RECIBIDO EL 16 DE NOVIEMBRE DE 2020 - ACEPTADO EL 15 DE FEBRERO DE 2021

PROCESOS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA Y MODELACIÓN ESTADÍSTICA EN TIEMPOS CONTEMPORÁNEOS: SIMILITUDES Y DIFERENCIAS

MATHEMATICAL MODELING AND STATISTICAL MODELING PROCESSES IN CONTEMPORARY TIMES: SIMILARITIES AND DIFFERENCES

Rosa Virginia Hernández[1]

Universidad Francisco de Paula Santander

Colombia

RESUMEN

El presente documento pretende mostrar similitudes y diferencias entre Modelación Matemática y Modelación Estadística en tiempos contemporáneos, con el propósito de proporcionar criterios en la selección de contenidos de referencia e implementar escenarios de aprendizaje apropiados e, incluso, diseñar secuencia de actividades permanentes que le permitan al estudiante adquirir la capacidad de construir el conocimiento científico. Para ello, se lleva a cabo un estudio documental de carácter crítico-interpretativo que permitió avanzar en el estado del arte en el que se destaca la gran evidencia de teorías y aportes investigativos en todos los niveles educativos hacia la Modelación Matemática y la Modelación Estadística. Se concluye sobre la diversidad de concepciones entre la Modelación

1 Magister en Educación Matemática. Licenciada en Matemáticas y Computación. Profesora adscrita al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander (Cúcuta). Correo. rosavirginia@ufps.edu. Orcid: /orcid.org/0000-0002-2638-671X

Matemática y la Modelación Estadística, partiendo de los significados de palabras como modelo, modelado, matematización, modelaje, modelización y modelación.

PALABRAS CLAVE:

Modelo, Modelación Matemática, Modelación Estadística, Educación.

SUMMARY

This paper aims to show similarities and differences between Mathematical Modeling and Statistical Modeling in contemporary times, with the purpose of providing criteria in the selection of reference contents and implementing appropriate learning scenarios and even designing a sequence of permanent activities that allow students to acquire the ability to build scientific knowledge. For this purpose, a critical-interpretative documentary study is carried out, which allowed to advance in the state of the art, highlighting the great evidence of theories and research contributions at all educational levels towards Mathematical Modeling and Statistical Modeling. It is concluded on the diversity of conceptions between Mathematical Modeling and Statistical Modeling, starting from the meanings of words such as mathematization, model and modeling.

KEYWORDS:

Model, Mathematical Modeling, Statistical Modeling, Education.

INTRODUCCIÓN

La inclusión de modelos y modelación matemática (MM) como área de investigación en la enseñanza de las ciencias se produjo inicialmente durante el decenio de 1980 (Gilbert y Justi, 2016). Sin embargo, en la enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles educativos, la MM ha sido poco abordada (Rodgers, 2010). Desaprovechando oportunidades que posibiliten la posible adaptación de esta actividad científica de tal manera, que se convierta en estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos en el aula de clase (Villa-Ochoa, 2007).

Para Spandaw (2011) los investigadores matemáticos, **aún persisten en la** creencia de que la MM debe ir precedida de la enseñanza de la matemática básica y del conocimiento del contexto, limitándose solo a estudiantes de formación en el programa de licenciatura en matemáticas. De modo similar, Higueras y García (2011) argumentan que existen pocos investigaciones centradas en clarificar y aumentar el conocimiento científico sobre las metodologías involucradas en procesos de modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por parte de los docentes. No siempre se presenta un marco suficientemente claro y transparente que ayude a entender qué prácticas pedagógicas y que discursos están detrás de los enfoques de MM (Campbell, Oh, Maughn, Kiriazis y Zuwallack, 2015).

Los términos modelo y modelación en educación matemática son temas de interés en reuniones científicas como la International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), la International Conference in Mathematics Education (ICME), en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en la Asian Technology Conference in Mathematics y en la Reunión Latinoamericana de Matemáticas (RELME), entre otras (Ramos-Rodríguez, 2014). De las cuales han encontrado, dentro del marco de la discusión internacional sobre MM, la falta de una comprensión homogénea de antecedentes epistemológicos que permitan establecer pautas sistemáticas para un desarrollo curricular en la educación matemática (Kaiser y Sriraman, 2006). Esto puede deberse a que la MM en el salón de clases es loable y esto, a su vez, puede interferir de manera negativa si los profesores al utilizarla no tienen la formación adecuada para hacerlo (Gaisman, 2009).

Por otro lado, la estadística ha sido, es y será una herramienta imprescindible que ha hecho aportes importantes en el desarrollo de la humanidad. Su objetivo principal se centra en recopilar información de carácter cualitativo o cuantitativo de individuos, grupos, hechos o fenómenos, reduciéndolos a partir del análisis de datos para obtener respuestas a problemas reales, además de hacer inferencias acerca del comportamiento de estos fenómenos (Toapanta-Toapanta, Pérez-Narváez y Lema-Yungan, 2018). Reconocer que la enseñanza aprendizaje de la estadística debe ser considerada como una actividad de modelación y no como un conjunto de teoremas matemáticos que deducen una serie de axiomas no es una tarea sencilla (Batanero, 2001). La base epistemológica de la estadística ha dejado de ser un conjunto de procedimientos, aplicados de forma mecánica, y se ha desplazado hacia la construcción y evaluación de modelos estadísticos y científicos (Rodgers, 2010)

En este escenario surge el concepto de Modelación Estadística (ME) como un caso particular de la MM (Del Pino y Estrella, 2012). Se espera que esta sea implementada en la enseñanza aprendizaje de la estadística proporcionando criterios para la selección de contenidos de referencia, implementación de escenarios de aprendizaje apropiados e, incluso, para el diseño de secuencia de actividades, o ciclos de aprendizaje, coherentes que van más allá de la memorización, fórmulas o algoritmos (Pfannkuch, Ben-Zvi y Budgett, 2018).

Se puede conjeturar que la MM constituye un marco de referencia para el diseño e implementación de propuestas de aula para la enseñanza aprendizaje de la estadística en estudiantes de educación superior; por lo anterior surge las siguientes preguntas ¿Qué es la ME? y ¿Qué relación tiene con la MM?

Para abordar dichas preguntas, el presente documento se centró en el estado del arte de los constructos MM y ME, fundamentado en una metodología de investigación cualitativo-documental de carácter crítico-interpretativo que permitieron realizar el estudio de conocimientos de la educación en tiempos contemporáneos con el propósito de contextualizar, clasificar y categorizar los balances teóricos en torno a la MM y la ME.

Desarrollo. Se abordan los constructos MM y ME como fundamento de estudio para desarrollar un estado del arte que permita entender la relación y diferencia hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la estadística en todos los niveles educativos. Antes de ello, profundizaremos en un concepto base para ambos, el de modelo matemático.

MODELO MATEMÁTICO

A partir de la década de 1960, surge la necesidad de aclarar la distinción entre el sujeto del mundo real y el sujeto del mismo mundo. Esta observación lleva a la definición de modelo como una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, o de un sistema de relaciones, o de un proceso evolutivo derivado de una descripción. Y desde una teoría formal, un modelo es una representación simbólica de ciertos aspectos de un objeto o fenómeno del mundo real, es decir, una expresión o fenómeno de una fórmula escrita según las reglas del sistema simbólico del que procede esta actuación. Por lo tanto, un modelo puede representarse en diferentes sistemas de signos: imágenes, patrones, lenguajes o simbolismos, inscritos en diferentes registros de representaciones, más o menos isomórficos (Henry, 1997). Para Lehrer y Shauble (2010), un modelo matemático es como una analogía que estandariza y representa, predice y elabora fenómenos en el mundo.

El modelo matemático se puede definir como una ecuación o conjunto de ecuaciones que simulan de manera aproximada la relación estímulo-respuesta de un sistema de reglas semánticas que permiten interpretar el cálculo matemático formal y abstracto (Hartmann, 2008; Knuuttila, 2005a; Morrison, 2007). En los estándares para la práctica de las matemáticas definen el modelo como el proceso de seleccionar y utilizar las matemáticas a través de una simplificación de la realidad que se expresa en un lenguaje simbólico tomando la forma de ecuaciones, algoritmos, relaciones gráficas e incluso párrafos (Anhalt, Staats, Cortez y Civil, 2018). Es decir, los modelos matemáticos funcionan como artefactos externos que pueden expresarse de diferentes modos para desarrollar el pensamiento, mientras que su construcción y manipulación apoyan el desempeño de varias funciones epistémicas (Gilbert y Justi, 2016).

