Polo del Conocimiento

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9
Septiembre 2021, pp. 1519-1544
ISSN: 2550 - 682X
DOI: 10.23857/pc.v6i9.3125

Coloración de Grafos y su aplicación a la Geografía

Graph coloring and its application to Geography

Coloração gráfica e sua aplicação à Geografia

Luis Fernando Carrasco-Pilco [I]
f.carrasco@colegiorudolfsteiner.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-7389-774X

Vinicio Edmundo Burgos-Cevallos [II]
v.burgos@colegiorudolfsteiner.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-2614-9343

Gloria Alejandra Flora Jurado-Liberona [III]
gjurado@letort.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-3603-6377

Emily Naomi Nymoen-Bonilla [IV]
em.nymoen@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4094-9993

Correspondencia: f.carrasco@colegiorudolfsteiner.edu.ec

Ciencias de la Educación

Artículo de revisión

***Recibido:** 25 de julio de 2021 ***Aceptado:** 30 de Agosto de 2021 *** Publicado:** 09 de septiembre de 2021

I. Ingeniero Mecánico-Magíster en Enseñanza de la Matemática MEDMAT, Docente de Matemáticas Análisis y Enfoques Colegio Internacional Rudolf Steiner, Examinador de Matemáticas para el Bachillerato Internacional, Quito, Ecuador.

II. Ingeniero Químico-Magister en Educación, mención Pedagogía en entornos digitales, Coordinador Área de Ciencias del Colegio Internacional Rudolf Steiner, Examinador de Física para el Bachillerato Internacional, Quito, Ecuador.

III. Licenciada en Ciencias de la Educación, Docente de Social Studies, History and Philosophy del Colegio Letort, Quito, Ecuador.

IV. Estudiante, Investigadora Independiente, Quito, Ecuador.

Resumen

La presente investigación sobre la Coloración de Grafos, establece que cualquier mapa puede ser coloreado únicamente con cuatro colores. Se desarrolla con cuatro de los métodos conocidos en la demostración del Teorema de los Cuatro Colores. Expone una introducción con la historia que hay detrás del teorema, describe los parámetros y nociones con los que se va a desarrollar, se da una explicación de la metodología a seguir para cada algoritmo, permitiendo encontrar la coloración en el mapa del Ecuador, aplicando los métodos de: Coloración Secuencial Básico, de Welsh y Powell, de Matula, Marble e Isaacson y el de Brelaz. Por último, se hace una evaluación mediante una matriz que considera como parámetros de medición: la representación final del mapa, eficacia del teorema, optimización del tiempo de resolución y la facilidad de resolución, concluyendo con la efectividad de los algoritmos de estudio.

Palabras clave: Grafo; algoritmos de coloración; teoría de grafos; teorema de los cuatro colores; mapa del Ecuador.

Abstract

The present investigation on the Coloring of Graphs, establishes that any map can be colored only with four colors. It is developed with four of the known methods in the proof of the Four Colors Theorem. It presents an introduction with the history behind the theorem, describes the parameters and notions with which it will be developed, an explanation of the methodology to be followed for each algorithm is given, allowing to find the coloration on the map of Ecuador, applying the methods of: Basic Sequential Staining, Welsh and Powell, Matula, Marble and Isaacson and Brelaz. Finally, an evaluation is made by means of a matrix that considers as measurement parameters: the final representation of the map, efficiency of the theorem, optimization of the resolution time and the ease of resolution, concluding with the effectiveness of the study algorithms.

Keywords: Graph; coloring algorithms; graph theory; theorem of the four colors; map of Ecuador.

Resumo

A presente investigação sobre Coloração Gráfica estabelece que qualquer mapa pode ser colorido com apenas quatro cores. É desenvolvido com quatro dos métodos conhecidos na prova do Teorema das Quatro Cores. Dá uma introdução com a história por detrás do teorema, descreve os parâmetros e noções com os quais será desenvolvido, é dada uma explicação da metodologia a seguir para cada algoritmo, permitindo encontrar a coloração no mapa do Equador, aplicando os métodos de: Coloração sequencial básica, de Galês e Powell, de Matula, Mármore e Isaacson e a de Brelaz. Finalmente, é feita uma avaliação através de uma matriz que considera como parâmetros de medição: a representação final do mapa, a eficiência do teorema, a optimização do tempo de resolução e a facilidade de resolução, concluindo com a eficácia dos algoritmos de estudo.

Palavras-chave: Gráfico; algoritmos de coloração; teoria dos gráficos; teorema das quatro cores; mapa do Equador.

Introducción

La presente investigación establece un estudio comparativo sobre algunos de los algoritmos de Coloración de Grafos, actualmente existen varios estudios y aplicaciones sobre el tema, sin embargo, ¿cómo sabemos cuál es la más apropiada para colorear grafos en el área de la geografía? ¿cuál resulta más rápido? ¿y el más eficiente? la propuesta mantiene como objetivo general comparar, evaluar y verificar la efectividad de los algoritmos de coloración secuencial básico, de Welsh y Powell, de Matula, Marble e Isaacson y el de Brelaz.

La indagación parte en el problema del palomar, investigándolo más a profundidad, se encuentra con los Números de Ramsey, para posteriormente, encontrar información sobre la Teoría de Grafos, encontrando el Problema de Coloración de Grafos y el Teorema de los Cuatro Colores.

