentan las propuestas. En el 36% de los artículos restantes, se encuentran las 10 investigaciones que se dedican al estudio y análisis de las percepciones del profesorado y estudiantes acerca de la GF (categoría C_{1P}). Así, en 7 trabajos se analizan producciones de estudiantes cuando se les enseñan conceptos relativos a GF, estudiando de qué manera los estudiantes distinguen, definen o dibujan un fractal (Karakus, 2013, Karakus y Karatas, 2014, Karakus, 2015; Faccio, 2013); en otros casos se analizaron estrategias de cálculo de perímetros y áreas, o de construcción con regla y compás o con cartón de diferentes iteraciones de fractales (Picoli y Pinto, 2018; Pinto y Desconsi, 2018; Rezende, Moran, Mártires, Carvalho, 2018). Los estudios que refieren a las percepciones del profesorado son 3 y apuntan a: el interés que ellos tienen acerca del desarrollo profesional sobre GF (Chen y otros, 2018), a analizar qué comprenden por dimensión fractal (Karakus, 2016), y a estudiar de qué manera se puede hacer un uso efectivo de la tecnología para abordar aspectos de la GF (Yildiz y Baltaci, 2017).

En relación con la pregunta del motivo para enseñar GF (C_2), casi la mitad de los trabajos (43%) hace referencia a la belleza de la GF por su presencia en la naturaleza o utilidad en diversas disciplinas, hecho que produciría una motivación intrínseca (C_{2BU}). En 7 de ellos se ejemplifica la aplicación de los fractales haciendo alusión al crecimiento de las plantas, al desarrollo de un cáncer, a la anatomía interna del cuerpo humano, a las superficies irregulares, a la forma de los relámpagos, a la música, a la pintura, a la mecánica de fluidos, entre otras. Estas referencias no avanzan más del plano de la mención, es decir no se proponen actividades donde los estudiantes puedan modelizar las situaciones utilizando la GF. El resto de las investigaciones (57% restante) que pertenecen a la categoría C_{2ME} hace referencia a la potencialidad que tiene la GF para abordar otros conceptos matemáticos, o para mostrar su capacidad de modelizar diferentes figuras. Por ejemplo, se manifiesta el vínculo con conceptos geométricos como perímetro, área, congruencia de triángulos, transformaciones de semejanza

(Figueiras, 2000; Moreno, 2002; Rezende, 2018; Pinto y Desconsi, 2018); con el cálculo a través de límites de sucesiones y series aritméticas y geométricas (Shriki y Nutiv, 2016, Karakus, 2011), función exponencial y logarítmica (Karakus, 2011); y con la probabilidad a través de la probabilidad geométrica y condicional (Lopes, 2013).

Al analizar cómo las investigaciones se refieren a los fractales, se encontró que, aproximadamente en un 35% presenta a los fractales de una forma un tanto alusiva, es decir sin mayor explicitación de considerar una figura "bonita", especial porque se reproduce haciendo copias de sí misma (C_{3N}); es el caso de actividades pensadas para un espacio de taller, extracurricular, como proyecto escolar o como actividad lúdica. El restante 64% presenta explícitamente una caracterización del objeto fractal, ya sea aludiendo a un proceso infinito (39%, C_{3L}) o enfocándose en sus propiedades de autosemejanza y dimensión fractal (61%, C_{3P}).

Resulta interesante profundizar en estas dos últimas subcategorías. Así, en los 7 artículos de la subcategoría C_{3L}) se plantea la idea de límite para hallar longitudes, perímetros y áreas de los fractales CC, TS, CK y AP. Solamente en 4 de ellos se diseñan actividades que apuntan a ese objetivo. En el caso del CC, las preguntas direccionan al estudiante a cómo calcular su longitud, para lo cual previamente les solicitaban indicar la cantidad de segmentos en cada iteración, la cantidad de segmentos que se quitan y la longitud de cada uno de ellos. Finalmente, la longitud del fractal es pedida a través de las preguntas *¿qué va a pasar haciendo el proceso hacia el infinito?* (Sardella, Zapico y Berio, 2006), *¿qué ocurrirá con el número de segmentos y la longitud de todos ellos cuando el número de iteraciones sea infinito?* (Redondo, Buitrago y Haro, 2004). Para el estudio del perímetro y del área de los demás fractales, el procedimiento a realizar es similar. Las preguntas en estos casos son *¿Qué observas qué sucede con el perímetro y el área total a medida que aumentan las iteraciones? ¿A qué tiende ese valor?* (Faccio, 2013), *¿Existe alguna relación entre la cantidad de ramas? ¿Cómo podrías generalizar?* (Pinto y Desconsi, 2018). Es llamativo la poca importancia que se le otorga a los procesos límites, dado que el fractal es el resultado de un proceso de este tipo.