Un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones, operaciones algebraicas, gráficos, etc., que representan las interconexiones en un sistema, y se puede trabajar a mano o con un ordenador. Las ecuaciones están escritas en términos de objetos matemáticos (Muthuri, 2009). Los modelos matemáticos articulan principalmente los aspectos estructurales de los sistemas conceptuales que se describen utilizando datos cuantitativos (y a menudo cualitativos) y cumplen criterios específicos (Grant, 2012); es decir, los modelos matemáticos deben ser compatibles y modificables para que puedan ser utilizados para construir, explicar, predecir o controlar sistemas en el contexto (Lesh y Doerr, 2003). Un modelo matemático tiene cuatro componentes:1) Un conjunto de nombres para el objeto y los agentes que interactúan con él, así como para cualquier parte del objeto representado en el modelo. 2) Un conjunto de variables descriptivas (o descriptores) que representan propiedades del objeto. 3) Ecuaciones del modelo, describiendo su estructura y evolución temporal. 4) Una interpretación que relaciona las variables descriptivas con las propiedades de algún objeto que el modelo representa (Hestenes, 1987).

Estas concepciones de modelo matemático se construyen desde y para la matemática. Aun así, el modelo matemático debe ser internamente consistente conduciendo a predicciones de un solo valor sobre cómo se comporta la naturaleza bajo un conjunto específico de circunstancias (Johnston y Aldridge, 1985). Esta relación entre modelo matemático y la realidad está en el corazón de toda ciencia que involucra las matemáticas, por lo tanto, la forma en que se ve esta relación tiene fuertes implicaciones en cuanto a la percepción de mundo y las interpretaciones de los resultados científicos (Hennig, 2010). Por lo tanto, Rodgers (2010) define dos características de un modelo matemático: 1) Un modelo coincide con la realidad que describe en algunos aspectos importantes y 2) un modelo es más sencillo que esa realidad.

Un ejemplo de modelo matemático es el relacionado con la epidemia COVID-19 que se desarrolló en Wuhan a finales del año 2019. La ecuación (figura 1) representa la población total en una región cerrada, la variable es el tiempo de: casos susceptibles , casos insusceptibles , casos expuestos (infectados pero aún no infecciosos, en un periodo latente), casos infecciosos (con capacidad infecciosa y que aún no están en cuarentena), casos en cuarentena (confirmados e infectados), casos recuperados y casos cerrados (o fallecidos); los coeficientes representan la tasa de protección, la tasa de infección, el tiempo medio de latencia, el tiempo medio de cuarentena, la tasa de curación y la tasa de mortalidad caracterizado por un conjunto de ecuaciones deferenciales ordinarias (Peng, Yang, Zhang, Zhuge y Hong, 2020).

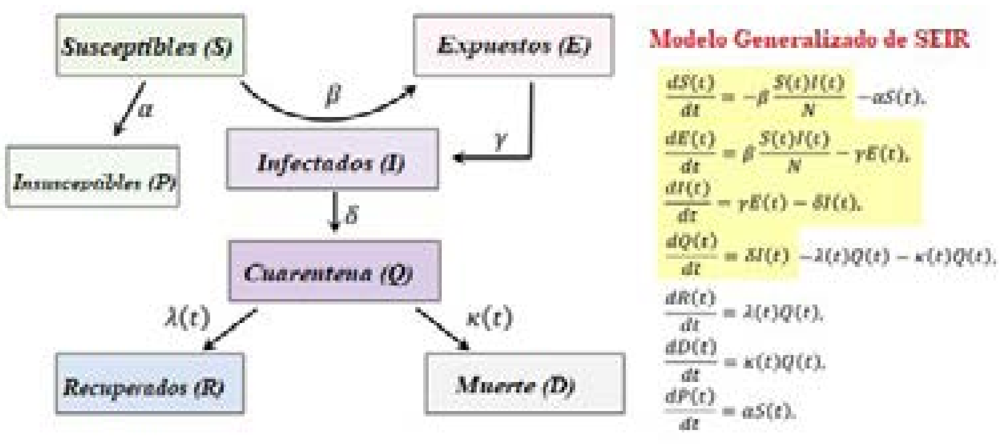

Figura 1. Ejemplo de modelo matemático. Epidemia COVID-19.
Tomado de Peng, Yang, Zhang, Zhuge y Hong(2020, p. 4)

La figura 2, presenta las definiciones de modelo matemático plateados por Villa-Ochoa (2007), a través de algunos elementos que permiten reflexionar sobre el proceso de modelación como estrategia didáctica para abordar la construcción de conceptos matemáticos en el aula de clase.

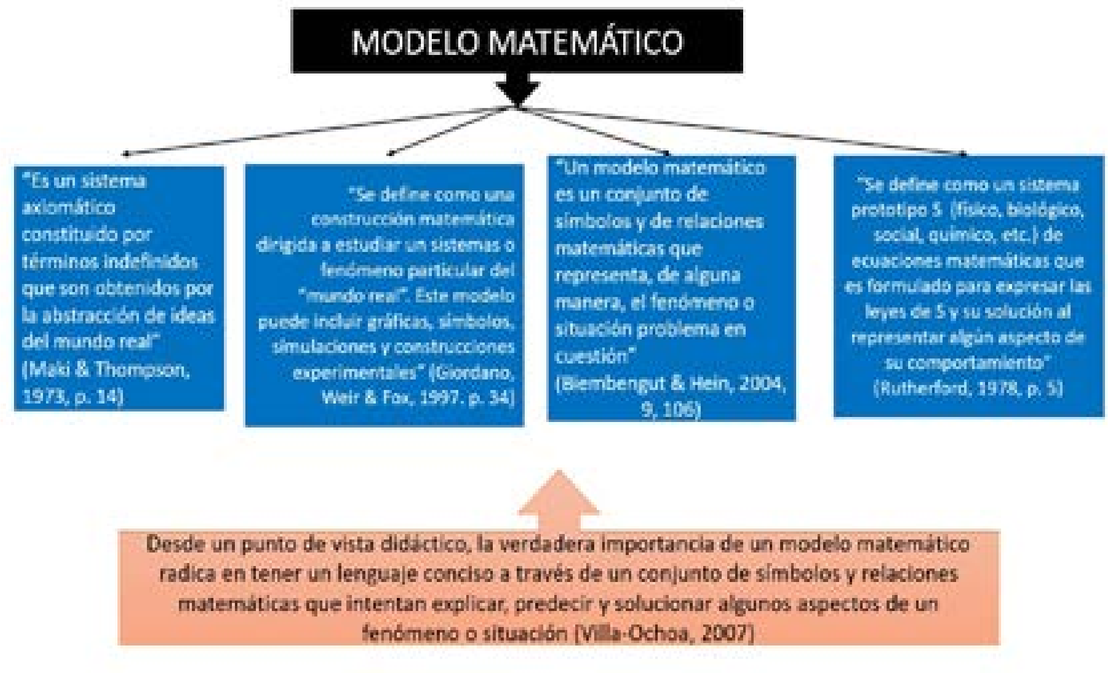

Figura 2.Concepto de Modelo Matemático. Fuente: (Villa-Ochoa, 2007)

Para Hestenes (2010), los modelos matemáticos son unidades básicas de conocimiento coherentemente estructurado, a partir de las cuales se pueden hacer inferencias lógicas, predicciones, explicaciones, planes y diseños. Proporcionando una ventana estructural de procesos de pensamiento científico y matemático a través de: 1) una representación de la estructura de un modelo mental y 2) la representación de un modelo conceptual; siendo el modelo conceptual la estructura de un sistema determinado que pueden ser un conjunto de objetos relacionados: reales o imaginarios, físicos o mentales, simple o compuesto. A menudo se identifica el modelo con su representación a través de una inscripción concreta de palabras, símbolos o figuras como gráficos, diagramas o esquemas. Por lo tanto, los modelos científicos y matemáticos se consideran modelos conceptuales. La figura 3, representa la triada de elementos que definen un modelo científico.

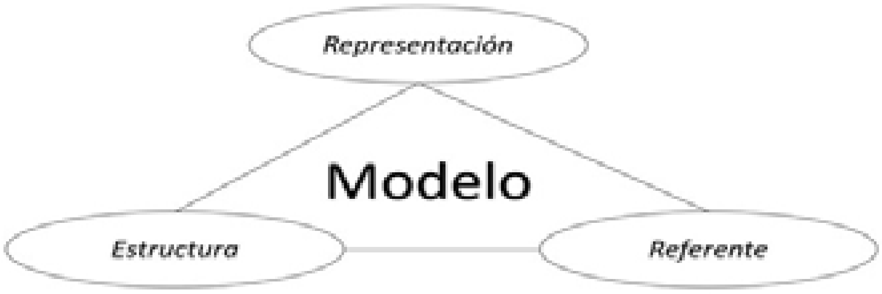

Figura 3. Forma simbólica de un modelo científico (Hestenes, 2010)

La Figura 4, muestra ejemplos de los cuatro componentes que propone Hestenes (1987) como modelo matemático: 1) Un conjunto de nombres para el objeto y los agentes que interactúan con el modelo. 2) Un conjunto de variables descriptivas que representan propiedades del objeto. 3) Ecuaciones del modelo, describiendo su estructura y evolución temporal. 4) Una interpretación que relaciona las variables de algún objeto que el modelo representa.