Este estudio se aborda: primero, la historia y el origen del tema propuesto, además de mencionar el marco teórico, donde se dan nociones básicas que son necesarias de entender antes de poder entrar al desarrollo del estudio. Cabe recalcar que dentro del marco teórico también se brindan especificaciones breves sobre el Teorema a comprobar y, de igual manera, sobre el mapa seleccionado. Segundo, en la metodología se explica la teoría de los cuatro algoritmos propuestos, además de dar razones de la manera y los criterios con los que éstos serán evaluados. Tercero, se presenta el desarrollo y resultado de cada uno de los algoritmos, con sus respectivas ilustraciones. Cuarto, se encuentra la evaluación y análisis de los mismos. Y, sus conclusiones respectivas.

Estado del Arte

En el siglo XVIII, Leonhard Euler plantea el Problema de los siete puentes de Königsberg, actualmente, Kaliningrado, este consistía en encontrar una forma de que, cruzando una sola vez por cada uno de los puentes, se pudiera regresar al punto de partida inicial. La respuesta a dicho problema, resuelto en el año 1736, por él mismo, es que no existe ningún posible recorrido que cumpla dichas características. En su demostración, representó cada puente como una línea uniendo dos puntos, cada uno de los cuales correspondía a una zona diferente. Considerado éste como el primer grafo de la historia.

Así, en 1852, Francis Guthrie, quien fue alumno de de Augustus De Morgan en la University College de Londres, le enseña a su hermano Frederick, sus avances sobre la coloración de mapas, buscando demostrar, coloreando un mapa de los condados de Inglaterra, que sólo cuatro colores eran necesarios para asegurar que todos aquellos que se encontraban adyacentes tuvieran colores diferentes, para hacérselo llegar a De Morgan, quien no pudo ofrecer una respuesta concreta a sus dudas.

Han sido varios los matemáticos de prestigio quienes trataron de dar una demostración lógica para la Conjetura de los Cuatro Colores, hasta que, en 1879, Alfred Bray Kempe, abogado de Londres que había estudiado matemáticas en Cambridge, anuncia en Nature, que encontró dicha demostración. Ese mismo año, Cayley, quien había sido profesor suyo, le sugiere presentar el Teorema obtenido en la revista American Journal of Mathematics.

Sin embargo, en 1890, Percy John Heawood publica un contraejemplo a la demostración de Kempe, con lo que el Teorema volvía a ser considerado Conjetura.

Finalmente, en el año 1976, los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken demostraron que no puede existir ninguna configuración en un contraejemplo mínimo del Teorema de los Cuatro Colores. Su demostración fue basada en la reducción de configuraciones, haciendo uso de las Cadenas de Kempe, lograron reducir el número de configuraciones del conjunto inevitable a 1936, que fueron comprobados individualmente con ayuda del ordenador. Es así como éste se convierte en el primer teorema cuya demostración se realizó con la ayuda de la tecnología sin haber podido ser verificada por otros pensadores matemáticos.

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

Marco Teórico

Este tema en particular ha permitido y brindado a la comunidad matemática distintos modelos y formas de solucionar varios problemas de una manera eficiente. Así surgen diversas cuestiones, subtemas, ramas de la Teoría de Grafos, un ejemplo de ello son los Números de Ramsey, la Coloración de Grafos, entre otros.

En el presente estudio, se trabajará sobre la Coloración de Grafos, de éste se derivan problemas en todas las áreas posibles, en la historia, en la pedagogía, manufactura, transporte y demás. Se desarrollará el tema aplicado al área de la Geografía, específicamente en la Coloración de mapas.

Para empezar, ¿qué es la Coloración de Grafos? Es una rama de la Teoría de Grafos, cuyo objetivo principal es asignar colores, números enteros e incluso letras, a los vértices de un grafo, tal manera que no se comparta la misma variable entre dos vértices adyacentes, se lo puede aplicar de igual manera para las aristas o caras de un grafo plano.

Nociones Básicas

Se presentan una serie de definiciones y conceptos relacionados a la Coloración de Grafos que son necesarios para el entendimiento y la comprensión de este trabajo.

Vértices: Conocidos también como nodos o nudos, son elementos base para la formación de un grafo. Definidos, en la Teoría de Grafos, como unidades indivisibles, y sin propiedades distinguidas, a pesar de que pueden tener estructuras adicionales dependiendo de la utilización del grafo del que son parte. Los vértices tienen grados, que se basan en el número de aristas que contienen al vértice ***v***. Por ende, si el valor del grado equivale a **0**, entonces, se trata de un vértice aislado.

- Un vértice aislado es aquel que no incide en ningún lado.
- Dos vértices son adyacentes si existe una arista que los une.

(*Iniesto Díaz, 2012, pág. 3); (Palacios Somohano, 2003, pág. 5); (Álvarez Núñez & Parra Muñoz, 2013)*

Arista: Las aristas son parte de los elementos fundamentales de un grafo. Son identificadas por un par único de vértices, están definidas como las uniones entre los mismos, dependiendo del uso del grafo, éstas denotan relaciones tales como el orden, la herencia, etc.

Entre sus propiedades están que no es obligatoria la existencia de una arista entre dos vértices, es decir, que la relación entre un par de vértices y aristas no tiene porqué producirse, dependiendo del tipo y uso del grafo. Además, éstas pueden tener asignado un sentido, según el grafo a analizar. *(Iniesto Díaz, 2012); (Alvarado, J. 2021)*

Grafo: Un grafo es un par de conjuntos, $\boldsymbol{G = (V,A)}$, donde $\boldsymbol{V}$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices y $\boldsymbol{A}$ es un conjunto finito de pares no ordenados de vértices de $\boldsymbol{V}$, llamados aristas, ambos relacionados mediante la aplicación $\boldsymbol{T}$, donde $\boldsymbol{T = V \rightarrow A}$.