En relación con la caracterización del fractal mediante el concepto de autosemejanza, si bien esta es una propiedad que tienen usualmente los fractales, en el 45% de los artículos no se presenta alguna definición, posiblemente porque colocan el foco conceptual en la construcción de diferentes iteraciones, o bien en los procesos iterativos, o bien en el concepto de dimensión fractal. En aquellos artículos en que sí se opta por definir autosemejanza, se encuentran las siguientes: una figura es autosemejante si contiene partes que se asemejan al todo (9 artículos) y una figura es autosemejante si es invariante a cualquier cambio de escala (5 artículos), aunque dos artículos exponen ambas propiedades. De los trabajos de la categoría C_{1P}, referidos al análisis de las producciones de estudiantes, se consideró que un dibujo que demostrara comprensión de lo que es un fractal debía contener: la semilla, la regla de iteración y la propiedad de autosemejanza definida de manera similar a las definiciones recién dadas (Karakus y Karatas, 2014; Karakus, 2016). En 12 artículos no fue posible encontrar un trabajo con el concepto de autosemejanza. Al igual que con el concepto de límite es preocupante que las propuestas de enseñanza no propongan una forma operativa de decidir, mediante un conjunto de operaciones matemáticas, si dada una figura geométrica, es autosemejante. Como se expuso en secciones anteriores de este trabajo, la complejidad matemática que esto supone puede adaptarse a la enseñanza para los estudiantes de la escuela secundaria.

En sólo 3 artículos se hace mención a diferentes tipos de autosemejanza, en total acuerdo con el planteo realizado en la sección de Fundamentos epistemológicos-matemáticos de la GF de este trabajo. De forma similar, Karakus y Baki (2011) la clasifican en tres tipos: autosemejanza alrededor de un solo punto, autosemejanza en ciertas partes (aproximada) y autosemejanza en cada parte (cada una de ellas es similar a la figura total), ilustrando esto en una imagen que se presenta en la figura 3.

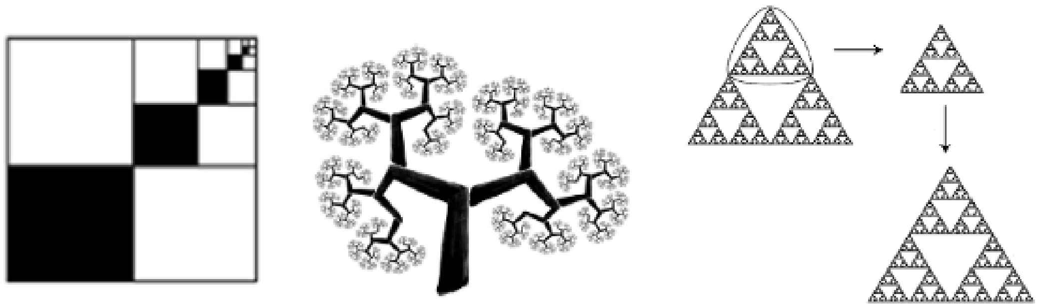


Figura 3 Fuente: Karakus (2011)

Karakus (2016) y Picoli y Pinto (2018), por su parte definen figura autosemejante estricta a aquella que tiene en cualquier parte, una réplica del todo, o que en cualquier parte del fractal se reproduce exactamente la forma de una porción más grande. Es destacable que, en los tres casos, esta clasificación luego no es aplicada en las actividades propuestas, desaprovechando así las potenciales ventajas que esto podría tener para conceptualizar los fractales.

5. Reflexiones finales

El propósito del trabajo fue realizar una revisión bibliográfica acerca de la enseñanza y del aprendizaje de la GF en la escuela secundaria. Producto de la búsqueda y de análisis de los artículos, se estableció la necesidad de trabajar en la transposición didáctica para enseñar la geometría fractal.

El estudio de los fractales nació en la Matemática y dentro de este campo se generó vasto conocimiento, lo cual constituye un claro argumento para proponer que parte de la transposición didáctica de estos conceptos se ocupe de transformar la Matemática presente a la hora de estudiar fractales, y dé un rol motivacional a enfoques más informales que prevalecen en los materiales educativos revisados, aprovechando, entros otros, los aspectos estéticos de los fractales. Este es un proceso que no es inmediato si no que requiere de investigación por parte de didáctas de la Matemática.

