

DETERMINACIÓN DEL ERROR INDUCIDO AL USAR UNA RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN LINEAL EN EL CALCULO DEL MOMENTO DE FLUENCIA DE UNA SECCIÓN DE VIGA DE CONCRETO REFORZADO

DETERMINATION OF THE ERROR INDUCED BY USING A LINEAR STRESS-STRAIN RELATIONSHIP IN THE CALCULATION OF THE CREEP MOMENT OF A REINFORCED CONCRETE BEAM SECTION

· 4 1 4 ·

Jorge Fernando Márquez Peñaranda¹

Mawency Vergel Ortega²

José Leonardo Jácome Carrascal³

1. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia, Ingeniería Civil/Departamento de Construcciones, Grupo de Investigación en Ingeniería Estructural (Polímatas), Correo electrónico: jorgefernandomp@ufps.edu.co. 2. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia, Departamento de Matemáticas y Estadística, Grupo de Investigación Euler, Correo Electrónico: mawencyvergel@ufps.edu.co. 3. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia, Ingeniería Civil/Departamento de Construcciones, Grupo de Investigación en Ingeniería Estructural (Polímatas), Correo electrónico: jose.jacome@ufps.edu.co

ABSTRACT.

Nowadays, the teaching in civil engineering courses related to the analysis and design of reinforced concrete beams subjected to pure bending is based on models that use simplifications to facilitate calculations. When analyzing the plastic capacity of a rectangular section, its yield moment is usually calculated assuming that the stress-strain relationship can be idealized using a straight line. However, the validity of this relationship is only verified when the levels of compressive stress are less than 45% of the compressive strength of concrete f'_c . For this reason, it is convenient to make a rigorous review over the convenience of using this simplification at medium and to high stresses close to failure. This work studies how a reinforced concrete section behaves according to the simplified model and compares its results to those obtained when using the function proposed by Hognestad in 1955 (still vigent). Interestingly, as a general conclusion, it can be said that the results predicted by the simplified model fit well respect to those obtained using the greatest mathematical rigor.

RESUMEN.

La enseñanza del análisis y diseño de vigas de concreto reforzado sometidos a flexión pura en cursos de ingeniería civil se basa en modelos que usan simplificaciones para facilitar los cálculos. Cuando se analiza la capacidad plástica de una sección rectangular se suele calcular su momento de fluencia asumiendo que la relación esfuerzo-deformación puede idealizarse usando una línea recta. No obstante, la validez de esta relación solo se verifica cuando los niveles de esfuerzo de compresión son menores que el 45% de la resistencia a compresión del concreto f'_c . Por esta razón es conveniente revisar con rigor si esa simplificación puede sostenerse hasta esfuerzos altos cercanos a la falla. Este trabajo estudia como se comporta una sección de concreto reforzado de acuerdo con el modelo simplificado y contrasta sus resultados con lo que se obtiene al usar un modelo exacto basado en la función propuesta por Hognestad en 1955 que aún es pieza central de la literatura relacionada. Como conclusión se observa de manera interesante que los resultados predichos por el modelo simplificado se ajustan bien a los obtenidos usando el mayor rigor matemático.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza en cursos de estructuras de pregrado y posgrado de ingeniería civil se basa en modelos muy bien estructurados y probados durante varias décadas para el análisis y diseño de secciones de vigas de concreto reforzado. Sin embargo, para llevar esos modelos a la práctica deben hacerse simplificaciones que aligeren los extensos procesos de cálculo requeridos. Una de esas simplificaciones se permite en la determinación del momento de fluencia y sus deformaciones asociadas siempre que el comportamiento del concreto se encuentre dentro de su rango elástico. Ese comportamiento se presenta solo si esfuerzo de compresión del concreto no supera el 45% de su resistencia máxima f'_c aunque en la práctica suele extenderse ese límite hasta el 70% [1,2]. Aunque la curva esfuerzo-deformación se parece más a una parábola que a una línea recta, se acepta que en el rango elástico existe una relación lineal de esfuerzo-deformación para el concreto [1,2]. Sin embargo, para asegurar que esa simplificación es adecuada para la enseñanza y uso práctico, la validez de usar una línea recta a niveles de esfuerzo de compresión mayores que 45% f'_c debe ser verificada contrastando sus pronósticos con los dados por una curva esfuerzo-deformación parabólica.