Esta definición corresponde al tema de Recorridos Eulerianos, debido a que existen otras dos clasificaciones: los Circuitos Hamiltonianos y los Árboles, que contienen a otras dos clasificaciones: los Circuitos Hamiltonianos y los Árboles, que contienen a otro tipo de grafos y definiciones que no se ajustan al tema de análisis.

Existen varios tipos de grafos, a continuación, se expondrán los más importantes.

- Grafo dirigido: También llamado dígrafo, es aquel grafo en el que la relación entre los elementos considera su dirección, la relación $\boldsymbol{T}$ no es simétrica. Se caracterizan porque cada arista tiene una dirección asignada, expresada como: $\boldsymbol{a = u \rightarrow v}$. Su relación se expresa de la siguiente manera: $\boldsymbol{(u,v)}$ **6=** $\boldsymbol{(v,u)}$.
- Grafo no dirigido: Son llamados grafos, éste no contempla dirección de sus aristas, su principal característica es que sus aristas son pares no ordenados de vértices, lo que significa que la relación $\boldsymbol{T}$ entre ellos es simétrica, es decir, en un grafo $\boldsymbol{G = (V,A)}$ entonces, $\boldsymbol{(u,v) = (v,u)}$.
- Grafo completo: Un grafo $\boldsymbol{G}$ es completo si cada vértice tiene un grado igual a $\boldsymbol{(n-1)}$, siendo $\boldsymbol{n}$ el número de vértices que componen el grafo. Además, presentan una arista entre cada par de vértices del grafo, es decir que todos los vértices son adyacentes. Esto proporciona un conjunto $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{m = \frac{n(n-1)}{2}}$ aristas. Siendo $\boldsymbol{m}$ el número de aristas del conjunto $\boldsymbol{A}$.
- Grafo conexo: Decimos que un grafo es conexo si consiste de una sola pieza.
- Grafo inconexo: Si consiste de varios pedazos, a los que se les llama componentes.
- Grafo regular: Un grafo cuyos vértices tienen el mismo grado o valencia.

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

- Multígrafo: Es aquel grafo en donde dos vértices se pueden conectar por más de una arista.
- Grafo simple: Es aquel que no tiene bucles ni lazos, y tampoco es un multígrafo.
- Grafo trivial: Un grafo vacío con un único vértice.
- Grafo vacío: Grafo cuyo conjunto de aristas es vacío.
- Grafo plano: Son aquellos que pueden ser representados en el plano, sin que ningún par de aristas se corten o se crucen entre sí. *(Iniesto Díaz, 2012, págs. 4, 5); (Palacios Somohano, 2003, págs. 5-7); (Álvarez Núñez & Parra Muñoz, 2013); (Patiño Avedaño & Guillermo Charry, 2013, pág. 47); (Morales Galindo, 2016); (Lazo, J. & León, D. 2020)*

Teorema de los Cuatro Colores

El teorema establece, que un mapa plano es coloreable como mínimo con cuatro colores de tal manera que dos regiones adyacentes no tengan el mismo color. También que el número cromático de cualquier grafo planar es menor o igual a cuatro, que es lo que se va a buscar demostrar haciendo uso del mapa del territorio ecuatoriano. *(Bombal, Fernando. 2017); (Flores Muñoz, 2012, p. 26); (Álvarez Núñez & Parra Muñoz, 2013); (Patiño Avedaño & Guillermo Charry, 2013, p. 53); (Pena Seijas, 2017, p. 7)*

Mapa del Ecuador

Se decidió probar el teorema en base al mapa político del Ecuador actual, donde se encuentran incluidas las provincias de Santa Elena y Santo Domingo de los Tsáchilas. En la Ilustración 1[1], se observa la imagen base seleccionada para el estudio pertinente.

Ilustración 1: Mapa Político Actual del Ecuador

[1] *Nota.* Adaptado de *Mapa del Ecuador-Provincias y Capitales* [Fotografía], por Christian Andrade, 2015, NOTICIASEC (https://noticiasec.com/provincias-y-capitales-del-mapa-de-ecuador/) Copyright 2018.

Fuente: Andrade Christian, 2015

Para que el grafo pueda ser exactamente igual, se van a considerar a las capitales de todas las provincias como los vértices del grafo. Es importante recalcar, que no se va a tomar en cuenta la región insular, correspondiendo a las Islas Galápagos, por lo que el número de vértices a tratar será *23.*

Metodología

Algoritmos de Coloración

La coloración, como se mencionó anteriormente se dará en los vértices del grafo, se le asignará a cada vértice un color, de tal manera que aquellos que sean adyacentes tengan distintos colores. Toda la información sobre los algoritmos que será presentada a continuación proviene del Trabajo de fin de carrera de Iniesto Díaz y Delgado Núñez (2012), tanto de la página web, aplicación y el documento académico.

Algoritmo de Coloración Secuencial Básico

Este algoritmo parte de una ordenación de los vértices, se asigna el mínimo color posible a los vértices siguientes. Por ende, si se quiere colorear un vértice ***(v)***, una vez asignado numéricamente los colores, se asigna a ***(v)*** el color que no aparece entre los asignados a los vértices adyacentes ya coloreados.

Entrada: Una ordenación de los vértices de un grafo ***G***

Salida: Una coloración de los vértices

Paso 1: Asignar el color 1 al vértice (v_1)

Paso 2: Si hemos coloreado $v_1, v_2, ..., v_k$ con j colores, asignamos a $v_k + 1$ el color t donde $t \leq j + 1$ es el mismo color permitido para $v_k + 1$, según los colores ya asignados a sus vecinos.

Algoritmo de Coloración de Welsh y Powell

Algoritmo también conocido como ´´primero el de mayor grado´´. Por lo que, en este algoritmo los vértices se ordenan de acuerdo a sus grados, de mayor a menor.