Desde el seno mismo de la Matemática la definición formal de fractal se resiste a ser establecida; por lo tanto, parece que en la escuela secundaria tampoco es razonable perseguir ese mismo fin. Como se mostró, no es posible colocar todo lo que se "parezca" a un fractal bajo una misma etiqueta. Sin embargo, una forma posible de aproximarse al concepto siendo fiel a su raíz matemática, es mediante sus propiedades constitutivas: la dimensión fractal y la autosemejanza.

En particular, en este trabajo el foco estuvo en la autosemejanza. Encontrar que en escasas investigaciones se ocupan de proponer un trabajo matemático cuyo resultado permita a los estudiantes conocer si una figura tiene o no autosemejanza, superando las ideas intuitivas de copias idénticas, motiva a trabajar sobre este aspecto desarrollando intervenciones didácticas con este objetivo.

Por otro lado, si bien la mayoría de los artículos destacan la aplicabilidad de los fractales en varias disciplinas, en ninguno de ellos se percibe el diseño de actividades interdisciplinares. Posiblemente esto también sea una consecuencia de la poca presencia de procesos genuinamente matemáticos que se realiza con estas figuras, casi sin sobrepasar los aspectos figurativos y estéticos de los fractales.

De acuerdo con los resultados de esta revisión, parece importante trabajar en el diseño de actividades de enseñanza que vinculen la GF con procesos de límite y con la aproximación a la noción de infinito, por un lado, y con la noción de autosemejanza como forma de desarrollar competencias para el reconocimiento de patrones y los procesos de generalización, por otro.

Esta necesidad es la que motivó a los autores para abordar el proceso de la transposición didáctica que ya generó el diseño de una secuencia de actividades sobre GF basada en el diseño de antenas pre-fractales multibanda. En estos momentos se lleva a cabo su revisión por parte de pares, lo que permitirá mejorar su implementación en el aula y diseñar un dispositivo para la evaluación de los aprendizajes asociados con esta intervención.

Referencias

[1] BOLTE, L. *A snowflake project: calculating, analyzing, and optimizing with the Koch Snowflake.*, Mathematics Teacher. 95(6), 414-418, 2002.

[2] CANIBAÑO, M.; SASTRE, P. y GANDINI, M. *Ideas para enseñar dimensión fractal en la enseñanza secundaria*. Unión. (28), 191-196, 2011.

[3] CHEN, S.; HERRON, S.; DING, J. y MOHN, R. *Assessing United States and Chinese secondary mathematics teachers` interest in fractal geometry*. Journal of mathematics education. 11(2), 17-34, 2018.

[4] CHEVALLARD, Y. *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado*. Editorial AIQUE, 1999.

[5] COMAS, J. y HERRERA, M. *Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria*. Suma. 65, 23-32, 2010.

[6] CONSEJO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. *Programa del curso de Matemática I para 3er año de bachillerato, opción Matemática y diseño, plan reformulación 2006*, https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/6to%20matematica%20diseño/mat1matdise6.pdf

[7] DIRECCIÓN GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES. *Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior,* 2010. http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/sexto/materias%20comunes/matematica_6.pdf

[8] DORADO, C. y MALDONADO, J. *Enseñanza de las ciencias físicas a estudiantes de primaria y secundaria por medio de sencillos talleres científicos*. LAPJE. 4(2), 415-421, 2010.

[9] DRAKOPOULOS, V. y PANAGIOTIS-VLASIOS, S. *Teaching Recursion to Junior-High School Students by Using Fractals: A Complete Lesson Plan in Python.* American Journal of Education and Information Technology, 4(2), 50-55, 2020.

[10] FACCIO, T. *Aprendizajens Matemáticas a partir da construccion de fractais*. Relato de Experiencia. 5-48, 2013.

[11] FALCONER, K. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applicationes.* Wiley, Segunda Edición, UK, 2003.

[12] FIGUEIRAS, M.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. *Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales.* Suma. (35), 45-55, 2000.

[13] FUSI, F. y SGRECCIA, N. *¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría.* Épsilon, 105, 31-50, 2020.

[14] GARBIN, S. *La problemática fractal: un punto de vista cognitivo con interés didáctico. Paradigma.* 28(2), 79-108, 2007.

[15] KARAKUS, F. *Assesing Grade 8 Elementary School Mathematics Curriculum and Textbooks within de Scope of Fractal Geometry.* Elementary Education Online. 10(3),1081-1092, 2011.