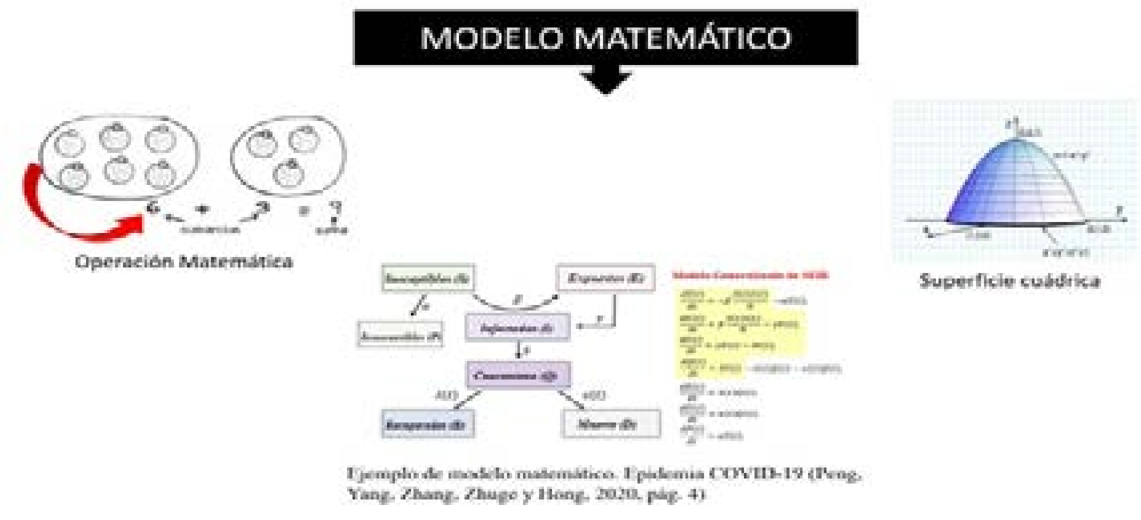

Figura 4. Ejemplos de modelos matemáticos

MODELACIÓN MATEMÁTICA (MM)

En educación matemática, se cuenta con los términos modelación matemática y modelamiento matemático, dependiendo de la zona donde se trabaja (anglosajones o latinoamericanos, por ejemplo) (Ramos-Rodríguez, 2014). En este documento asumiremos estos términos como similares, resguardando las diferencias que puedan existir de acuerdo al contexto de uso. Para abordar la pregunta "¿Qué es la modelación matemática?" es entonces quizás útil primero considerar las preguntas «¿Qué es el modelaje y modelado?" El modelaje es el arte o el proceso de construcción de una representación matemática de la realidad que captura, simula o representa características o comportamientos de ese aspecto de la realidad que es el modelo (Cai, y otros, 2014). Hein (2006), define modelado como el proceso involucrado en la elaboración de un modelo. Este proceso del modelaje para este autor es la definición del problema traducido en elementos palpables como: objetivos (variables de decisión o control) y niveles de detalle. La MM puede definirse como el proceso de matematizar, interpretar y generalizar situaciones de la vida real o sistemas complejos (Lingefjärd, 2002).

Lesh y Doerr (2003) definen MM como un proceso de producción de herramientas conceptuales compartibles, modificables y reutilizables para describir, predecir y controlar situaciones de la vidad real. Para Hestenes (2010), la MM trata de la investigación de las implicaciones de las formas de pensado en la realidad; es decir, se requiere expresar construcciones informales de la realidad de una manera formal y por lo tanto cambia su percepción (su aparición en la realidad social y personal). Barbosa (2004), considera la MM en el aula al desarrollo de actividades escolares que se les ofrece a los estudiantes bajo las cuales son invitados a actuar en función investigativa y los ámbitos que abarca la realidad matemática; contribuyendo el estudiante a desafiar la ideología de la certeza y poner lentes críticos a las aplicaciones de las matemáticas para adquirir la capacidad de comprender el papel socio cultural de las matemáticas, ampliando la posibilidad de construir y consolidar sociedades demócratas.

La MM según Blomhøj (2008), puede ser entendida como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Es decir, se hace referencia a matematizar la realidad a través de un modelo cuando determinados hechos y sus conceptos se expresan en términos y relaciones matemáticas abstractas (Rico, 2009). Así, la MM proporciona a los estudiantes problema suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el concepto del fenómeno en cuestión (Gaisman, 2009).

En la literatura podemos encontrar diversidad de autores que presentan la MM como un ciclo que requiere ciertas fases. La MM en la enseñanza es la que cada estudiante pueda elegir un tema de algún área de su interés, hacer una investigación al respecto, proponer cuestiones y, bajo la orientación del profesor elaborar un modelo matemático. El proceso de MM involucra una serie de temas como: el reconocimiento de situaciones problema, delimitación del problema, familiarización con el tema que va a ser modelado, hipótesis, resolución del problema a partir del modelo y evaluación. Con la aplicación de la MM, se espera propiciar para el alumno: integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento; interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad; mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos; capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones –problemas; estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas; habilidad en el uso de la tecnología; capacidad para actuar en grupo; orientación para la realización de la investigación y capacidad para la redacción de esa investigación (Biembengut y Hein, 2004).

Un modelo cíclico de MM es propuesto por Borromeo-Ferri (2010), quien lo define bajo una perspectiva cognitiva a través de una representación real de una situación mientras los estudiantes leen y comprenden una tarea determinada; lo que significa que los individuos validan sus resultados sobre las fases del conocimiento extra matemático quien representa un modelo real adecuado de la situación dada como conexión de los resultados con la realidad para demostrar que la validación puede ocurrir no sólo con la representación mental, sino también con la tarea estructurada. El ciclo de MM propuesto por la autora se representa en la figura 5.

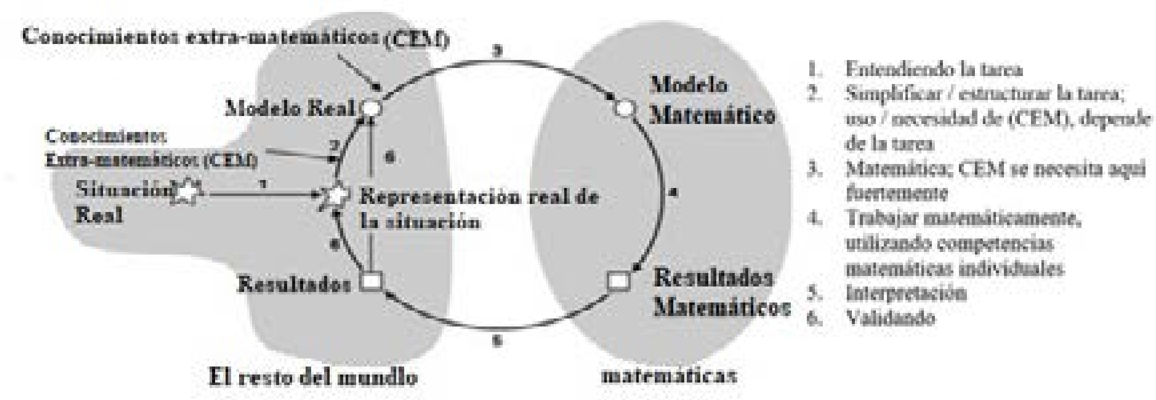

Figura 5. Ciclo de modelado bajo una perspectiva cognitiva. (Borromeo Ferri, 2010)

Para este trabajo se considerará uno de los denominados "modelos didácticos o pedagógicos", presentado por Blum (1996) y Kaiser (1995), que se ilustra en la Figura 6.

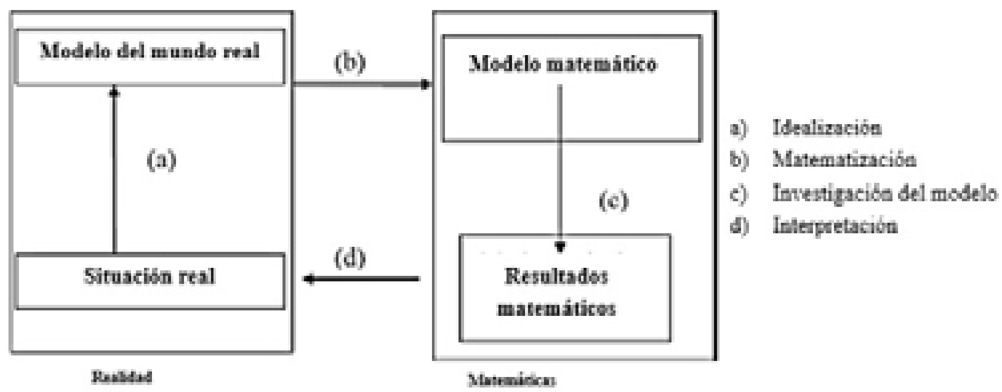

Figura 6. Ciclo de Modelación Matemática (Kaiser, 1995)

Este ciclo de modelación, es una herramienta significativa para modelar en clases de matemáticas bajo un punto de vista didáctico y pedagógico, debido a los cuatro pasos claramente organizados (Borromeo, 2018). Además, ha sido usado como herramienta para promover las competencias de la modelación, y la comprensión de estudiantes de secundaria, preparatoria y universidad (Blum 2015; Maaß 2006), logrando exitosos resultados.