Se ordena de forma que $d(v_1) \geq d(v_2)... \geq d(v_n)$, donde $d(v)$ representa el grado del vértice.

Algoritmo de Coloración de Matula, Marble, Isaacson

Es una variable del algoritmo secuencial básico, que también se la conoce como ´´ El de menor grado el último´´. En este algoritmo los vértices se ordenan en orden inverso. Se elige a (v_n) como el vértice de menor grado, luego se elige a v_{n-1} como el vértice de menor grado en $G-\{v_n\}$ y así continúa, se examinan los vértices de menor grado, eliminándolos del grafo.

Algoritmo de Coloración de Brelaz

Para este algoritmo se tendrá en consideración, aparte del grado del vértice, la suma de los grados de los vecinos de cada vértice y los colores que ya han sido asignados a esos vértices adyacentes.

Se definirá al grado de color de un vértice v como el número de colores usados en los vecinos de (v). El orden dependerá del grado y del grado de color.

Entrada: Un grafo G.

Salida: Una coloración de los vértices de G.

Paso 1: Ordenar los vértices en orden decreciente de grados.

Paso 2: Coloreamos un vértice de grado máximo con el color 1.

Paso 3: Seleccionamos un vértice, aún sin colorear, con grado de color máximo. Si hay varios, elegimos el de grado máximo.

Paso 4: Colorear el vértice seleccionado en el paso 3 con el menor color posible.

Paso 5: Si todos los vértices se han coloreado, FIN. En caso contrario, volver al paso 3. (*Iniesto Díaz & Delgado Núñez, Aplicación Integral de Grafos: Coloración y Búsqueda, 2012); (Iniesto Díaz, Aplicación Integral de Grafos: Coloración, 2012).*

Criterios a evaluar

Se exponen los criterios esenciales en la efectividad de los algoritmos en base a la información anterior basados en la presentación final del mapa siendo los siguientes: Eficacia del teorema, Optimización de tiempo de resolución, Facilidad de resolución.

Resultados

Graficación del Mapa

Primeramente, se editó la Ilustración 1, añadiendo un 40% de transparencia, un 58% de contraste y se restó un 7% de brillo con el fin de poder realizar más fácil el grafo manualmente. En la Ilustración 2, se observa el grafo sin digitalizar. Para ello, se imprimió la imagen base, y se fueron conectando las capitales de cada provincia, que servirán como vértices, con cada una de las provincias vecinas, si existía un borde en común por más minúsculo y mínimo que fuera, se añadía una arista entre dichas provincias.

Ilustración 2: Graficación Digital del Mapa

Fuente: Autores, 2021

La digitalización del grafo obtenido de manera manual, denominado como Ilustración 3. Con la aplicación de Visio, se trabajó en la imagen para, con ayuda de la herramienta Elipse, colocar los puntos que representarían a los vértices, y con la herramienta de Líneas, conectando los puntos, teniendo como guía la graficación manual realizada previamente.

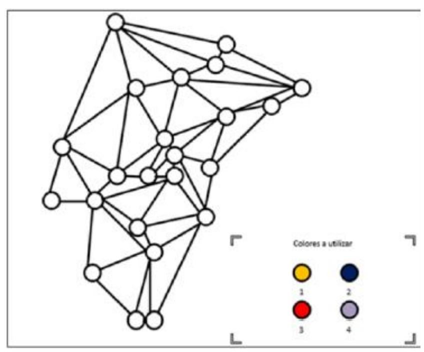
Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

Ilustración 3: Graficación Manual del Mapa

Fuente: Autores, 2021

Se puede observar, en la Ilustración 4, el grafo digital obtenido que servirá como base para trabajar, en donde ya se encuentran establecidos los colores a utilizar.

Ilustración 3: Grafo Base



Fuente: Autores, 2021

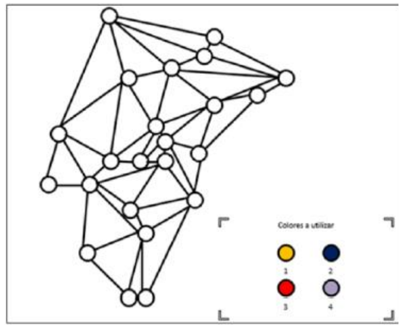
Aplicación de los Algoritmos

Una vez establecido el grafo y los colores a utilizar, se realizará la aplicación de los distintos métodos de coloración de vértices previamente expuestos.

Algoritmo de Coloración Secuencial Básico

Para este algoritmo, se numeraron los vértices sin ningún orden en específico, como se observa en la Ilustración 5.

Ilustración 5: Grafo en Blanco de Algoritmo de Coloración Secuencial Básico



Fuente: Autores, 2021

Se procederá a colorear los vértices en el orden de los colores a utilizar, planteado en cada una de las ilustraciones. Primero el amarillo, luego el azul, siguiendo con el rojo y finalizando con el color lila.

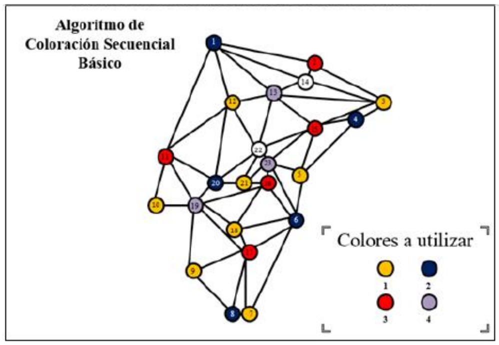
Teniendo en cuenta que el orden de coloración de los vértices es el siguiente:

5; 12; 4; 7; 3; 20; 10; 9; 15; 1; 18; 6; 11; 2; 8; 13; 17; 14; 16; 22; 21; 23; 19

Por ello se puede observar como el vértice **5**, se pinta de amarillo, debido al orden de colores establecido, el vértice **12**, que sigue en el orden, al no ser adyacente al vértice **5**, se lo pinta de amarillo igual. Mientras que, el cuatro, al ser adyacente al 5, debe ser pintado del color que sigue, en este caso, el azul.