En la literatura se reportan algunos modelos de curva esfuerzo-deformación para el concreto en compresión basados en una parábola simple o compuesta. Para este trabajo se ha elegido el modelo propuesto por Hognestad en 1955 por su sencillez y precisión validada durante muchos años [1,3].

Este trabajo desarrolla un modelo para determinar las deformaciones, fuerzas y momentos de secciones simple y doblemente reforzadas de vigas de concreto usando dos enfoques. El primer enfoque se basa en la simplificación de la línea recta. El segundo enfoque considera la formulación propuesta por

Hognestad. Los resultados de cada enfoque son comparados y se presentan conclusiones sobre la conveniencia de continuar con la práctica actual.

2. MODELO LINEAL Y MODELO PARABÓLICO PARA LA CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN

Aunque las curvas reales de esfuerzo-deformación obtenidas de ensayos practicados a especímenes de concreto simple muestran una tendencia a una curva, en la enseñanza y práctica del análisis y diseño de estructuras se acepta que esa curva se trate como una función a tramos. De acuerdo con esto, se divide en dos zonas que se asimilan a una región elástica y una plástica. La región elástica se asocia al lugar geométrico de la línea recta dada por la Ecuación 1 [4,5]:

$$f_c = E_c * \epsilon_c \quad (1)$$

donde:

f_c es el esfuerzo de compresión del concreto

E_c es el módulo de elasticidad del concreto

ϵ_c es la deformación de compresión del concreto en la fibra objetivo, asociada al esfuerzo f_c

La región plástica de la curva esfuerzo deformación suele simularse usando una línea recta inclinada, una parábola o incluso una línea recta horizontal. La línea recta es aceptable para niveles de esfuerzo pequeños, la parábola para niveles de esfuerzo medianos y altos y la línea horizontal para niveles de esfuerzo cercanos a la falla [1,6,7].

Tal como se explica en la sección 3, este trabajo propone el uso de una función parabólica que describa adecuadamente el comportamiento del concreto a niveles de esfuerzo bajos, medianos

y altos sin que el concreto incurra en falla por aplastamiento. Para esto se usa parcialmente el modelo de curva esfuerzo – deformación del concreto simple propuesto por Hognestad et al en 1955 [1,2]. El modelo plantea que la gráfica esfuerzo – deformación puede ser idealizada usando una parte parabólica seguida de una parte en línea recta tal como muestra la Figura 1.

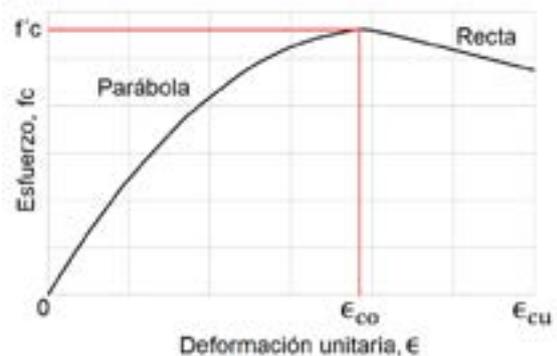


Figura 1. Modelo de Hognestad et al (1955) para el concreto simple

La parte parabólica de la Figura 1 define la zona de esfuerzos bajos, medianos y altos hasta el valor máximo reportado por ensayos sin que el concreto falle por aplastamiento. Esta es la parte que se usa en este trabajo y queda definida por la Ecuación 2 [1,2]:

$$f_c = f'_c * \left[\frac{2 * \epsilon_c}{\epsilon_{co}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} \right)^2 \right] ; 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{co} \quad (2)$$

La parte recta de la Figura 1 define la zona de altos esfuerzos que llevan al aplastamiento del concreto. Para dar completitud, esta parte queda definida por la Ecuación 3 [1,2]:

$$f_c = f'_c * \left[\frac{\epsilon_{cu} - 0.85 * \epsilon_{co} - 0.15 * \epsilon_c}{\epsilon_{cu} - \epsilon_{co}} \right] ; \epsilon_{cu} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{co} \quad (3)$$

donde

ϵ_{co} es la deformación unitaria donde se presenta el esfuerzo máximo f'_c , típicamente igual a 0.002 [1,4,5]

ϵ_{cu} es la deformación de rotura del concreto, según NSR-10 igual a 0.003 [1,4,5]

f'_c es la resistencia a compresión del concreto evaluada a los 28 días de edad

La mayoría de concretos usados en la construcción de edificaciones suele tener una resistencia a la compresión que oscila entre 21 y 35 MPa. En estos casos los valores típicos dados para las deformaciones unitarias en esfuerzo máximo y de rotura son válidas [6,7].