Con fines didácticos, Hestenes (2010) plantea cuatro fases principales para desarrollar modelación matemática: la primera es la construcción o desarrollo del modelo, en la que se incorpora el diseño de un modelo conceptual por parte del profesor a través del uso de herramientas que le permita al estudiante construir un modelo científico complejo y coherente de cualquier situación real. La segunda es el análisis de modelos, esta etapa se ocupa de extraer información de un modelo, como una explicación física o una predicción experimental, o simplemente la respuesta a una pregunta sobre los objetos modelados. Tercera fase es la validación del modelo, consiste en evaluar la idoneidad del modelo para caracterizar el sistema o proceso investigado. Esto puede implicar el diseño y la realización de un experimento para probar alguna predicción del modelo. O puede implicar la evaluación de la coherencia del modelo con los resultados teóricos o los hechos experimentales de otras partes de la comunidad científica. Los estudiantes aprenden en esta fase a incluir respuestas claras a dos preguntas: ¿Qué es un modelo y qué tal funciona? Y la cuarta fase es el despliegue del modelo, consiste en adaptar un modelo desarrollado en un contexto para caracterizar sistemas o procesos a otro contexto diferente. Esto sirve para sensibilizar a los estudiantes al hecho de que los modelos representan estructuras universales que pueden adaptarse a la modelación en un número esencialmente limitado de situaciones.

MODELO ESTADÍSTICO

Carrión (2000), desarrolla un recuento histórico como se muestra en la figura 7, partiendo del astrónomo y naturista Adolphe Quetelet (1796-1874), quien fue uno de los pioneros en la revolución estadística (cognitiva) al elaborar modelos estadísticos explicando aquello a lo que se intenta dar sentido, de los cuales la media y la distribución normal serían los dos primeros, utilizándolos con intenciones modelizadoras, tratando de incluir en ese par de fórmulas estadísticas la diversidad (de alturas, pesos, etc.) que se observan en el mundo y cuantificar las regularidades reduciéndolas a una fórmula estadística. Sin embargo, el surgimiento de los modelos estadísticos se puede identificar en el planteamiento del método de estimación de mínimos cuadrados, cuya autoría se acredita a Gauss, en el siglo XVIII (Ojeda, 2004).

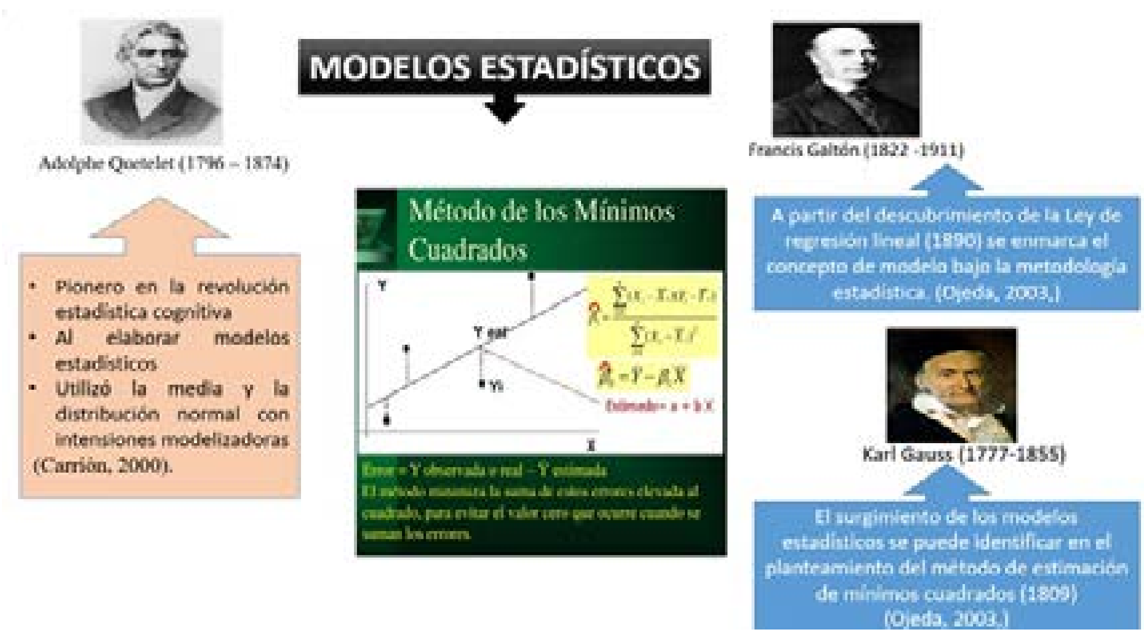

Figura 7. Recuento histórico de modelo estadístico

El modelo estadístico proporciona un referente y un lenguaje común para discutir el sistema y su estructura, incluye tanto los objetivos como sus relaciones; incorporando el método, la creación de significado y las actividades culturales que lo rodean (Font, Godino, y D'Amore, 2007; Hestenes, 2010; Makar y Allmond, 2018). Por otra parte, McCullagh (2002) define modelo estadístico como un conjunto de distribuciones de probabilidad en el espacio de una muestra. Sin embargo, para Del Pino y Estrella (2012) un modelo estadístico es como una ecuación matemática que contiene variables que pueden usarse para explicar las relaciones entre otras variables, utilizando pruebas de hipótesis, intervalos de confianza, muestreos, espacios de probabilidad, suposiciones, diagnósticos, etc. para inferir y validar hipótesis. Además, las características de un modelo planteadas por Hestenes (2010) y Doerr, Delmas y Makar (2017) incluyen: (1) simplicidad para minimizar las relaciones superfluas o vacías al enfocarse en aspectos del fenómeno que le importó al modelador y disminuir el resto; (2) generalización, al capturar la estructuras que se pueden utilizar; y (3) aplicabilidad, crear un modelo como una forma útil para dar sentido al mundo a través de aplicaciones o problemas auténticos.

Otra postura sobre modelos estadísticos es presentada por Moore (1999) quien afirma que los modelos que usan los estadísticos en realidad son modelos matemáticos. El autor, describe el papel de los modelos matemáticos en el proceso de análisis de datos al pasar de la visualización gráfica a las medidas numéricas de aspectos específico de los datos para compactar modelos matemáticos como un patrón general que puede ser analizado en cuatro etapas, 1) se comienza por graficar e interpretar los datos; 2) se buscan patrones generales y desviaciones significativas de esos patrones para explicar el contexto del problema; 3) se eligen las descripciones numéricas apropiadas sobre la base del análisis de los datos; 4) si el análisis de los datos es suficientemente regular, se busca un modelo matemático compacto para ese patrón.

Para Rodgers (2010), existen dos papeles diferentes para los modelos estadísticos; el primero es un marco de comparación de modelos basado en la aplicación de métodos estadísticos existentes como el Análisis de Varianza (ANOVA) y el Modelo de Ecuaciones Estructurales, utilizados y aplicados por los investigadores que estudian y desarrollan modelos utilizados y aplicados para el análisis del comportamiento. El segundo implica el desarrollo de modelos matemáticos que se ajusten a temas de interés explicitos para los investigadores al estudiar el comportamiento y a partir de ese proceso utilizan métodos estadísticos para comparar y evaluar estos modelos matemáticos.

Dentro de este marco, la metodología estadística basad en modelos, se traza a partir del descubrimiento de la Ley de Regresión Universal por parte de Francis Galton en su libro “Natural inheritance” en el año 1889, y la subsecuente teorización matemática elaborada por Karl Pearson entre 1900-1910, dando origen a los modelos de regresión lineal. La figura 8, ilustra el modelo de regresión lineal simple, representada por la ecuación . Al reemplazar los datos en la variable independiente se realiza la gráfica de una línea recta que relaciona la estimación de la relación de observaciones reales obtenidas a partir de una muestra aleatoria de una población, y se basa en varios supuestos sobre las características de distribución de la relación entre las variables y ; donde es la intercepción con el eje , es la pendiente y llamado “error” es una variable aleatoria que se considera tiene una distribución gaussiana en forma de campana con una media de 0 y una varianza (Bangdiwala, 2018). Para McLean (2001), el modelo de regresión lineal describe por ejemplo la relación entre las habilidades comunicativas y el género, reconociendo el error de medición; es decir, el ruido de la medición también puede considerarse parte de un modelo probabilístico, y su suavizado como parte de la estimación de ese modelo.