El grafo coloreado obtenido, en la Ilustración 6. Muestra los vértices **14** y **22** no fueron coloreados, debido a que no se podían colorear con los colores propuestos, ya que eran adyacentes a todos ellos, por ello se los mantiene con el color base. Dando por resultado una **5-coloración.**

Ilustración 6: Coloración Secuencial Básico



Fuente: Autores, 2021

Algoritmo de Coloración de Welsh y Powell

Para este algoritmo, primero se analiza el grado de los vértices. En la Ilustración 7, se observa el número de los vértices establecido anteriormente.

Por ejemplo, observando la Ilustración 8, está centrado el vértice **1**. Se puede observar que éste tiene **5** aristas, es decir, **5** conexiones con otros vértices, por lo que el grado del vértice 1, resultaría en ser 5. Dadas las uniones que comparte con los vértices **2, 11, 12, 13 y 14**.

Ilustración 7: Grafo para la Coloración Welsh y Powell

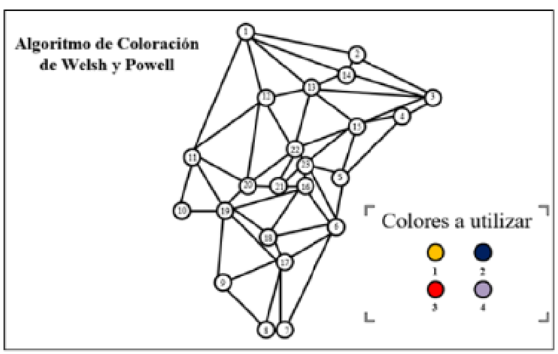
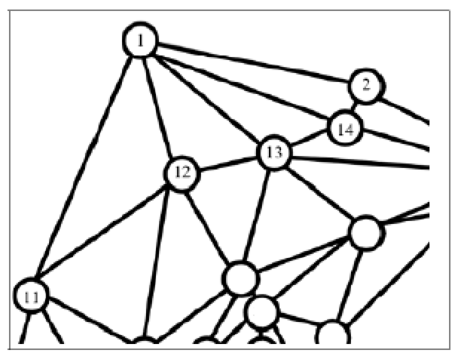


Ilustración 8: Explicación Grado de Vértice



Fuente: Autores, 2021

En la Tabla 1, se evidencian cada uno de los vértices y su respectivo grado, mismo que se obtiene al contabilizar las aristas o conexiones que tienen.

Tabla 1: Grados de los vértices de la Coloración Welsh y Powell

N^o **de vértices**	**Grado del Vértices**
1	5
2	3
3	5
4	3
5	4
6	6
7	3
8	3
9	3
10	2
11	5
12	5
13	6
14	4
15	6
16	5
17	6
18	4
19	7
20	5
21	4
22	6
23	6

Fuente: Autores, 2021

Se procederá a ordenar los vértices de mayor a menor con relación al grado, dado a que existen varios vértices que contienen el mismo valor del grado, éstos se mantendrán en orden secuencial, como se muestra, en la Tabla 2. Esto, para determinar el orden en que tendrá la coloración.

Tabla 2: Grados de los vértices de la Coloración Welsh y Powell

***N*º de vértices**	**Grado del Vértices**
19	7
6	6
13	6
15	6
17	6
22	6
23	6
1	5
3	5
11	5
12	5
16	5
20	5
5	4
14	4
18	4
21	4
2	3
4	3
7	3
8	3

9	3
10	2

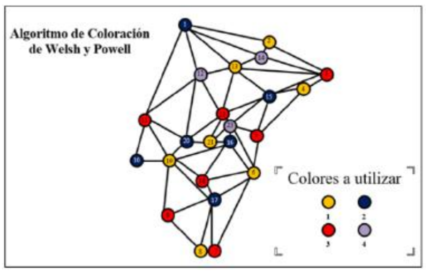
Fuente: Autores, 2021

Por lo que el orden a colorear correspondería al siguiente:

19; 6; 13; 15; 17; 22; 23; 1; 3; 11; 12; 16; 20; 5; 14; 18; 21; 2; 4; 7; 8; 9; 10

En la Ilustración 9, se muestra la **4-coloración obtenida.**

Ilustración 9: Coloración Welsh y Powell.

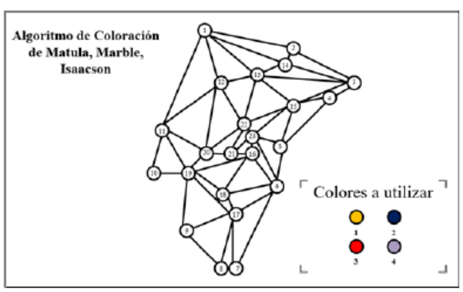


Fuente: Autores, 2021

Algoritmo de Coloración de Matula, Marble, Isaacson

Para este algoritmo, se utilizó la misma tabla de grados, expuesta previamente en la Tabla 1. Además, como se evidencia en la Ilustración 10, se mantiene la misma numeración de vértices.

Ilustración 10: Grafo para la Coloración Matula, Marble e Isaacson



Fuente: Autores, 2021

Se tabula el orden de los números, como se indica en la Tabla 3, todos aquellos con el mismo grado de vértice eran seleccionados, y los números de los vértices eran ordenados de manera decreciente. De esta manera, se mantiene el algoritmo del vértice con menor grado va al último, y se hace un seguimiento al algoritmo planteado ordenando de esta manera los vértices.