3. CÁLCULO DE MOMENTO DE FLUENCIA DE LA SECCIÓN

Cuando se estudia el comportamiento de una sección rectangular de concreto reforzado se simula un aumento progresivo de esfuerzos que va produciendo cambios físicos en ella. Como el concreto reforzado es un material híbrido, su comportamiento es afectado por la fragilidad y baja resistencia a la tracción del concreto simple y por la ductilidad del acero de refuerzo. Además, la presencia de flexión pura en la sección produce esfuerzos de tracción y de compresión en diferentes fibras. Esto debe verse reflejado en el proceso de análisis matemático y en la coherencia de sus resultados con lo que se observa en la realidad [2,8].

En este trabajo se estudia una sección sometida a momento flector positivo, es decir que trata de producir un giro antihorario en ella. Dicho momento genera esfuerzos de tracción en la fibra inferior y de compresión en la fibra superior [12]. Por lo anterior, se considera que la falla se dará cuando se aplaste la fibra extrema superior. La descripción de la línea de tiempo y los efectos del aumento progresivo de esfuerzos permite identificar tres estados sucesivos:

a) Momento de agrietamiento, b) Momento de fluencia y c) Momento de falla [1,8]. Las características de cada uno de esos estados es función principalmente de la capacidad dúctil que tenga la sección y esta a su vez depende de la cuantía de refuerzo existente. La cuantía de refuerzo de la sección es un número que expresa que cantidad de área de acero hay con respecto a la cantidad de concreto útil. En la práctica la cuantía de acero de refuerzo oscila entre 0.3% y 2.5% del área de concreto útil [2,5]. Sin embargo, en secciones dúctiles de concreto reforzado ese rango suele restringirse para garantizar que el acero de tracción fluya antes que el concreto se aplaste por exceso de compresión. En este trabajo solo se estudia cómo se da el estado de fluencia descrito arriba en secciones rectangulares armadas para garantizar un comportamiento dúctil. Este estado corresponde al instante en el cual el acero de tracción comienza a fluir mientras que la zona comprimida del concreto soporta esfuerzos que permiten el equilibrio de fuerzas. Las secciones analizadas cubren todo el rango práctico de configuraciones, es decir se estudian secciones rectangulares simple y doblemente reforzadas.

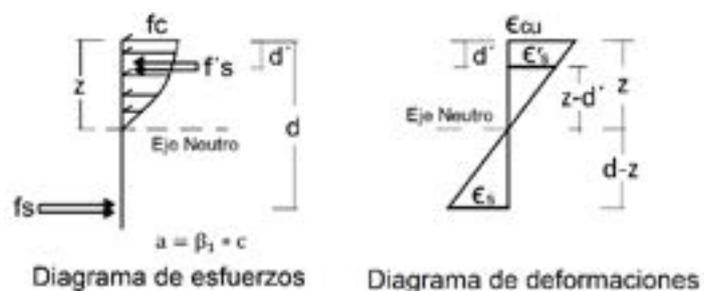


Figura 2. Diagramas de esfuerzos y deformaciones para el momento de fluencia

El análisis de secciones de viga delgadas, esto es, con alta relación de longitud a altura de sección, se hace considerando que las secciones originalmente planas permanecen planas después de deformarse por efectos de la flexión. Esto implica que hay una relación lineal entre las deformaciones de fibras de material

en cualquier nivel de la vertical de la sección tal como se muestra en la parte de la derecha de la Figura 2. La relación entre deformaciones está dada por la Ecuación 4 [1,2]:

$$\epsilon_c = \frac{z + \epsilon_s}{d - z} \quad ; \quad \epsilon'_s = \frac{(z - d') + \epsilon_s}{d - z} \quad (4)$$

donde:

ϵ_s es la deformación unitaria del acero de tracción asociada a la deformación en la fibra objetivo

ϵ'_s es la deformación unitaria del acero de compresión asociada a la deformación en la fibra objetivo

z es la profundidad de la zona de compresión medida desde el eje neutro de la sección hasta la fibra extrema de la zona de compresión (por encima del eje neutro)

d es la altura útil de la sección medida desde el eje centroidal del acero de tracción hasta la fibra extrema de la zona de compresión

d' es la distancia entre el eje centroidal del acero de compresión hasta la fibra extrema de la zona de compresión

La relación lineal expuesta en el párrafo anterior permite obtener la ecuación de la parábola de esfuerzos en función de la profundidad z tal como se muestra en las Ecuaciones 5 y 6 [10,11]:

$$f_c = f'_c * \left[\frac{2 * z}{z_0} - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$; \quad 0 \leq z \leq z_0$$

$$z_0 = \frac{d}{1 + \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{co}}} \quad (6)$$

donde:

z_0 es el valor límite de la profundidad de la zona de compresión z

La fuerza aportada por la compresión del concreto y su posición pueden obtenerse calculando el área bajo la curva definida por la Ecuaciones 5 y 6 y el primer momento estático de esa área con respecto al eje neutro de la sección. Los resultados de este proceso toman la forma dada por las Ecuaciones 7 y 8:

$$C_c = b * f'_c \int_0^z \left[\frac{2 * w}{z_0} - \left(\frac{w}{z_0} \right)^2 \right] dw = \frac{b * f'_c}{z_0} * \left[z^2 - \frac{z^3}{3 * z_0} \right] \quad ; \quad z_0 \neq 0 \quad (7)$$

$$y = \frac{b * f'_c}{C_c} * \int_0^z w * \left[\frac{2 * w}{z_0} - \left(\frac{w}{z_0} \right)^2 \right] dw = \frac{z}{4} * \left[\frac{8 * z_0 - 3 * z}{3 * z_0 - z} \right] \quad ; \quad z_0 \neq 0 \quad (8)$$

donde:

C_c es la fuerza de compresión aportada por el concreto

b es el ancho de la sección rectangular

y es la posición de la fuerza C_c medida desde el eje neutro de la sección

El equilibrio de fuerzas de la sección exige que se cumpla las Ecuaciones 9 y 10 [1,2]:

$$\frac{b * f'_c}{z_0} * \left[z^2 - \frac{z^3}{3 * z_0} \right] + A'_s * E_s * \frac{(z - d')}{d - z} * \epsilon_y - A_s * F_y = 0 \quad (9)$$

$$\epsilon_y = \frac{F_y}{E_s} \quad (10)$$

donde:

A_s es el área de acero disponible para soportar tracción

A'_s es el área de acero disponible para soportar compresión que toma dos valores para este estudio: cero (0) para la mitad de las muestras y

0.5*As para la otra mitad de muestras

ϵ_y es la deformación de fluencia del acero de refuerzo

Fy es el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo

E_s es el módulo de elasticidad del acero de refuerzo

La Ecuación 9 corresponde a un polinomio de grado 4 que no puede resolverse por métodos algebraicos. Para superar esto, se recurre al uso de métodos numéricos [9]. Dentro de los métodos iterativos que no requieren derivada se dispone, entre otros, de los métodos de bisección, falsa posición y de la secante. Por la precisión garantizada según convergencia elegida y por la adaptabilidad a un código de programación se elige el método de la falsa posición para este trabajo.

La evaluación del equilibrio de fuerzas considerando la simplificación de usar una línea recta en lugar de una parábola, cambia la función a integrar en las expresiones 7 y 8 y obliga a reescribir la Ecuación 9 en la forma que se muestra en la ecuación 11:

$$\frac{b \cdot kd \cdot f_c}{2} + A'_s \cdot E_s \cdot \frac{(kd-d)}{d-z} \cdot \epsilon_y - A_s \cdot F_y = 0 \quad (11)$$

donde:

kd la profundidad de la zona de compresión medida desde el eje neutro de la sección hasta la fibra extrema de la zona de compresión cuando se usa la simplificación lineal