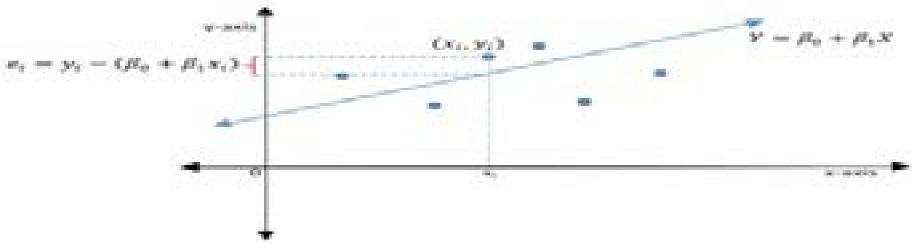

Figura 8. Modelo Regresión Lineal Simple. Fuente: (Bangdiwala, 2018)

A partir de la variedad de constructos sobre modelo estadístico, planteada por diversos autores; podemos observar que no se evidencia un consenso para definirlo. Nuestra postura al tema se acerca a lo planteado por McLean (2001), quien concibe el aprendizaje de la estadística como un conjunto de técnicas para desarrollar y evaluar modelos con el propósito de lograr cierta comprensión del funcionamiento del universo para ganar el control del conocimiento. Un modelo estadístico se puede definir como: a) predictivo: es la capacidad de predecir lo que sucederá en determinadas condiciones, b) determinista: dice lo que sucederá bajo determinadas circunstancias, c) probabilístico: predice especificando lo que puede suceder, y asigna una probabilidad de cada posible caso, d) causal: proporciona la capacidad de predicción a través de un marco teórico que relaciona las variables involucradas de tal manera que, si una o más variables se cambian, los resultados se pueden predecir.

MODELACIÓN ESTADÍSTICA (ME)

La Modelación Estadística (ME) consiste

esencialmente en definir herramientas adecuadas para modelar datos observados, teniendo en cuenta su carácter aleatorio y reconociendo que el significado de ME es muy general. Hay dos enfoques para el constructo: primero, es la construcción del modelo por parte del estudiante y el segundo, es usar modelos preconstruidos con el propósito de explorar su comportamiento, logrando que los estudiantes puedan investigar las consecuencias de acciones y condiciones como la variación de los parámetros de entrada y la observación de las salidas (Doerr y Pratt, 2008).

En este sentido, Henry (1997) describe tres etapas de ME: la primera es la observación de una situación real y su descripción en términos cotidianos, donde el profesor centra el contexto de enseñanza en un contexto real a través de un "experimento programado" para que el estudiante adquiera la necesidad de interpretar la pregunta planteada y adquirir la capacidad de saber describir una situación que provoque un problema (por ejemplo, la evolución de las colas de un supermercado), saber aplicar un protocolo experimental y recoger efectos obtenidos, saber organizar los datos, saber leer una estadística (por ejemplo, señalando las filas e intervalos regulares) para luego traducir esta proceso a un modelo general con condiciones de transferencia controladas que en didáctica se le llama "contextualización" del conocimiento antiguo. La segunda etapa, es la matematización o formulación del modelo. En este proceso los alumnos son capaces de representar el modelo en la simbología propia de las matemáticas. Por último, en la tercera etapa, es la capacidad que adquiere el estudiante pueda retomar la pregunta planteada para interpretar y razonar sobre los resultados matemáticos obtenidos al implementar el modelo, permitiendo extraer respuestas en relación con las hipótesis del modelo (por ejemplo, formular la Ley de Poisson para el número de llegadas de clientes en un intervalo de tiempo); estas respuestas deben ser interpretadas para evaluar su validez y alcance de una situación real (ejemplo, decidir abrir o cerrar una caja registradora del supermercado). Estas habilidades permiten la formación y aprendizaje de la estadística en varias disciplinas, adquiriendo un aspecto específico en las matemáticas debido al carácter particularmente abstracto de las herramientas que se desean implementar.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la ME es un fenómeno real o de un proceso evolutivo en el que intervienen determinadas cantidades de variables que el investigador Henry (1997) esquematiza a través de la siguiente tabla:

Tabla 1. Esquema de Modelación Estadístico (Henry, 1997, p. 156)

Etapa de modelación	Objetivo de la acción	Actividades previstas
Realidad	Estudio de un fenómeno real, o de un proceso experimental. Por ejemplo: el número de clientes que ingresan en un día a un supermercado	Descripción simplificada de los elementos relevantes para el problema en cuestión. Aplicación de un protocolo experimental. Esta descripción está filtrada por una mirada teórica
Modelo pseudo-concreto	Situación genérica, descontextualizada y abstracta que llevan las propiedades que son objeto de estudio. Supuestos del modelo: -Implícito en general, -Explícito para el contexto particular Por ejemplo: La Distribución de probabilidad de Poisson	Presentación del modelo en términos comunes o esquemas, validación retórica de la analogía con la descripción anterior. Comparación de los supuestos del modelo con los elementos correspondientes de la descripción. Conjeturas sobre las propiedades del modelo que responden a la pregunta.
Modelo matemático	Un conjunto de ecuaciones matemáticas o formalizaciones que representan las propiedades del modelo y los supuestos realizados. Ejemplo: Universo Ω = [0; n], variable binomial N, probabilidades y distribuciones de probabilidad	Ecuación o formalización: a partir de las leyes del fenómeno estudiado y del conocimiento teórico del modelo pseudo concreto, escritura matemática de las relaciones identificadas entre variables en un marco teórico determinado.
Estudio matemático	Propiedades del modelo matemático derivadas de las hipótesis y teorías matemáticas utilizado. Ejemplo: $E[N] = np$, las medianas pasan por el centro del paralelogramo.	Demostración de resultados teóricos internos al modelo matemático. Enunciado formal de una respuesta al problema matemático planteado.

Confrontación modelo-realidad	**Formulación concreta de los resultados obtenidos. Recontextualización. Comparación del modelo completado por estos resultados con la información accesible de la realidad. Por ejemplo: la probabilidad de que sean atendidos 3 clientes o más en un supermercado en una semana. Se aplica la fórmula de Distribución de Poisson** $P(x = k) = \frac{e^{-\mu}.\mu^k}{k!}$	**Comparación de los resultados numéricos o cualitativos con las mediciones experimentales correspondientes. Evaluación del margen de error y de la aceptabilidad del modelo.**
Generalización y previsión	Extensión del modelo validado a otras situaciones análogos, condiciones de generalización. Previsión de los resultados esperados en estas nuevas situaciones. Por ejemplo: Control del valor real de la probabilidad p. Intervalo de confianza y test de hipótesis para un porcentaje real en una población muestreada.	La evaluación de la validez y la generalización del modelo requiere un conocimiento especializado de la situación estudiada. Ya no es asunto de los matemáticos. El especialista relativizará las conclusiones, explicaciones y generalizaciones del estudio matemático en basado en las suposiciones del modelo.

Este esquema de ME presentado por Henry (1997) alude al proceso que llevan a cabo los científicos especialistas en el área donde se enmarca el modelo construido y el estadístico para la formalización del modelo, a partir de las leyes del fenómeno estudiado y del conocimiento teórico del modelo pseudo-concreto.

Para Lehrer e English (2018), la ME incluye: a) plantear preguntas estadísticas dentro de contextos significativos resaltando la variabilidad; b) generar, seleccionar y medir atributos que varían a la luz de las preguntas planteadas; c) recolectar datos de primera mano para que el estudiante encuentre decisiones sobre el diseño de las investigaciones; d) representar, estructurar e interpretar la variabilidad muestral; y e) hacer inferencias informales de todos estos procesos reconociendo la incertidumbre, detectando variaciones y haciendo predicciones.

Garfield y Ben-Zvi (2008) en la figura 9, representan los puntos comunes y las diferencias entre el uso de dos principales procesos de

ME: 1) Seleccionar o diseñar y utilizar modelos apropiados para simular datos y responder a la pregunta de investigación. A veces, el modelo es tan simple como un dispositivo aleatorio, a veces toma la forma de una declaración (como una hipótesis nula) que se utiliza para generar datos y determinar si el resultado de una muestra particular es representativa, a veces se utiliza un conjunto de datos para simular más datos, creando una distribución de población simulada para utilizarla en la elaboración de inferencias estadísticas. 2) Ajustar un modelo estadístico a los datos existentes o a los datos que se han recogido a través de estudio o experimento para explicar y describir la variabilidad. En los cursos avanzados, la modelación de datos es una técnica esencial utilizada para explorar las relaciones entre múltiples variables para examinar el ajuste de un modelo a los datos observados y las desviaciones de los datos del modelo.