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

Tabla 3: Grados de los vértices de coloración Matula, Marble, Isaacson

Nº de vértices	Grado del Vértices
19	7
23	6
22	6
17	6
15	6
13	6
6	6
20	5
16	5
12	5
11	5
3	5
1	5
21	4
18	4
14	4
5	4
9	3
8	3
7	3
4	3
2	3
10	2

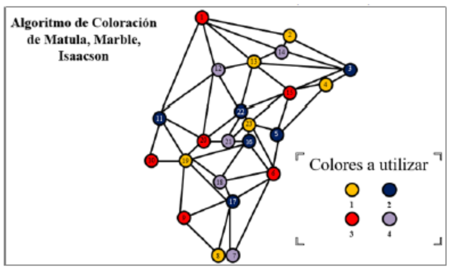
Fuente: Autores, 2021

Por lo que el orden correspondiente para esta Coloración es el siguiente:

19; 23; 22; 17; 15; 13; 6; 20; 16; 12; 11; 3; 1; 21; 18; 14; 5; 9; 8; 7; 4; 2; 10

En la Ilustración 11, se muestra la **4-coloración** obtenida.

Ilustración 11: Grafo para la Coloración Matula, Marble e Isaacson



Fuente: Autores, 2021

Algoritmo de Coloración de Brelaz

Para este algoritmo no va a haber un orden especificado con anterioridad, sino que se irá ordenando según se vaya desarrollando el grado de color de los vértices, sin embargo, como se observa en la Ilustración 12, la numeración de los vértices se mantiene.

Como la investigación previa lo plantea, primeramente, se selecciona uno de los vértices con grado más alto, en este caso se utilizó el vértice **19**, y a partir de ello se buscaba los vértices que tenían mayor grado de color, en caso de haber varios, se seleccionaba el que tenía mayor grado de vértice, y en caso de tener el mismo también, se usaba aquel que tenía mayor número de vértice.

Una vez coloreado el vértice **19**, se busca el vértice que tiene mayor grado de color, al ser el comienzo, todos los vértices adyacentes a **19**, tienen grado de color **1**, mientras que el resto, **0**. El grado de color se refiere al número de vértices adyacentes a éste que se encuentren coloreados. Por ello, recurrimos a colorear aquel que tenga mayor grado de vértice, en este caso, el vértice número **17**. Ahora, se buscan aquellos vértices cuyo grado de color sea **2**, en este caso, los vértices **9** y **18**, como ambos tienen el mismo grado de color, se analiza el grado del vértice, como **18** tiene mayor grado, ese es el siguiente en ser coloreado, después del vértice **18**, se colorea el vértice **9**. Y se sigue el mismo procedimiento expuesto anteriormente.

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

En la Ilustración 13, se muestra de manera general el procedimiento mencionado, con el fin de entender mejor el desarrollo del algoritmo, observando además el orden de coloración en la Tabla 4.

Ilustración 12: Grafo para la Coloración Brelaz

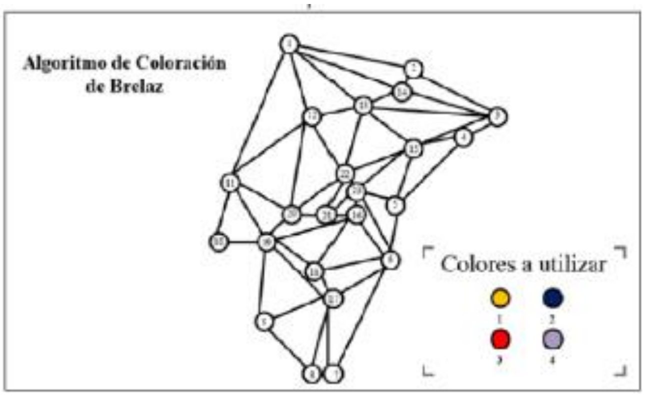
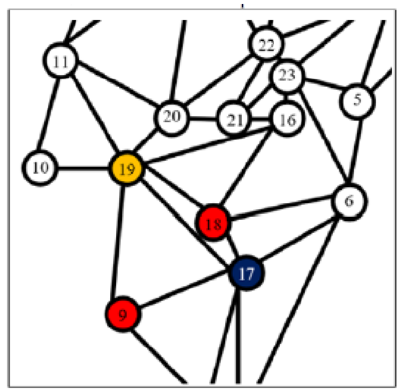


Ilustración 13: Coloración 4 Primeros Vértices



Fuente: Autores, 2021

Tabla 4: Datos utilizados y recolectados para la Coloración Brelaz

Nº de vértices	Grado del Vértices	Grado de color	Orden
19	7	0	1
6	6	2	5
13	6	2	13
15	6	2	9
17	6	1	2
22	6	2	10
23	6	2	7
1	5	3	16
3	5	3	18
11	5	3	15
12	5	3	14

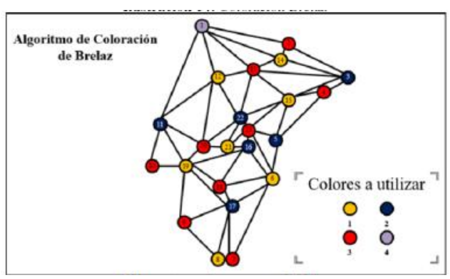
Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

16	5	3	6
20	5	3	12
5	4	2	8
14	4	2	17
18	4	2	3
21	4	3	11
2	3	3	19
4	3	3	20
7	3	2	21
8	3	3	22
9	3	2	4
10	2	2	23

Fuente: Autores, 2021

Se puede observar, en la Ilustración 14 que, con este algoritmo, se obtuvo, de igual manera, una **4-coloración.**

Ilustración 14: Coloración Brelaz



Fuente: Autores, 2021

En la Ilustración 15[2] , se observa el mapa político del Ecuador, en blanco para poder colorearlo y en la Ilustración 16, se muestra el mapa del territorio ecuatoriano, coloreado como se obtuvo en la Ilustración 14, previamente visualizada aplicando el algoritmo de coloración de Brelaz.