[16] KARAKUS, F. *A Cross-Age Study of Student´s Understanding of fractals*. Bolema. 27(47), 829-846, 2013.

[17] KARAKUS, F. y KARATAS, I. *Secondary School Students' Misconceptions about Fractals.* Journal of Education and Human Development. 3(3), 241-250, 2014.

[18] KARAKUS, F. *Investigation into how 8th Grade Students Define Fractals.* Educational Sciences: Theory & Practice. 15(3), 825-836, 2015.

[19] KARAKUS, F. y BAKI, A. *Pre-Service Teacher´s Concept Images on Fractal Dimension.* International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17(2), 1-12, 2016.

[20] LOPEZ, J., SALVADOR, J. y FERNANDES, I. *O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolucao de problemas.* Revista Eletronica de Educacao, 7(3), 47-62, 2013.

[21] MORENO, P. *Un sierpinski en la fachada*. Épsilon. (96), 45-60, 2017.

[22] MORENO, J. *Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales.* Suma. (40), 91-104, 2002.

[23] MORENO, J. *El juego del caos en la calculadora gráfica*. Suma. (41), 69-79, 2002.

[24] MORENO, J. *Triángulos y tetraedros fractales*. Suma. (44), 13-24, 2003.

[25] NOVAK, J. y GOWIN, B. Aprendiendo a aprender, Barcelona, Martínez Roca, 2004.

[26] PEITGEN, H., JÜRGENS, H. y SAUPE, D. *Chaos and Fractals. New Frontiers or Science.* Second Edition. Springer, New York, EEUU, 2004.

[27] PEREIRA, T., y BORGES, F. *A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisao bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos*. Acta Scientiae (Vol.19), n. 4, 2017.

[28] PICOLI, A. y PINTO, J. *Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de una oficina pedagógica.* Thema. 15(4), 1594-1561, 2018.

[29] PINTO, J. y DESCONSI, A. *Teorema de Pitágoras e o fractal árvore pitagórica: um experimento no ensino fundamental.* Brazilian Journal of Education, Technology and Society. 11(3), 444-457, 2018.

[30] PUERTO, J. *El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabri. "Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-Variacional.* Revista Científica. Edición especial. 737-741, 2013.

[31] REDONDO, A y HARO, M. *Actividades de geometría fractal en el aula I.* Suma. (47), 19-28, 2004.

[32] REDONDO, A. y HARO, M. *Actividades de geometría fractal en el aula II*. Suma. (48), 15-21, 2005.

[33] REZENDE, V.; MORAN, M.; MÁRTIRES, T. y CARVALHO, F. *O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio.* Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. 11(2), 160-171, 2018.

[34] RUBIANO, G. *Iteración y fractales (con Mathematica).* Vicerrectoría Académica, Colombia, primera edición, 2009.

[35] SABOGAL, S. y ARENAS, G. *Una introducción a la geometría fractal.* Universidad Infustrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

[36] SARDELLA, O.; ZAPICO, I. y BERIO, A. *Fractales: una nueva mirada en la enseñanza de la geometría. Números.* (65), 14-20, 2006.

[37] SHRIKI, A. *Fractals in the Mathematics Classroom: The Case of Infinite Geometric Series.* Learning and teaching mathematics. (20), 38-42, 2016.

[38] SOUZA, P., ALVES, R. y BALTHAZAR, W. *A simple and didactic method to calculate the fractal dimension – an interdisciplinary tool.* ArXiv (sometido a Physics), 2018.

[39] SPINADEL, V. *Geometría Fractal y Geometría Euclideana.* Educación y Pedagogía, 15(35), 85-91, 2002.

[40] VITABAR, F. *Imágenes fractales con GeoGebra*. Unión. (24), 161-175, 2010.

[41] YILDIZ, A.; y BALTACI, S. *Reflections from the Lesson Study for the Development of Techno – Pedagogical Competencies in Teaching Fractal Geometry*. European Journal of educational research. 6(1), 41-50, 2017.

Sobre los autores:
Nombre: María Victoria Artigue Carro
Correo Electrónico: maria.artigue@ucu.edu.uy
Institución: Universidad Católica del Uruguay, Consejo de Educación Secundaria, Uruguay

Nombre: María de los Ángeles Fanaro
Correo Electrónico: mariangelesfanaro@gmail.com
Institución: Núcleo de Estudios Educacionales y Sociales. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina

Nombre: Eduardo Lacués
Correo Electrónico: elacues@gmail.com
Institución: Universidad Católica del Uruguay desde 1987 a 2020