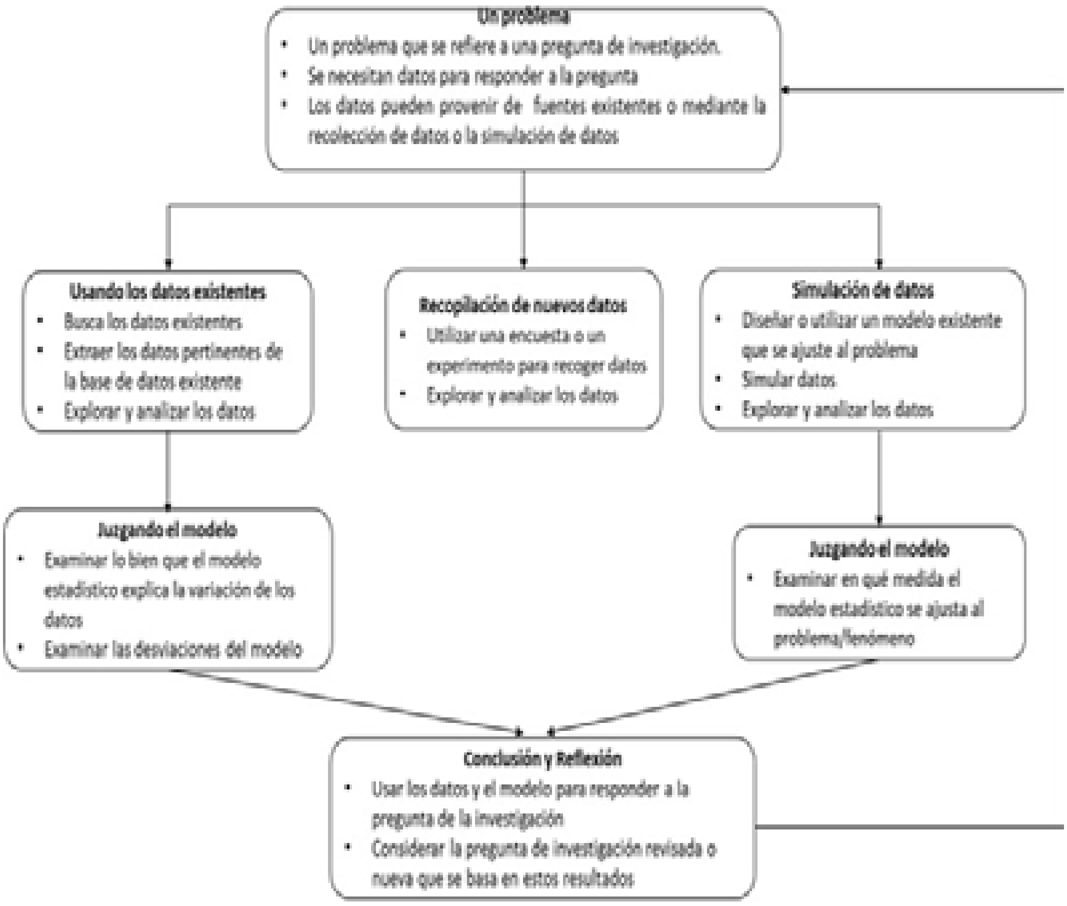

Figura 9. Uso de los modelos en el análisis estadístico.
Fuente: (Garfield y Ben-Zvi, 2008, p. 146)

Wild y Pfannkuch (1999), en la segunda dimensión de su estudio llamado tipos de pensamiento, definen la ME (figura 10), como la construcción y el uso de modelos para entender y predecir el comportamiento de aspectos del mundo a través de la información de la realidad del contexto: por ejemplo, construir datos estadísticos para tener conocimientos y experiencia de la información (“interpretar) que se retroalimenta el modelo mental. Definiendo un modelo estadístico como todas las concepciones estadísticas de un problema en el contexto que influyen en la forma en que se recogen los datos sobre el sistema y se analizan. Los autores, a través de la ME representan la forma como se aprende la estadística partiendo de la realidad del contexto y a medida que se avanza en una investigación estadística se incorpora el conocimiento del experto. Comprobando continuamente la idoneidad del proceso entre el modelo y la realidad; iniciando con la recolección de datos para analizarlos a partir de la representación de modelos estadísticos que permiten construir, interpretar y razonar.

Por consiguiente, para Wild y Pfannkuch (1999) la ME se refiere a todos las concepciones estadísticas del problema que influye en la forma en que se recogen los datos sobre el sistema y se analizan. Además, dependiendo del problema, el aprendizaje del estudiante y los conceptos estadísticos, también pueden ser parte de la forma en que pensamos acerca del mundo y por lo tanto ser parte de la capacidad del estudiante para representar la realidad de un contexto a través de un modelo estadístico.

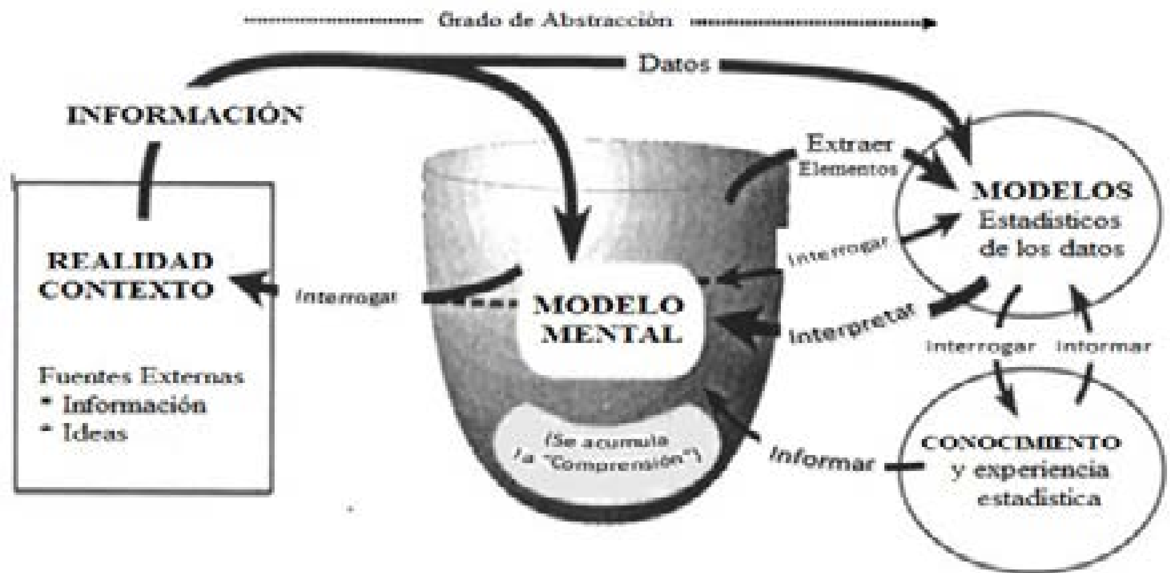

Figura 10. Proceso de Modelación Estadística.
Fuente (Wild y Pfannkuch 1999, p. 230)

En consecuencia, la comunidad estadística se ha comprometido con el uso casi exclusivo de los modelos de datos. Breiman (2001) afirma que la ME se puede representar en dos culturas (figura 11). La primera llamada Cultura de Modelación Algorítmica, tanto en teoría como en práctica se ha desarrollado rápidamente en campos fuera de la estadística; consiste en que los datos se pueden representar por un cuadro negro en el que un vector de variables de entrada (variables independientes) van en un lado, y en el otro lado salen las variables respuestas . Al interior de la caja es compleja y desconocida, su enfoque es encontrar una función , un algoritmo que opera en para predecir la respuesta . La segunda cultura, el autor la denominó Cultura de Modelación de Datos, en el cual los estadísticos en la investigación aplicada la consideran como la plantilla para el análisis estadístico frente a un problema aplicado. Por ejemplo, que los datos sean generados por muestras independientes de variables de respuesta = f (variables predictoras, ruido aleatorio, parámetros). Los valores de los parámetros se estiman a partir de los datos y el modelo luego se utiliza para informar y predecir.