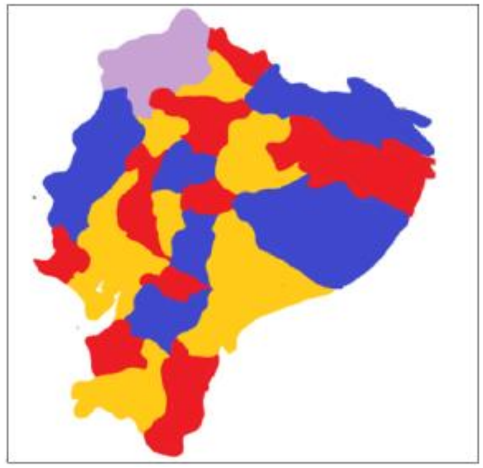
---

[2] *Nota.* Adaptado de *Mapa de Ecuador para Colorear (IMPRIMIR)*. [Fotografía], 2016, Información Ecuador. (https://informacionecuador.com/mapa-politico-de-ecuador-para-colorear-pintar/)

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

Ilustración 15: Mapa Político en Blanco

Ilustración 13: Mapa Coloreado del Ecuador



Fuente: Autores, 2021

Análisis de resultados

Se realizará la evaluación de todos los grafos tanto individualmente como en conjunto, para tener una visión completa de los resultados del presente estudio. Considerando los criterios establecidos: La presentación final del mapa *(C1)*, Eficacia del teorema *(C2)*, Optimización de tiempo de resolución *(C3*) y Facilidad de resolución *(C4).*

La manera en que serán evaluados los grafos será mediante una especie de calificación, donde los criterios se evaluarán con el porcentaje de importancia dentro de la investigación para poder finalizar con un 100% de recomendación de uso del algoritmo, en caso de cumplir todos los parámetros. Cabe recalcar, nuevamente, que estos se plantearon en función a la información expuesta en el marco teórico de la presente investigación.

En la Tabla 5, se muestra la matriz de evaluación desarrollada, donde se exponen el resultado esperado, el obtenido y el valor asignado a cada criterio correspondiendo a la evaluación individual. Además, se incluye el promedio de eficacia total de los algoritmos, que corresponde a la evaluación general de los mismos.

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

Tabla 5: Matriz de Evaluación

Descriptores	(C_1) **Es visualmente atractivo, los colores tienen relación con el origen del grafo.** **0-10**	(C_2) **Una 4-coloración que demuestra el teorema de los 4 colores.** **0 – 50**	(C_3) **Tiempo de resolución corto.** **0 – 25**	(C_4) **Nivel de resolución fácil, tanto de realizar como de entender.** **0 - 15**	**Total**
Secuencial Básico	Cumple con el descriptor. **10**	No se cumplió el teorema, debido a que hubo dos puntos que no podían ser coloreados con los colores establecidos. **0**	Cumple con el descriptor. **25**	No existe exigencia alguna en cuestión a la comprensión y aplicación del algoritmo. **15**	**50/100**
De Walsh y Powell	Existe un equilibrio con la cantidad de vértices coloreados con cada uno de los colores especificados. **10**	Se cumple a cabalidad el teorema. **50**	Se demora únicamente en ordenar los datos, en caso de saber usar herramientas o aplicaciones como Excel, no tomará demasiado tiempo. **23**	Existe cierta complicación debido a que para facilitar el procesamiento de datos se requiere de una aplicación adicional. **13**	**96/100**
De Matula, Marble, Isaacson	Existe un equilibrio con la cantidad de vértices coloreados con cada uno de los colores especificados. **10**	Se cumple a cabalidad el teorema. **50**	Se demora únicamente en ordenar los datos, en caso de saber usar herramientas o aplicaciones como Excel, no tomará demasiado tiempo. **23**	Existe cierta complicación debido a que para facilitar el procesamiento de datos se requiere de una aplicación extra, en caso de saber manejar las herramientas, no existe ninguna dificultad añadida.	**96/100**

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

				Inclusive, al trabajar con los datos del algoritmo anterior, se facilita el proceso aún más. **13**	
De Brelaz	No existe un equilibrio entre la cantidad de vértices coloreados como en los algoritmos anteriores. **8**	Se cumple a cabalidad el teorema. **50**	El tiempo de resolución fue mayor, debido a que no existe un orden de coloración establecido previamente, sino que se colorea según como se avance y se analice en el grafo los grados de color, los grados de los vértices y demás. **20**	La facilidad de resolución de este algoritmo es levemente más complicada, debido a que es necesario el uso de Excel para la organización de datos y el de la coloración en general. Puede resultar confuso el cómo se resuelve y se colorea, requiere de una lectura comprensiva y de un conocimiento ligeramente más complejo del tema tratado. **10**	**88/100**
Promedio de eficacia total (%)					**82, 50**

Fuente: Autores, 2021

Considerando la evaluación expuesta, los mejores algoritmos resultan ser: el propuesto por De Welsh y Powell y el propuesto por De Matula, Marble sin embargo, todas resultan en un buen promedio de recomendación.

Conclusiones

Se puede concluir indicando que, dentro de la presente investigación la mayoría de los algoritmos presentados cumplen con los criterios, parámetros y expectativas propuestas.