4. RESULTADOS

Para obtener información comparable usando el método exacto propuesto y el método simplificado, se escribió un código en Matlab®. El código fue validado desarrollando manualmente

ejemplos numéricos de verificación para secciones simplemente reforzadas y para secciones doblemente reforzadas. La precisión de los cálculos se delimitó usando un error de convergencia menor que 0.01% en cada una de las Ecuaciones 9 y 11. El pivote de control fue definido asignando el valor de la deformación de fluencia a la deformación del acero de tracción tal como se define en la Ecuación 10. El dominio inicial de z o kd se definió considerando las siguientes condiciones de frontera obtenidas de un análisis de sensibilidad expresadas en la Ecuación 12 [13]:

$$0.09 \leq \frac{z}{d} \leq 0.62 \quad ;$$

$$0.09 \leq \frac{kd}{d} \leq 0.62 \quad (12)$$

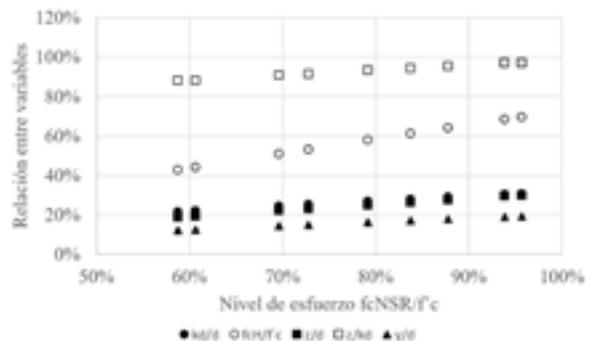


Figura 3. Relación entre variables de modelo para un concreto con f'c=21 MPa

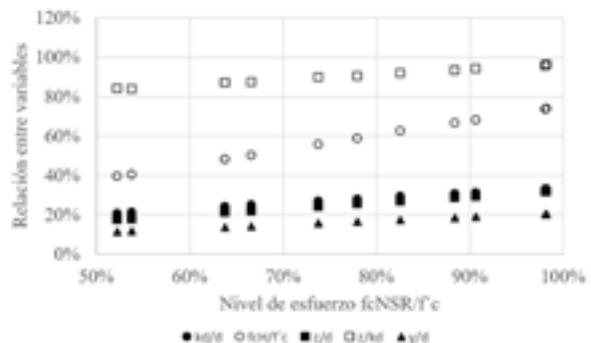


Figura 4. Relación entre variables de modelo para un concreto con f'c=24.5 MPa

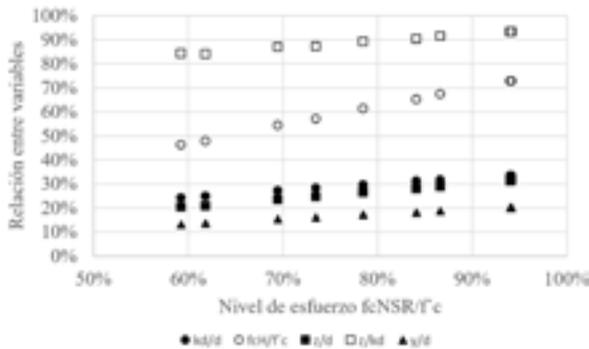


Figura 5. Relación entre variables de modelo para un concreto con $f'_c=28$ MPa

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran la tendencia de la relación entre variables que componen el modelo. Para interpretar los resultados mostrados en esas figuras se definen las siguientes relaciones:

f_{cNSR}

f_c es el nivel de esfuerzo calculado en el modelo simplificado como una fracción del máximo esfuerzo

kd

d es la fracción comprimida de la altura útil en el modelo simplificado (relación lineal)

f_cH

f_c es el nivel de esfuerzo pronosticado por el modelo exacto relativo al máximo esfuerzo posible

z

d es la fracción comprimida de la altura útil en el modelo exacto (relación parabólica)

z

kd es la profundidad relativa de compresión del modelo exacto con respecto al modelo simplificado

y

d es la posición relativa del centroide de carga de compresión del concreto con respecto a la altura útil

Otros resultados de relaciones de interés del modelo, cada una con un coeficiente de variación denotado como C.V., se pueden resumir como sigue:

- El esfuerzo f_c calculado con el modelo exacto oscila alrededor de un 73% (C.V.=0.4%) del calculado por el método simplificado
- La posición del eje neutro y del modelo exacto oscila alrededor de un 65% (C.V.=0.6%) de la profundidad comprimida z
- El momento resistente de la sección es del orden del 91% (C.V.=1.9%) del momento virtual calculado como $T*d$
- El momento resistente calculado al usar el modelo exacto es del orden del 97% (C.V.=0.6%) el dado por el método simplificado
- La ductilidad de curvatura calculada usando el modelo exacto es del orden del 98% (C.V.=1.1%) de la obtenida por el método simplificado

5. DISCUSIÓN

A pesar de que el esfuerzo de compresión calculado con el modelo exacto es del orden del 73% del obtenido usando la simplificación de línea recta, el área adicional que aporta la parte curva sobre una línea secante de la parábola reduce la deficiencia de fuerza en el método exacto. Así mismo, la variación de otros descriptores de la curva esfuerzo-deformación compensan esa diferencia. Por ejemplo, debido a que el cociente z/kd tiende a ser menor que la unidad, el brazo de palanca interno aumenta y aporta un momento adicional al modelo exacto.

Del equilibrio de fuerzas se deduce que la fuerza total de compresión debe compensar la misma

fuerza de tracción en cada modelo usado. La menor fuerza de compresión del concreto del modelo exacto se ve aumentada por una mayor fuerza en el acero de compresión con respecto al modelo simplificado. Esto está directamente relacionado con los cambios de la posición del eje neutro.

La ductilidad de curvatura predicha por el modelo simplificado es un buen estimativo que se aproxima bastante a la calculada con el modelo exacto. Las diferencias observadas entre los dos modelos no afectan los resultados en sentido práctico.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- La relación lineal de la curva esfuerzo-deformación es una buena aproximación para el cálculo del momento de una sección rectangular con refuerzo simple o doble que esté configurada para garantizar comportamiento dúctil.
- Cuando se use el modelo simplificado se sugiere usar el mismo factor de reducción de 0.95 para el momento flector resistente y para la ductilidad de curvatura de la sección.
- Para futuros estudios puede ser interesante investigar el comportamiento de la sección cuando incursiona en la parte recta del modelo de Hognestad que describe altos esfuerzos próximos a la falla.

REFERENCES

- [1] Park R and Paulay T. 1975. Reinforced concrete structures. John Wiley & Sons Ltd.
- [2] Nilson A, Winter G. 2000. Diseño de estructuras de concreto. Mc GrawHill.
- [3] Villagrán E I, Vera César, Posada A E. 2013. Modelo esfuerzo-deformación para elementos de concreto reforzado que cumple con las hipótesis de las NTC RCDF 2004. Concreto y cemento. Investigación y desarrollo. Vol. 5, núm. 1.
- [4] American Concrete Institute (ACI). 2019. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318-19).
- [5] Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS). 2010. Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10.
- [6] Malaikah A S. 2005. A Proposed Relationship for the Modulus of Elasticity of High Strength Concrete Using Local Materials in Riyadh. J. King Saud Univ. Vol. 17, Eng. Sci. (2), pp. 131-142, Riyadh (1425H./2005).
- [7] Espion B and Halleux P. 1988. Moment curvature relationship of reinforced concrete sections under combined bending and normal force. Materials and Structures/ Matériaux et Constructions, 21,341-351.
- [8] Petrone F. 2015. Yield and Ultimate Moment and Curvature Closed-Form Equations for Reinforced Concrete Sections. ACI Structural Journal/July-August 2015.
- [9] ABBASI A F and SIESS C P. 1969 Effect of stress-strain characteristics of high-strength reinforcement on the behavior of reinforced concrete beam-columns. Civil engineering studies. Structural Research Series No. 354. University of Illinois.
- [10] Larson RE, Hostetler RP, Edwards BE. 1995. Cálculo y geometría analítica. McGraw-Hill.

- [11] Leithold L. 1998. El cálculo. Oxford University Press.
- [12] Norris, ChH, Wilbur, JB, Utku S. 1977. Elementary structural analysis. McGraw Hill.
- [13] Ditlevsen O and Madsen H. 2007. Structural Reliability Methods. (Chichester: John Wiley & Sons Ltd)