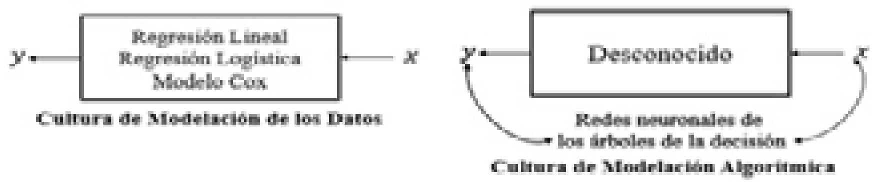

Figura 11. Modelación estadística: dos culturas (Breiman 2001)

De este modo las teorías de ME está emergiendo como un ambiente fértil de investigación en educación promoviendo el aprendizaje de la estadística y probabilidad, del cual los investigadores Kazak y Pratt (2017) consideraron los modelos de probabilidad como herramientas para hacer inferencias estadísticas informales y para construir conexiones conceptuales más sólidas entre los datos y los temas de azar en el aprendizaje de la estadística. Desarrollaron un estudio de caso con una muestra de doce futuros profesores de matemáticas (6 mujeres y 6 hombres) que eran estudiantes universitarios en su tercer año en un programa de educación matemática en la Universidad de Pamukkale. Los autores concluyeron que lograron el cumplimiento de sus objetivos de investigación al proporcionar actividades de experimentación a través del uso de herramientas tecnológicas para la simulación de los modelos en situaciones probabilísticas, facilitando mejorar la capacidad de razonamiento estadístico en los estudiantes. Así mismo, reconocen la importancia de aumentar los procesos de modelación en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad en el campo universitario, donde el profesor debe estar en capacidad de desarrollar actividades en el aula centradas en la exploración, aplicación, desarrollo y evaluación; facilitándole al estudiante el aprendizaje mediante la experimentación en situaciones de contextos reales.

Para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad en la educación secundaria, Dantal y Henry (1997) presentan cinco pasos de ME con el enfoque recomendado en los nuevos currículos franceses:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultado en la realidad

Estas cinco etapas son analizadas por Countinho (2001) en una experiencia de enseñanza de la actividad de modelación de situaciones aleatorias elementales. En el paso 1, es la realidad observada, al diferenciar los fenómenos del azar presentes entre una situación aleatoria y contingente. Una vez aceptada la aleatoriedad, en el paso 2, se debe realizar una descripción simplificada que permita pasar de la realidad observada (paso 1) a la construcción del modelo que es el paso 3. Al comenzar la construcción del modelo (paso 3) de nuevo se precisa una serie de decisiones ante la problemática planteada y obtenidas las conclusiones a partir del modelo queda la parte más importante que es comparar estas conclusiones con el comportamiento real de la situación analizada y decidir que el modelo matemático proporcione una buena descripción de la realidad (paso 4). El propósito de construir el modelo es obtener una mejor comprensión e interpretación de los resultados en la realidad reconociendo el funcionamiento de la actividad de investigación y la forma en que se aprende en la vida diaria; es decir, el conocimiento científico (también obtenido de la vida diaria) se compone de datos o hechos (la parte observable de nuestro universo) y teorías o modelos que tratan de explicar y relacionar estos hechos entre sí (paso 5).

En el campo de la ME Cobb (2007) sugiere que la modelación debería desempeñar un papel importante en la enseñanza de la estadística, afirmando que todos los métodos estadísticos se derivan de un modelo y el propósito de la enseñanza en fomentar el pensamiento estadístico en los estudiantes a través de un razonamiento explicito entre el modelo y la realidad. Es decir, los procesos de ME cuentan con respaldos metodológicos que le dan gran variabilidad como área de desarrollo de la matemática aplicada. Considerada como un área de estudio y especialización en la que convergen los aspectos teóricos, metodológicos y computacionales (Ojeda, 2003). El desarrollo de la ME permite mejorar las dificultades en el aprendizaje de la estadística dejando a un lado conceptos abstractos, fórmulas, gráficos que no le permiten al estudiante desarrollar la capacidad de resolución de problemas (Tacoma, Sosnovsky, Boon, Jeuring y Drijvers, 2018).

RELACIÓN ENTRE LA ME Y MM

A partir del siglo XX se inicia la revolución de los procesos de modelación en las matemáticas y la estadística, presentándose tensiones importantes en las definiciones de modelo matemático y modelo estadístico. Reconociendo que la construcción de modelos matemáticos y estadísticos fomenta la creatividad en el estudiante. Por consiguiente, la modelación implica un cambio de las prácticas de enseñanza aprendizaje en las matemáticas y la estadística en todos los niveles educativos, dejando a un lado un conjunto de procedimientos aplicados de forma mecánica; desplazándose hacia la resolución de problemas en el contexto para lograr la construcción, aplicación y evaluación de modelos estadísticos y científicos (Rodgers, 2010).

Del mismo modo, para Del Pino y Estrella (2012) un modelo estadístico se puede formalizar como un caso particular de modelo matemático. Por lo tanto, la probabilidad se emplea directamente en la modelación de la variabilidad muestral y es la base para desarrollar la inferencia estadística. Así mismo, la selección de muestras al azar establece un vínculo directo entre la estadística y probabilidad, proporcionando una excelente motivación para el desarrollo de resultados combinatorios. Por otra parte, la estadística requiere una manera diferente de pensar, porque los datos aparecen en un contexto. Algunas características distintivas de los modelos estadísticos versus los modelos matemáticos planteados por Del Pino y Estrella (2012) son:

a) La manera en que los datos fueron obtenidos es de máxima importancia en el aprendizaje de la estadística, mientras que esto es irrelevante desde el punto de vista matemático.

b) La incertidumbre, la variabilidad y los errores de medición son usualmente ignorados en los modelos matemáticos

c) Hay aspectos importantes que tienen que ver con las percepciones más que con la matemática

La posición de Del Pino y Estrella (2012) puede contraponerse con lo propuesto por Hestenes (2010) y Dantal y Henry (1997) quienes materializan la ME como un ciclo similar al de la MM, donde resaltan las fases de estas ya expuestas anteriormente (por ejemplo, Blum y Borromeo-Ferri, 2009). En otras palabras, podemos entender la relación de estos dos constructos desde dos ámbitos, el científico y el escolar. En el ámbito científico, todo proceso de MM puede entenderse como ME, dado que en todo fenómeno de la vida real interviene de alguna forma la variabilidad y la aleatoriedad. En tal caso, los científicos deben ser capaces de seleccionar las variables necesarias para modelar adecuadamente el fenómeno. Desde el punto de vista escolar, la MM no necesariamente presupone el uso de la variabilidad y aleatoriedad, sino que más, bien, según lo plantea Del Pino y Estrella (2012), estas son propias de la ME. En síntesis, parece ser que en el ámbito escolar se tiende a simplificar los fenómenos reales para construir modelos que permitan estudiar ciertos atributos del objeto matemático inherente a él. En el caso que esta simplificación no conlleve la eliminación de la aleatoriedad y la variabilidad estaremos en presencia de la ME en caso contrario nos referiremos a la MM.

Aunque la MM en la investigación de la enseñanza de las matemáticas ha sido destacada en el último decenio, se han desarrollado investigaciones educativas limitadas sobre ME; es decir, se están comenzando a implementar investigaciones en la estadística educativa a través de la información de la realidad del contexto y con las herramientas adecuadas. Como lo afirma Lehrer e English (2018) que incluyan: a) el planteamiento de preguntas estadísticas dentro de contextos significativos resaltando la variabilidad; b) generar, seleccionar y medir atributos que varían a la luz de las preguntas planteadas; c) recolectar datos de primera mano para que el estudiante encuentre decisiones sobre el diseño de la investigación; d) representar, estructurar e interpretar la variabilidad muestral; y e) hacer inferencias informales de todos estos procesos.

CONCLUSIONES

Hemos abordado un tema de la educación matemática referente a los constructos de Modelación Matemática (MM) y Modelación Estadística (ME). La distinción entre ellos nos llevó a definir con claridad ambos conceptos.

Se observan posturas en la MM que apuntan al desarrollo de actividades escolares investigativas como herramientas didácticas bajo una perspectiva epistemológica cíclica de una representación mental conectada con el mundo real (matematizar) con el propósito de construir un modelo que le permite validar los resultados con la realidad para integrar las matemáticas con otras áreas. A pesar de las diversas perspectivas en el aprendizaje de las matemáticas, los modelos matemáticos son por lo general construcciones abstractas que describen características generalizadas de una estructura o patrón, sometido a un proceso de cuantificación, búsqueda de patrones, interpretación algebraica de los datos, las ideas y las relaciones entre los conceptos matemáticos. El proceso de MM se mueve constantemente entre el mundo real del fenómeno no explorado y el mundo en el que se está explorando la representación matemática.

Por otro lado, la ME al ser implementada en la enseñanza y aprendizaje de la estadística a través de una secuencia de actividades o ciclos de aprendizaje, permite al estudiante adquirir la capacidad cognitiva de diseñar un modelo de representación de una situación problema de la realidad a partir de técnicas de selección de contenidos, recolección de datos, representación gráfica, interpretación de datos y análisis de contenidos, sujetos a la variabilidad con el propósito de desarrollar en el estudiante la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico.

Algunas características distintivas mencionadas en el presente documento, permite llegar a la conclusión sobre la diversidad de concepciones entre la MM y la ME, partiendo de los significados de palabras como modelo, modelado, matematización, modelaje, modelización y modelación. Sin embargo, los investigadores

Garfield y Chance (2000) identifican la gran diferencia ente los modelos estadísticos y los modelos matemáticos partiendo de la forma como son obtenidos los datos en la estadística, influyendo temáticas como la incertidumbre, la variabilidad y los errores de medición que son usualmente ignorados o irrelevantes en los modelos matemáticos.