Se ha podido demostrar la veracidad del Teorema de los Cuatro Colores, debido a que es un tema sumamente interesante y todavía investigado por las mentes más brillantes. Lo que pudo afectar para que no se cumpliera el teorema en el algoritmo Secuencial Básico pudo haber sido el orden, debido a que no existe un orden específico y puede variar infinitamente.

Sin embargo, mientras disminuye la posibilidad de variabilidad y se sigue un patrón o conceptos bases, es más fácil que se cumpla el teorema, como es el caso del algoritmo de Brelaz. Debido a la evaluación realizada, se podría decir que los mejores algoritmos corresponden al de Walsh y Powell, y la de Matula, Marble e Isaacson por el equilibrio existente entre las variables y criterios.

A pesar de ello, la que consideraría más eficiente, es la Brelaz, debido a que existe un mayor control sobre las variables y, por tanto, se asegura con mayor probabilidad de que la coloración se cumpla a cabalidad.

Para el presente trabajo se determinó que el número cromático sería 4, debido al objetivo de demostrar el Teorema de los Cuatro Colores. Sin embargo, no se niega el que la coloración pueda ser menor, como mínimo se alcanzaría una 3-coloración debido a la cantidad de vértices, al estar hablando de 23 vértices, resulta complejo determinar que el número cromático pueda ser menor. Por lo que, se deja abierto el espacio para un análisis pertinente sobre el menor número cromático alcanzable con 23 vértices. Cabe recalcar que, se necesita de la ayuda tecnológica, principalmente debido a las posibles maneras de ordenar los vértices, ya que éstas pueden resultar en números infinitos.

Sin embargo, cabe tener en cuenta que se considera este punto, dado a que, dentro de los resultados, se obtuvo una 5-coloración.

Pol. Con. (Edición núm. 62) Vol. 6, No 9, Septiembre 2021, pp. 1519-1544, ISSN: 2550 - 682X

Referencias Bibliográficas

1. Alvarado, Jorge. (2021). *Comparación con grafos de programas de pregrado de estudio en informática del Perú*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima-Perú. https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.1992

2. Álvarez Núñez, M. y Parra Muñoz, J. (2013). *Teoría de Grafos*. Chillán, Chile Universidad de Bio-Bio. Obtenido de: http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/12345679/1953/3

3. Andrade, C. (2015). *Provincias y Capitales del Mapa de Ecuador*. Ecuador: NOTICIASEC. Obtenido de:
4. https://noticiasec.com/provincias-y-capitales-del-mapa-de-ecuador/

5. Blanco, R. y García, M. (2019). *Actividades con grafos para estudiantes con altas capacidades*. Universidad de Colombia. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8(2), pp. 92-108. http://www.edma06.es/index.php/edma0-6/issue/arch

6. Bombal, Fernando. (2017). *Matemática, Lógica y Operadores*. La Gran Alianza. XIX Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. Vol. 109, Nº. 1-2, pp 59-72.

7. Flores Muñoz, K. (2012). *Implementación de una heurística para resolver el problema de coloramiento de grafos aplicado a la planificación de horarios de una institución educativa*. Escuela Superior Politécnica del Litoral, Instituto de Ciencias Matemáticas. Guayaquil: ESPOL. Obtenido de Tesis: https://www.dspace.espol. edu.ec/retrieve/100843/D-CD102684.pdf

8. Iniesto Díaz, A. (2012). *Aplicación Integral de Grafos: Coloración*. (U. P. Madrid, Ed.) Obtenido de Tesis de Fin de Grado: http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/iagraph/documents/TFC %20Coloracion.pdf

9. Iniesto Díaz, A., & Delgado Núñez, J. (2012). *Aplicación Integral de Grafos*. Coloración y Búsqueda. Obtenido de http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/iagraph /coloracion.html

10. Lazo, J. y León, D. (2020). *Análisis comparativo entre los procesos de diseño gráfico tradicional y generativo para la creación de elementos de comunicación visual*. Universidad del Azuay. http://dspace.uazuay.edu.ec/handle/datos/9972

11. Morales Galindo, K. (2016). *Matemáticas Discretas*. Recuperado el 2020, de 6.1.2 Tipos de Grafos: https: //sites.google.com/site/matematicasmoralesgalindo/6-1-elementos-y-caracteristicas-de-los-grafos/6-1-2tipos-de-grafos-simples-completos-bipartidos-planos-conexos.

12. Palacios Somohano, D. (2003). *Híbrido MST-20pt para la Solución del Problema del Agente Viajero*. (U. d. Puebla, Ed.) Obtenido de Tesis profesional: http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/doc umentos/lis/palacios_s_d/capitulo2.pdf

13. Patiño Avedaño, B. y Guillermo Charry, Ó. (2013). *La enseñanza de la Teoría de Grafos como estrategia para desarrollar procesos de matematización*. (U. S. Arboleda, Ed.) Obtenido de Tesis de Maestría: https://repository.usergioarboleda.edu.co/bitstream/handle/11232/844/La%20*ense*%*C* 3%*B*1*anza*

14. %20*de*%20*la*%20*teor*%*C*3%*ADa*%20*de*%20*grafos*%20*como*%20*estrategia*.%20*procesos*%20*de*%20*matematizaci*%*C*3%*B*3*n*.*pdf*?*sequence* = 2& isAllowed=y

15. Pena Seijas, S. (2017). *El Problema de Coloración de Grafos*. (U. d. Compostela, Ed.) Obtenido de Tesis de Maestría: http://eamo.usc.es/pub/mte/descargas/ProyectosFinMaster/Proyecto_1463.pdf