Acorde con McLean (2001), la enseñanza y aprendizaje de la estadística no son un conjunto de reglas y recetas para el análisis de datos. Al contrario, la estadística y la probabilidad fundamentadas en la modelación permiten entender y describir el mundo real. Así lo corrobora Ramos-Ramos (2014), al concluir sobre la importancia de tener en cuenta el planteamiento de MM como un proceso mediante el cual se construye y se estudia la relación entre un fenómeno y una estructura, a partir de una situación o problema del mundo real con la finalidad de aproximarnos a este último a través de la comprensión y resolución de problemas.

Acorde con Blum y Borromeo-Ferri (2009), son muy pocos los países que implementan la modelación matemática (y particularmente la estadística), siendo una de las principales dificultades la falta de una formación adecuada y continua dentro de su formación universitaria de pregrado y postgrado por parte de los profesores quienes muestran nociones limitadas, y a menudo erróneas hacia la enseñanza de la estadística. Las competencias de modelación, como lo mencionan Blum y Borromeo-Ferri (2009), permiten preparar a los estudiantes en el desarrollo de competencias y actitudes apropiadas para ser ciudadanos responsables y partícipes de la sociedad. Ayudándolos a entender mejor el mundo, su comparación con la realidad, motivándolo en la formación de conceptos logrando un perfeccionamiento progresivo en cada una de las fases de resolución de problemas estadísticos (Borromeo Ferri, 2010).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anhalt, C., Staats, S., Cortez, R., & Civil, M. (2018). Mathematical modeling and culturally relevant pedagogy. In Y. J. Dori, *In Cognition, metacognition, and culture in STEM education* (pp. 307-330). Cham: Switzerland: Springer.

Bangdiwala, S. (2018). Regression: simple linear. *International journal of injury control and safety promotion, 25*(1), 113-115. doi:https://doi.org/10.1080/17457300.2018.1426702

Barbosa, J. (2004). Modelagem matemática: O que é? Por que? Como. *Por que*, 73-80.

Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, modelización, simulación. *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 119-130.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. . *Educación matemática, 16(2)*, 105-125.

Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de educación matemática, 23(2)*, 20-35.

Blum, W., & Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1(1),*, 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31(1),*, 99-118.

Breiman, L. (2001). Statistical modeling: The two cultures (with comments and a rejoinder by the author). *Statistical science, 16(3)*, 199-231.

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J., Borromeo Ferri, R., Borba , M., Geiger, V., . . . Kwon, O. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives. . *In Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol 1*, 145-172.

Campbell, T., Oh, P., Maughn, M., Kiriazis, N., & Zuwallack, R. (2015). A review of modeling pedagogies: Pedagogical functions, discursive acts, and technology in modeling instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11(1).*, 159-176.

Carrión, J. (2000). Sociología, orden social y modelización estadística: Quetelet y el hombre medio. *Empiria: Revista de metodología de ciencias sociales, (3)*, 49-72.

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum? *Technology innovations in statistics education, 1*(1), 1-15.

Countinho, C. (2001). *ntroduction aux situations aléatoires dés le Collége: de la modélisation à la simulation d'experiences de Bernoulli dans l'environment informatique Cabri-géomètre-II.* Grenoble: Unpublished Ph. D. University of Grénoble, France.

Dantal, B., & Henry, M. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité [The betting of modelling in probability]. *Enseigner les probabilités au lycée*, 57-59.

Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa, 9 (46)*, 75-87.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice.* San Luis Obispo, USA: Springer Science & Business Media.

Gilbert, J., & Justi, R. (2016). *Modelling-based teaching in science education (Vol. 9).* Switzerland: Springer international publishing Switzerland.

Grant, M. (2012). Modeling In Math Learning. In L. Perlovsky, *Mathematical Models/Theories of Learning. In: Seel N.M. (eds)* (pp. 2113-2115). Boston: Encyclopedia of the Sciences of Learning. Springer.

Hartmann, S. (2008). Modeling in philosophy of science. In M. &. Frauchiger, *Representation, evidence, and justifi cation: Themes from Suppes* (pp. 95-122). Frankfurt, Germany: Ontos Verlag.

Hein, N. (2006, Marzo 29-31). *Modelaje matemático en la enseñanza un tratado teórico y un ejemplo didáctico*. Retrieved from V Festival internacional de matemática de costa a costa matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno.: http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-Hein.pdf

Hennig, C. (2010). Mathematical models and reality: A constructivist perspective. *Foundations of Science, 15(1)*, 29-48.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. *Enseigner les probabilités au lycée*, 77- 84.

Hestenes, D. (1987). Toward a modeling theory of physics instruction. *American journal of physics, 55(5)*, 440-454.

Hestenes, D. (2010). Modeling theory for math and science education. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford, *Modeling students'* *mathematical modeling competencies* (pp. 13-41). Boston: Springer Science+ Business Media.

Higueras, L., & García, F. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros. . *Aportaciones de La Teoría Antropológica de Lo Didáctico: un Panorama de La Tad. Org. Mariana Bosch, Josep Gascón, Michèle Artaud, Chevallard, et. al.. Bellaterra (Barcelona), Firt Edition: November*, 431-464.

Johnston, K., & Aldridge, B. (1985). Examining a mathematical model of mastery learning in a classroom setting. *Journal of Research in Science Teaching, 22(6)*, 543-554.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm, 38(3)*, 302-310.

Kazak, S., & Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 1-18.

Knuuttila, T. (2005a). *Models as epistemic artefacts: Toward a non-representationalist account of scientific representation.* Helsinki, Finland: University of Helsinki.

Lehrer, R., & English, L. (2018). Introducing children to modeling variability. In D. M. Ben-Zvi, *In International handbook of research in statistics education* (pp. 229-260). Cham: Springer.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lingefjärd, T. (2002). Mathematical modeling for preservice teachers: A problem from anesthesiology. International. *ournal of Computers for Mathematical Learning, 7*(2), 117-143. Retrieved from https://doi.org/10.1023/A:1021122431218

McLean, A. (2001). Statistics in the catwalk. The importance of models in training researchers in statistics. *raining researchers in the use of statistics*, 87-102.

Morrison, M. (2007). Where have all the theories gone? *Philosophy of Science, 74(2)*, 195-228.

Muthuri, C. (2009). Mathematical Models. In K. C. Muir-Leresche, *Graduate Environmental and Agricultural Research (GEAR): A Guide to Effective and Relevant Graduate Research in Africa* (Second ed., pp. 231-341). Africa: ReserarchGate. doi:10.13140/2.1.2005.0569

Ojeda, M. (2003). La modelación estadística. In V. Castellanos Vargas, *Memorias del Foro de Matemáticas del Sureste* (V. Castellanos Vargas, Trans., pp. 68 - 76). Cunduacán Tabasco., Mexico: Universidad Juáres Autónoma de Tabasco. Retrieved from Foro de Matemáticas del Sureste. Universidad Juáres Autónoma de Tabasco: http://pesmm.org.mx/Serie%20Memorias_archivos/Mem2.pdf#page=62

Ojeda, M. (2004, 01 01). *La modelación estadística*. Retrieved Marzo 10, 2020, from Memorias del Foro de Matemáticas del Sureste. Universidad Juáres Autónoma de Tabasco: http://pesmm.org.mx/Serie%20Memorias_archivos/Mem2.pdf#page=62

Peng, L., Yang, W., Zhang, D., Zhuge, C., & Hong, L. (2020). Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling. *Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling*, 1-18.

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., & Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM, 50*(7), 1113-1123. doi:https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Ramos-Rodríguez, E. (2014, Septiembre 3). *Reflexión de docentes sobre la enseñanza del álgebra en un programa formativo. (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).* Retrieved from Repositorio digital de documentos en educación matemática. Universidad de los Andes: http://funes.uniandes.edu.co/1782/

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *pna, 4(1)*, 1-14.

Rodgers, J. (2010). The epistemology of mathematical and statistical modeling: a quiet methodological revolution. *American Psychologist, 65*(1), 1-12.

Spandaw, J. (2011). Practical knowledge of research mathematicians, scientists, and engineers about the teaching of modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman, *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 679-688). London: Springer.

Tacoma, S., Sosnovsky, S., Boon, P., Jeuring, J., & Drijvers, P. (2018). The Interplay between Inspectable Student Models and Didactics of Statistics. *Digital Experiences in Mathematics Education, 4(2-3)*, 139-162.

Toapanta-Toapanta, G., Pérez-Narváez, M., & Lema-Yungan, J. (2018). Las competencias para el aprendizaje de la estadística en los estudiantes de Educación Superior (revisión). *Roca. Revista científico-educacional de la provincia Granma, 14(1)*, 253-266.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matematicas: un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*, 63-86.